

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета  
АНО ВО «Центральный университет»  
«24» июня 2025 г.  
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
«Дифференциальная геометрия»**

**Направление подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**Направленность (профиль) подготовки:** Искусственный интеллект

**Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Срок освоения программы:** 4 года

**Год набора:** 2025

**Москва  
2025**

## Содержание

<b>1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Перечень планируемых результатов обучения</b> .....	<b>5</b>
<b>3. Тематический план</b> .....	<b>7</b>
<b>4. Содержание дисциплины (модуля)</b> .....	<b>8</b>
<b>5. Учебно-методическое обеспечение</b> .....	<b>9</b>
<b>6. Материально-техническое обеспечение</b> .....	<b>9</b>
<b>7. Методические и оценочные материалы</b> .....	<b>11</b>

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Дифференциальная геометрия» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Искусственный интеллект, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Дифференциальная геометрия» важно для понимания свойств кривых и поверхностей, что лежит в основе многих областей математики и физики, включая теорию относительности и современные методы анализа данных. Дисциплина (модуль) развивает аналитическое мышление и навыки работы с многообразиями, что способствует решению сложных задач в науке и технике.

### Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Искусственный интеллект и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор. Доступна к изучению после успешного освоения дисциплин (модулей): «Математический анализ» и «Линейная алгебра» или «Основы математического анализа и линейной алгебры».

**Цель изучения дисциплины (модуля):** освоение методов анализа и описания геометрических объектов с помощью дифференциальных и аналитических инструментов для понимания их локальных и глобальных свойств.

### Задачи изучения дисциплины (модуля):

— изучить основные понятия и методы дифференциальной геометрии, включая теорию кривых и поверхностей, тензорный анализ и дифференциальные формы, для понимания геометрических структур в многомерных пространствах;

— освоить вычислительные методы и алгоритмы для анализа геометрических характеристик, таких как кривизна, нормали и интегралы по кривым и поверхностям, с использованием математического аппарата;

— применить знания дифференциальной геометрии в компьютерных науках, включая задачи компьютерной графики, моделирования трехмерных объектов и алгоритмов машинного обучения;

— развить навыки решения прикладных задач и анализа геометрических моделей в контексте математических доказательств и вычислительных экспериментов.

### В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

#### **знать:**

— основные понятия общей топологии (топологические пространства, непрерывность, компактность, связность) и их применение к многообразиям;

— определения гладких многообразий, гладких отображений, диффеоморфизмов и их ключевые свойства;

— теорию касательных пространств, векторных полей, скобки Ли и их роль в дифференциальной геометрии;

— основы тензорного исчисления: типы тензоров, операции с ними, ковариантная производная и связности;

— основные объекты римановой геометрии: метрику, геодезические, кривизну (тензоры Римана, Риччи, скалярную кривизну);

***уметь:***

— анализировать топологические свойства пространств и многообразий (хаусдорфовость, компактность, наличие гладкой структуры);

— работать с гладкими отображениями, строить диффеоморфизмы, применять теорему Сарда;

— вычислять касательные векторы, исследовать векторные поля, работать со скобкой Ли;

— оперировать тензорными полями, вычислять ковариантные производные, проверять свойства связностей;

— решать уравнения геодезических, вычислять символы Кристоффеля и тензоры кривизны для заданных метрик;

***владеть:***

— математическим аппаратом общей и дифференциальной топологии для анализа геометрических структур;

— методами дифференциальной геометрии, включая координатные и бескоординатные вычисления;

— навыками работы с тензорами и римановыми метриками в физических и геометрических приложениях;

— способностью применять полученные знания для решения задач в теории многообразий, общей теории относительности и смежных областях.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
УК-2.	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1.	Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач
		УК-2.2.	Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения
		УК-2.3.	Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области
		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и

			представлять результаты в понятной и доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен определять общие формы и закономерности области машинного обучения	ПК-1.1.	Знает основные теоретические концепции и принципы, относящиеся к области машинного обучения, а также ключевые закономерности и модели, которые помогают в анализе и интерпретации данных
		ПК-1.2.	Умеет проводить систематический анализ области разработки, выявлять и формулировать общие закономерности и тенденции, а также применять методы исследования для получения новых знаний и понимания
		ПК-1.3.	Имеет практический опыт работы в области машинного обучения, включая участие в научных проектах, исследованиях или практических заданиях, где были выявлены и описаны общие формы и закономерности
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта, включая соблюдение норм информационной безопасности

### 3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
Лекции	Семинары (практические занятия)					
1	Топология	4	4		20	Подготовка к семинару, Домашние задания
2	Гладкая структура	4	4		20	Подготовка к семинару, Домашние задания
3	Касательное пространство	4	4		20	Подготовка к семинару, Домашние задания, Контрольная работа
4	Векторные поля	4	4		20	Подготовка к семинару, Домашние задания
5	Дифференцирование	6	6		20	Подготовка к семинару, Домашние задания
6	Римановы многообразия	4	4		10	Подготовка к семинару, Домашние задания
7	Интегрирование	4	4		10	Подготовка к семинару, Домашние задания, Контрольная работа
	<i>Зачет с оценкой</i>			10		
	<b><i>Итого:</i></b>	<b>30</b>	<b>30</b>	<b>10</b>	<b>120</b>	
	<b><i>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</i></b>	<b>190</b>				
	<b><i>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</i></b>	<b>5</b>				

#### 4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Топология	Топологическое пространство и топологические многообразия. Гомеоморфизмы и непрерывные отображения. Операции над топологическими пространствами
2	Гладкая структура	Понятие карты и атласа. Гладкие многообразия. Примеры многообразий. Морфизмы многообразий, диффеоморфизм. Ранг отображения. Отображения постоянного ранга и подмногообразия Лемма Сарда и теоремы об аппроксимации.
3	Касательное пространство	Три определения касательного вектора. Производная Ли. Дифференциал отображения.
4	Векторные поля	Векторные и ковекторные поля, операторные поля, поля билинейных и квадратичных форм. Первая и вторая квадратичные формы. Понятие дифференциальной формы. Операции над дифференциальными формами. Дифференцирование. Примеры тензорных полей и операции над ними.
5	Дифференцирование	Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля и их вычисления
6	Римановы многообразия	Метрика и Риманова многообразия. Риманова связность. Параллельный перенос и геодезические
7	Интегрирование	Плотности и интегрирование плотностей. Ориентация на многообразии. Многообразие с краем и индуцированная ориентация. Интегрирование дифференциальных форм. Интегрирование дифференциальных форм.

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

### *Основная литература:*

1. Мусин, Ю. Р. Тензорный анализ. Вводный курс с приложениями к анализу и геометрии : учебник для вузов / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 184 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06198-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563579>.

2. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

3. Потапов, А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : учебник и практикум для вузов / А. П. Потапов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 507 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19121-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/569097>.

### *Дополнительная литература:*

1. Сандракова, Е. В. Дифференциальные формы на гладких многообразиях : учебник для вузов / Е. В. Сандракова, Е. В. Сумин. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 138 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10988-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/565616>.

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:  
— столами и стульями;

- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	<a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp">https://elibrary.ru/defaultx.asp</a>
2.	База данных для IT-специалистов	<a href="https://habr.com">https://habr.com</a>
3.	База данных ScienceDirect	<a href="https://www.sciencedirect.com">https://www.sciencedirect.com</a>
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	<a href="https://minobrnauki.gov.ru/">https://minobrnauki.gov.ru/</a>
5.	Федеральный портал «Российское образование»	<a href="https://www.edu.ru/">https://www.edu.ru/</a>
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	<a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	<a href="http://school-collection.edu.ru/">http://school-collection.edu.ru/</a>
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	<a href="http://fcior.edu.ru/">http://fcior.edu.ru/</a>

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
<b>Операционные системы:</b>		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Браузеры:</b>		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Офисные приложения:</b>		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Программное обеспечение для планирования и учета времени:</b>		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления проектами:</b>		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы управления базами данных:</b>		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы резервного копирования (backup):</b>		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
<b>Справочно-правовые системы:</b>		

КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
<b>Средства антивирусной защиты:</b>		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
<b>Среды разработки:</b>		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Пакеты программных средств и библиотек:</b>		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления библиографической информацией:</b>		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Сервисы и службы:</b>		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Дифференциальная геометрия» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, контрольные работы, домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Участие в семинаре (аудиторная работа)* – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники

информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов, планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

### **Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

#### **Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Дифференциальная геометрия»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме **зачета с оценкой**, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Дифференциальная геометрия» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	13	Набор задач по темам недели
Аудиторная работа	15%	14	Активная работа студента на семинаре
Контрольные работы	30%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Активность	Вес	Количество	Описание
Зачет с оценкой	35%	1	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по курсу

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Дифференциальная геометрия»:**  $\langle 0,2 \times \text{среднее за домашние задания} + 0,15 \times \text{аудиторная работа} + 0,3 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,35 \times \text{зачет с оценкой} \rangle$ .

### Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

#### Примерные домашние задания

##### Домашнее задание по теме «Топологические пространства»

1. Приведите пример топологии на множестве из трёх элементов, отличной от дискретной и антидискретной. Определите открытые множества.
2. Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств в топологическом пространстве является открытым множеством.
3. Исследуйте связность множества  $[0,1] \cup [2,3]$  с естественной топологией. Является ли оно связным? Обоснуйте ответ.
4. Докажите, что образ компактного множества при непрерывном отображении также является компактным.
5. Определите, когда два топологических пространства гомеоморфны, и приведите пример гомеоморфизма между интервалом  $(0,1)$  и  $\mathbb{R}$ .

##### Домашнее задание по теме «Атласы и согласованность»

1. Постройте атлас для двумерной сферы  $S^2$  с двумя координатными картами, покрывающими всю сферу, и проверьте согласованность переходных функций.
2. Докажите, что переходные функции между координатными картами гладкого многообразия являются диффеоморфизмами.
3. Рассмотрите атлас с одной координатной картой на окружности  $S^1$  и покажите, почему он не покрывает всю окружность. Предложите дополнение.
4. Приведите пример несовместимых атласов на одном и том же топологическом многообразии. Объясните, почему они не согласованы.
5. Исследуйте, как изменение координатных карт влияет на структуру атласа и его согласованность.

##### Домашнее задание по теме «Определение касательного пространства»

1. Определите касательное пространство к многообразию в точке через эквивалентные классы путей.
2. Покажите эквивалентность определения касательного пространства через производные кривых и через производные направленных функций.
3. Найдите базис касательного пространства к  $\mathbb{R}^2$  в произвольной точке.
4. Опишите касательное пространство к тору  $T^2$  в произвольной точке и найдите его размерность.
5. Рассчитайте касательное пространство к подмногообразию, заданному уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  в  $\mathbb{R}^3$ , в точке  $(0,0,1)$ .

#### Примерные вопросы для подготовки к семинарам

##### Вопросы к семинару по теме «Тензоры на многообразиях»

1. Что такое тензорное поле на многообразии? Какова роль типа  $(k, l)$  тензора?
2. Как определяется тензорное произведение двух тензорных полей? Приведите пример.

3. Что такое симметричный и кососимметричный тензор? Как они связаны с дифференциальными формами?
4. Как ведут себя компоненты тензора при переходе между координатными системами?
5. Объясните понятие метрического тензора и его свойства на многообразии.

#### **Вопросы к семинару по теме «Риманова метрика и длина кривых»**

1. Как определяется риманова метрика на многообразии? Какие требования предъявляются к метрическому тензору?
2. Как вычислить длину гладкой кривой на римановом многообразии?
3. Что такое геодезическая? Как связана геодезическая с римановой метрикой?
4. Как формулируется задача экстремума длины кривой и как она приводит к уравнениям геодезических?
5. Как связаны понятия римановой метрики и скалярного произведения касательных векторов?

#### **Вопросы к семинару по теме «Гомеоморфизмы и инварианты»**

1. Что такое гомеоморфизм между топологическими пространствами? Какие свойства он сохраняет?
2. Какие топологические инварианты вы знаете? Приведите примеры.
3. В чём заключается отличие гомеоморфизма от диффеоморфизма?
4. Как определить, что два многообразия не гомеоморфны, используя инварианты?
5. Приведите пример двух гомеоморфных, но не диффеоморфных многообразий (если такие известны).

#### **Примерные задания по контрольным работам**

##### **Контрольная работа № 1**

1. Дайте определение топологического пространства и приведите три примера.
2. Что такое базис топологии? Приведите пример базиса на множестве  $\mathbb{R}$ .
3. Докажите, что объединение любого семейства открытых множеств открыто.
4. Определите гомеоморфизм. Являются ли интервал  $(0,1)$  и  $\mathbb{R}$  гомеоморфными? Обоснуйте.
5. Дайте определение топологического многообразия. Почему локальная евклидовость важна?
6. Что такое связное пространство? Докажите, что отрезок  $[0,1]$  связан.
7. Дайте определение компактного пространства и приведите пример.
8. Опишите понятие атласа на многообразии. Что значит, что атлас согласован?
9. Что такое гладкое многообразие? Чем оно отличается от топологического?
10. Определите диффеоморфизм между гладкими многообразиями. Приведите пример.
11. Что такое погружение и что такое вложение многообразия? Приведите примеры.
12. Чем отличается многообразие с границей от обычного многообразия?
13. Опишите процесс сглаживания топологического многообразия.
14. Дайте определение касательного пространства к многообразию в точке через производные путей.
15. Что такое векторное поле на многообразии? Определите Ли-производную векторных полей.

##### **Контрольная работа № 2**

1. Определите тензорное поле на многообразии и приведите пример тензора типа  $(1,1)$ .
2. Что такое тензорная алгебра над многообразием?
3. Объясните понятие связности (аффинной связности) и ковариантной

производной.

4. Опишите параллельный перенос векторного поля вдоль кривой.
5. Как определить дифференцирование тензорных полей?
6. Что такое риманова метрика? Какие свойства она должна удовлетворять?
7. Как вычислить длину гладкой кривой на римановом многообразии?
8. Определите геодезическую и приведите уравнения геодезических как экстремалей длины.
9. Что такое связность Леви-Чивиты? Почему она важна?
10. Опишите тензор кривизны Римана. Какие симметрии он удовлетворяет?
11. Что такое скалярная кривизна? Как она связана с тензором кривизны?
12. Объясните понятие секционной кривизны.
13. Покажите, что связность Леви-Чивиты сохраняет метрический тензор.
14. Рассчитайте длину кривой на сфере с римановой метрикой, заданной стандартной метрикой.
15. Обсудите связь между геодезическими и параллельным переносом векторных полей.

### Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Как называется топологическое пространство, в котором определена гладкая структура?	Гладкое многообразие	УК-1
2	Назовите отображение, которое является взаимно однозначным и гладким между многообразиями.	Диффеоморфизм	УК-1
3	Как называется пространство касательных векторов в точке многообразия?	Касательное пространство	УК-1
4	Как называется операция, которая отображает векторное поле в другое векторное поле?	Производная Ли	УК-1
5	Как называется первая квадратичная форма поверхности?	Первая фундаментальная форма	УК-1
6	Как называется символ, используемый для задания ковариантного дифференцирования?	Символы Кристоффеля	УК-1
7	Как называется метрический тензор на римановом многообразии?	Риманова метрика	ОПК-1
8	Как называется кривая, которая локально минимизирует длину на римановом многообразии?	Геодезическая кривая	ОПК-1
9	Как называется операция интегрирования дифференциальных форм на многообразии?	Интегрирование дифференциальных форм	ОПК-1
10	Как называется отображение, задающее гладкую структуру на многообразии?	Атлас	ПК-1
11	Как называется теорема, утверждающая, что множество критических значений отображения имеет меру ноль?	Лемма Сарда	ПК-1
12	Как называется отображение, у которого ранг постоянен на всём многообразии?	Отображение постоянного ранга	ПК-1
13	Как называется ковариантное дифференцирование векторных полей на многообразии?	Ковариантное дифференцирование	ПК-2
14	Как называется процесс переноса вектора вдоль кривой с сохранением ковариантного дифференцирования?	Параллельный перенос	ПК-2
15	Как называется ориентированное многообразие с краем?	Многообразие с краем	ПК-2

16	Как называется дифференциальная форма степени 1?	1-форма	УК-1
17	Как называется операция дифференцирования дифференциальных форм?	Внешнее дифференцирование (дифференциал)	УК-1
18	Как называется пространство, на котором определены гладкие функции и карты?	Топологическое многообразие	УК-1
19	Как называется отображение, обратное к диффеоморфизму?	Обратное диффеоморфизму	УК-2
20	Как называется функция, задающая локальную координатную карту многообразия?	Карта	УК-2