

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 1»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Разработка

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2025

**Москва
2025**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	7
5. Учебно-методическое обеспечение	8
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	10

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 1» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Разработка, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 1» является основой для многих других математических дисциплин и научных направлений, включая физику, экономику и инженерные науки. Дисциплина развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Разработка и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— формирование понимание терминов, основных теорем, связанных с исследованием функции на экстремум и выпуклость, построение графиков функции и их анализ с помощью производной;

— обучение навыкам вычисления предела последовательности и функции, исследования функции на непрерывность и дифференцируемость;

— применение производных к исследованию функций и построение график функций, применение формулы Тейлора к нахождению пределов и другое.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— уравнения прямых и плоскостей в различных формах, понятие проекции точки на прямую и на плоскость. Применение метода наименьших квадратов для аппроксимации функций и обработки данных. Определение базиса, понятие проекции в R^n , принцип замены базиса;

— частные производные, их геометрический смысл и связь с градиентом функции; метода множителей Лагранжа для решения задач условной оптимизации;

— основные операции алгебры матриц; понятие квадратичной формы; ортогонализация системы векторов;

— основные методы интегрирования; свойства определённых интегралов, геометрический смысл определённого интеграла;

уметь:

— выполнять операции с векторами; определять линейные оболочки и подпространства, находить их размерность, работать с гиперплоскостями; находить базис и координаты векторов в данном базисе, вычислять проекции векторов, выполнять замену базиса;

— вычислять частные производные функций нескольких переменных; находить критические точки функций нескольких переменных; применять метод множителей Лагранжа для решения задач условной оптимизации;

— выполнять операции с матрицами, вычислять производные матриц; применять метод Грама-Шмидта для построения ортогонального базиса;

— применять методы интегрирования; вычислять определённые интегралы, применять их для нахождения площадей, объёмов и других геометрических характеристик;

владеть:

— применение понятий линейных оболочек, подпространств и гиперплоскостей для решения задач линейной алгебры;

— решение задач на условный экстремум, анализ и интерпретация полученных решений;

— применение транспонирования матриц и квадратичных форм для решения задач линейной алгебры и математического анализа;

— использование интегралов для решения задач математического анализа; интерпретация результатов интегрирования в контексте конкретной задачи (физика, экономика).

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности.
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.

	математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
Лекции	Семинары (практические занятия)					
<i>1 семестр</i>						
1	Аналитическая геометрия	30	30		64	Домашнее задание Проект Подготовка к семинару
2	Предел и производная функции одной переменной	30	30		66	Домашнее задание Контрольная работа Подготовка к семинару
3	Дифференцирование функции одной переменной	30	30		64	Домашнее задание Контрольная работа Подготовка к семинару
	<i>Экзамен</i>			6		
	<i>Итого за 1 семестр:</i>	90	90	6	194	
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</i>	380				
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</i>	10				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
<i>1 семестр</i>		
1	Аналитическая геометрия	Векторы и операции с ними. Прямые и плоскости. Подпространства и линейные оболочки. Базис, проекция
2	Предел и производная функции одной переменной	Функции и их свойства. Предел и непрерывность. Понятие производной
3	Дифференцирование функции одной переменной	Производные элементарных функций. Техника дифференцирования. Геометрический и механический смысл производной. Задача оптимизации в экономике и бизнесе

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562115>.

2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562116>.

3. Математический анализ. Сборник заданий : учебник для вузов / под общей редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 206 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-11516-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563920>.

4. Никитин, А. А. Математический анализ. Сборник задач : учебное пособие для вузов / А. А. Никитин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 353 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8585-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560413>.

5. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15839-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560017>.

Дополнительная литература:

1. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

2. Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560461>.

3. Малугин, В. А. Линейная алгебра: практический курс для экономистов : учебник и практикум для вузов / В. А. Малугин, Я. А. Рощина. — Москва : Издательство Юрайт, 2025.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 1» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, коллоквиумы, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Проект – исследовательская работа по курсу и презентация результатов.

Для успешной подготовки к проекту рекомендуется: четко определить цели и задачи проекта; составить план работы, разбив проект на этапы с указанием сроков выполнения каждого из них; использовать разнообразные источники информации и инструменты для исследования темы; регулярно проверять прогресс и вносить коррективы в план, если это необходимо.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 1»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций,

сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	
8	Отлично	
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 1» в каждом семестре оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
Домашние задания	20%	Набор задач по темам недели
Аудиторная работа	20%	Активная работа на семинарах, ответы на вопросы, решение задач
Контрольные работы	20%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Проект	10%	Исследовательская работа по дисциплине (модулю) и презентация результатов
Экзамен	30%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 1»: « $0,2 \times$ среднее за домашние задания + $0,2 \times$ среднее за аудиторную работу + $0,2 \times$ среднее за контрольные работы + $0,30 \times$ экзамен».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные вопросы для семинаров

1 семестр

Тема 1: Аналитическая геометрия (Векторы и операции с ними. Прямые и плоскости. Подпространства и линейные оболочки. Базис, проекция)

1. Определите векторное произведение двух векторов в \mathbb{R}^3 и приведите пример вычисления.
2. Как найти уравнение прямой в \mathbb{R}^2 , проходящей через две заданные точки?
3. Объясните понятие линейной оболочки множества векторов и приведите пример для двух векторов в \mathbb{R}^2 .
4. Что такое базис подпространства? Приведите пример ортонормированного базиса в \mathbb{R}^3 .
5. Как вычислить проекцию вектора на прямую в \mathbb{R}^2 ?
6. Докажите, что плоскость в \mathbb{R}^3 можно задать уравнением $ax + by + cz = d$.
7. Найдите размерность линейной оболочки трех векторов в \mathbb{R}^3 , если они линейно зависимы.
8. Опишите алгоритм замены базиса в \mathbb{R}^2 .
9. Приведите пример вектора, ортогонального к двум заданным векторам в \mathbb{R}^3 .
10. Как определить, лежит ли точка на данной плоскости в \mathbb{R}^3 ?

Тема 2: Предел и производная функции одной переменной (Функции и их свойства. Предел и непрерывность. Понятие производной)

1. Определите предел функции в точке и приведите пример вычисления $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$.
2. Какие свойства непрерывной функции вы знаете? Приведите пример разрывной функции.
3. Объясните геометрический смысл производной и найдите производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x=1$.
4. Докажите, что функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x=0$.
5. Как найти предел последовательности с помощью ε - δ определения? Приведите пример.

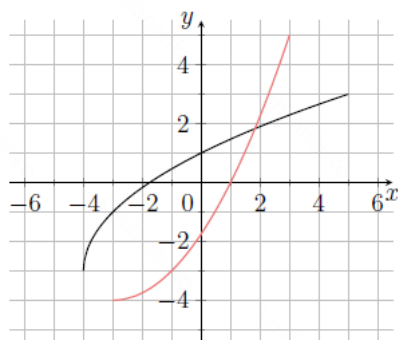
- Приведите пример функции, непрерывной на $[0,1]$, но не дифференцируемой в некоторой точке.
- Вычислите левый и правый пределы функции $f(x) = 1/(x-2)$ при $x \rightarrow 2$.
- Объясните понятие бесконечного предела и приведите пример.
- Найдите производную функции $f(x) = e^x$ и объясните её свойства.
- Докажите, что если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

Тема 3: Дифференцирование функции одной переменной (Производные элементарных функций. Техника дифференцирования. Геометрический и механический смысл производной. Задача оптимизации в экономике и бизнесе)

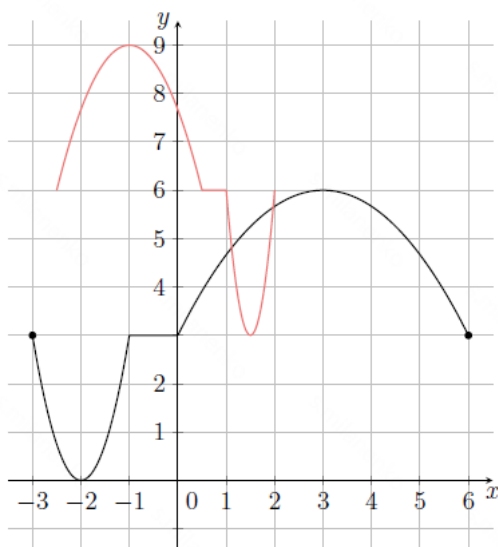
- Найдите производную функции $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ с помощью правил дифференцирования.
- Объясните геометрический смысл производной и нарисуйте касательную к графику $f(x) = x^2$.
- Как применять правило цепочки для дифференцирования сложной функции? Приведите пример $f(x) = (x^2 + 1)^3$.
- Найдите критические точки функции $f(x) = x^3 - 3x$ и определите тип экстремума.
- Объясните механический смысл производной в контексте скорости движения.
- Примените задачу оптимизации: найдите максимальную прибыль для функции дохода $R(x) = 100x - x^2$ и затрат $C(x) = 20x$.
- Дифференцируйте неявно уравнение $x^2 + y^2 = 1$ и найдите dy/dx .
- Найдите производную функции $f(x) = \ln(x)$ и объясните её поведение.
- Решите задачу оптимизации в бизнесе: минимизируйте затраты на производство при функции $C(q) = q^2 + 10q + 100$.
- Приведите пример использования производной для анализа эластичности спроса в экономике.

Контрольная работа №1

- Пусть $f(x) = (x - 5)^3$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Найди f^{-1} .
 - Пусть функция g такова, что $(f \circ g)(x) = 8x^6$. Найди g .
- Дан график функции $y = f(x)$. Функция определена при $-4 \leq x \leq 5$.



- Запиши область определения и множество значений обратной функции f^{-1} .
 - Нарисуй эскиз графика f^{-1} .
- Дан график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(1 - 2x) + 3$.



- а) Словами опиши последовательность преобразований для построения $y = h(x)$.
 б) Нарисуй эскиз графика функции $h(x)$.

4. Нарисуй эскиз графика функции $y(x) = \arccos\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right)$ на основе анализа интервалов монотонности.

5. Следующее утверждение верно для функции f :

$$\exists C: \forall x \in D(f) \exists a \in D(f): |f(a) \cdot f(x)| < C$$

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

6. Следующее утверждение верно для последовательности $\{a_n\}$:

$$\forall C > 0 \exists k \in \mathbb{N}: \exists n > k: |a_n| < C$$

Следует ли отсюда, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

7. Докажи, что последовательность $a_n = \frac{4n^2 + 6n + 13}{2n + 3}$

является возрастающей, начиная с некоторого номера N .

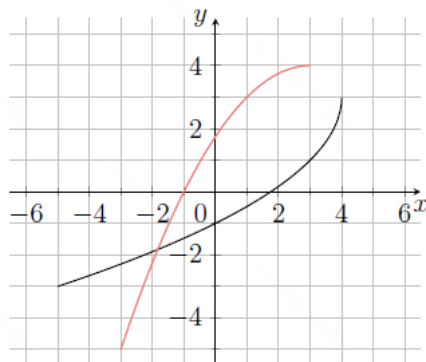
Контрольная работа №2

Пусть $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 7, x \in \mathbb{R}$.

а) Найди f^{-1} .

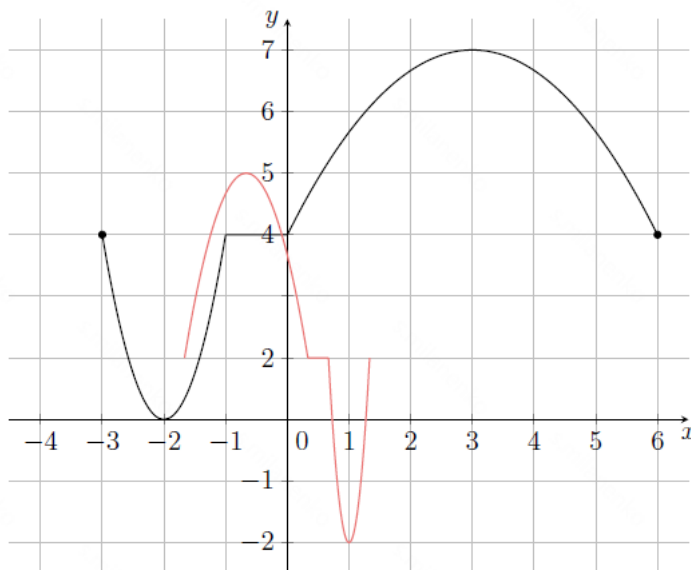
1. б) Пусть функция g такова, что $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 15$. Найди g .

2. Дан график функции $y = f(x)$. Функция определена при $-5 \leq x \leq 4$.



- а) Запиши область определения и множество значений обратной функции f^{-1} .
 б) Нарисуй эскиз графика f^{-1} .

3. Дан график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(1 - 3x) - 2$.



- а) Словами опиши последовательность преобразований для построения $y = h(x)$.
 б) Нарисуй эскиз графика функции $h(x)$.

4. Нарисуй эскиз графика функции $y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right)$

на основе анализа интервалов монотонности.

5. Следующее утверждение верно для функции $f(x)$:

$$\forall C > 0 \exists a \in \mathbb{R} : \exists x > a : |f(x)| < C$$

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

6. Следующее утверждение верно для последовательности $\{a_n\}$:

$$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : |a_n \cdot a_k| < C$$

Следует ли отсюда, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

Примерные домашние задания

Домашнее задание по теме: «Функции. Преобразование графиков функций»

Область определения и область значений

*** ЗАДАЧА 1

1 балл

Найди естественную область определения и область значений функций:

- а) (0,3 балла) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$,
 б) (0,5 балла) $f(x) = \sqrt{-\arcsin(x+3)}$,
 в) (0,2 балла) $f(x) = \ln(x+3)$.

Обратные функции, композиции функций

*** ЗАДАЧА 2

2 балла

Найди обратную функцию $f^{-1}(x)$, если:

- а) (0,3 балла) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$,
 б) (0,3 балла) $f(x) = \sqrt{4-2x}$,
 в) (0,3 балла) $f(x) = \ln(5x+7)$,
 г) (0,3 балла) $f(x) = 3e^{\sqrt{x}}$,
 д) (0,8 балла) $f(x) = x^2 - 8x - 3, x < 4$.

*** ЗАДАЧА 3

(1 балл)

Докажи, что функция $y = \frac{a-x}{1+bx}$ является обратной самой себе, если $ab \neq -1$.

Преобразования графиков функций

*** ЗАДАЧА 4

1 балл

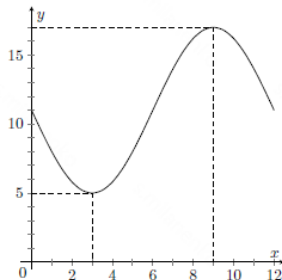
Найди выражение для функции $f(x) = e^x + x^2$

- а) после сдвига графика на 3 единицы вправо,
- б) после сдвига графика на 5 единиц влево,
- в) после сдвига графика на 2 единицы вверх,
- г) после сдвига графика на 4 единицы вниз,
- д) после растяжения графика от оси Ox в 2 раза,
- е) после сжатия графика к оси Ox в 2 раза,
- ж) после растяжения графика от оси Oy в 2 раза,
- з) после сжатия графика к оси Oy в 2 раза.

*** ЗАДАЧА 5

1 балл

Дан график функции $f(x) = a \sin(bx) + c$, где $x \in [0; 12]$. Функция достигает минимального значения в точке $(3; 5)$, а максимального в точке $(9; 17)$.



Найди значения a , b и c .

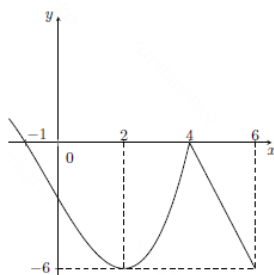
*** ЗАДАЧА 6

2 балла

Нарисуй графики функций:

- а) $y = \frac{1}{3}f(x) + 2$,
- б) $y = 3 - \frac{1}{2}f(x)$,
- в) $y = f\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$,
- г) $y = f\left(3 - \frac{1}{2}x\right)$,

где график $y = f(x)$ имеет вид:



Домашнее задание по теме: «Свойства функций»

Свойства функций

- **** ЗАДАЧА 1** 1 балл
Докажи, что если f — монотонная функция, то композиция $g = f \circ f$ — возрастающая функция на каждом интервале, где она определена.
- **** ЗАДАЧА 2** 0,5 балла
Приведи пример двух строго возрастающих на \mathbb{R} функций, произведение которых является строго убывающей функцией.
- **** ЗАДАЧА 3** 0,5 балла
Приведи пример двух неограниченных функций f и g таких, что композиция функций $f \circ g$ является ограниченной.
- **** ЗАДАЧА 4** 1 балл
Даны две ограниченные функции f и g , причём $g(x) \neq 0$.
а) (0,4 балла) Докажи, что произведение функций $f \cdot g$ — ограниченная функция.
б) (0,6 балла) При каком дополнительном условии функция $\frac{f}{g}$ будет также ограниченной функцией? Приведи доказательство и контрпример. (В данном случае контрпример состоит из функций f и g таких, что твоё дополнительное условие не выполняется и функция $\frac{f}{g}$ является неограниченной.)
- **** ЗАДАЧА 5** 1 балл
Покажи, что следующие функции являются нечётными:
а) (0,4 балла) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ ($-1 < x < 1$);
б) (0,6 балла) $y = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$.
- **** ЗАДАЧА 6** 0,5 балл
Известно, что функция f не является ни чётной, ни нечётной, а функция g — нечётная. Может ли функция $f + g$ быть:
а) (0,2 балла) чётной;
б) (0,3 балла) нечётной?
Если может, то приведи пример. Если не может, то докажи.

Эскизы композиций функций

- **** ЗАДАЧА 7** 1 балл
Построй эскиз графика композиции функций на основании анализа интервалов монотонности: $y = \ln(x^2 + 1)$.
- **** ЗАДАЧА 8** 1 балл
Построй эскиз графика композиции функций на основании анализа интервалов монотонности: $y = \arctg(x^2 - 4x)$.
- **** ЗАДАЧА 9** 2 балла
Построй эскиз графика композиции функций на основании анализа интервалов монотонности: $y = e^{\frac{x}{x^2+4x-5}}$.

Домашнее задание по теме: «Последовательности»

Определение последовательности и способы ее задания

- **** ЗАДАЧА 1** 0,5 балла
Какие из чисел $a = 79$, $b = 144$, $c = 510$, $d = 2584$ являются членами последовательности $\{a_n\}$ такой, что $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$?

Свойства последовательностей

- **** ЗАДАЧА 2** 1 балл
Докажи, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ является строго убывающей.
- **** ЗАДАЧА 3** 2,5 балла
Даны последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, причём $u_n = x_n + y_n$, $v_n = x_n y_n$. Докажи или опровергни утверждения:
а) Для того чтобы последовательность $\{u_n\}$ была строго возрастающей достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими.
б) Для того чтобы последовательность $\{u_n\}$ была строго убывающей необходимо, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были убывающими.
в) Для того чтобы последовательность $\{v_n\}$ была строго возрастающей достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими.
г) Для того чтобы последовательность $\{v_n\}$ была строго возрастающей необходимо, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими.
д) Известно, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ убывают. Для того чтобы $\{u_n\}$ была строго убывающей необходимо, чтобы хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ была строго убывающей.
- **** ЗАДАЧА 4** 2 балла
Укажи, какие из следующих утверждений эквивалентны тому, что последовательность ограничена сверху:
а) $\exists C \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq C$;
б) $\exists C \in \mathbb{R}, C > 0: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C$;

- в) $\exists C \in \mathbb{R}, C < 0: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C;$
- г) $\forall C \in \mathbb{R}, C > 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C;$
- д) $\exists C \in \mathbb{R}: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n < C;$
- е) $\exists C \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| < C.$

Какие из утверждений являются достаточными для того, чтобы последовательность была ограничена сверху?

ЗАДАЧА 5

1 балл

Верны ли следующие утверждения? Если верно, то докажи; если неверно, то приведи контрпример.

- а) Если x_n и y_n — неограниченные последовательности, то последовательность $z_n = x_n + y_n$ также является неограниченной.
- б) Если последовательность x_n ограничена, а последовательность y_n — не ограничена, то последовательность $z_n = x_n + y_n$ не ограничена.
- в) Если последовательность x_n ограничена, а последовательность y_n — не ограничена, то последовательность $z_n = x_n y_n$ не ограничена.

ЗАДАЧА 6

1 балл

Докажи, что последовательность $b_n = \frac{n^2}{n+3}$ не является ограниченной.

Примерное задание для проекта

Задание для проекта по теме "Вектора в пространстве \mathbb{R}^n "

Описание проекта

Студенты должны разработать и представить проект, демонстрирующий глубокое понимание ключевых концепций темы: векторов и операций с ними, скалярного произведения, неравенств Коши-Буняковского-Шварца и треугольника, метода наименьших квадратов, прямых и плоскостей в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 , проекций точек на прямые и плоскости, линейных оболочек, подпространств, размерности, гиперплоскостей, базисов (ортогональных и ортонормированных), проекций в \mathbb{R}^n и замены базиса. Проект должен включать как теоретические объяснения, так и практические приложения, например, в геометрии, статистике или машинном обучении. Формат проекта: письменный отчет (5-10 страниц) и устная защита (презентация 10-15 минут).

Цель проекта

Цель — закрепить теоретические знания через практическое применение, развить навыки анализа и презентации математических концепций, а также научиться применять векторные методы к реальным задачам (например, аппроксимация данных методом наименьших квадратов или анализ подпространств в геометрии). Проект способствует развитию критического мышления и умения связывать абстрактную математику с прикладными областями.

Сроки

- **Начало проекта:** [Дата старта, например, 1 неделя после выдачи задания].
- **Промежуточный этап:** [Через 2-3 недели] — сдача плана проекта (описание темы, цели и предварительных результатов).
- **Завершение проекта:** [Через 4-6 недель] — сдача полного отчета и подготовка к защите.
- **Защита:** [Через 1 неделю после сдачи отчета] — устная презентация и ответы на вопросы.

Сроки могут корректироваться преподавателем в зависимости от графика курса.

Этапы выполнения

1. **Подготовка и планирование (1 неделя):** Выберите конкретную задачу или приложение (например, "Применение метода наименьших квадратов для

аппроксимации траектории движения" или "Анализ проекций в R^3 для компьютерной графики"). Соберите теоретический материал по теме и составьте план отчета.

2. Теоретическая часть (1-2 недели): Опишите ключевые понятия (определения, доказательства неравенств, алгоритмы метода Грама-Шмидта и т.д.). Включите примеры вычислений (скалярное произведение, проекции, замена базиса).

3. Практическая часть (1-2 недели): Решите задачу с вычислениями (например, найдите проекцию точки на плоскость, примените метод наименьших квадратов к набору данных, постройте ортонормированный базис). Используйте программные инструменты (Python с numpy, MATLAB или ручные расчеты) для иллюстраций.

4. Анализ и выводы (1 неделя): Обсудите результаты, их интерпретацию и возможные применения. Подготовьте отчет в формате PDF с формулами, графиками и ссылками.

5. Подготовка к защите (1 неделя): Создайте презентацию (PowerPoint или аналог) с ключевыми слайдами (введение, теория, вычисления, выводы). Практикуйте ответы на возможные вопросы.

Критерии оценивания

Оценка выставляется по 10-балльной шкале (максимум). Критерии:

- **Теоретическое содержание (3 баллов):** Глубина объяснений понятий (определения, доказательства), правильность формул и примеров. Полные баллы за точность и полноту.

- **Практическая часть (3 баллов):** Качество вычислений, точность решений задач, использование инструментов. Баллы снижаются за ошибки или отсутствие иллюстраций.

- **Анализ и выводы (2 баллов):** Критичность мышления, связь теории с практикой, оригинальность приложения. Баллы за релевантные интерпретации.

- **Отчет и оформление (1 баллов):** Структура, ясность, отсутствие ошибок, цитирование источников. Баллы за профессиональный вид.

- **Общий вклад (1 баллов):** Инновационность, усилия по углублению темы (например, дополнительные приложения).

Шкала: 9-10 — отлично, 8-7 — хорошо, 6-4 — удовлетворительно, ниже 3 — неудовлетворительно. Проект должен быть индивидуальным; плагиат ведет к нулевой оценке.

Критерии защиты

Защита проходит в форме устной презентации перед комиссией (преподаватель и возможно ассистенты). Критерии:

- **Презентация (5 баллов):** Четкость изложения (логика, темп речи, визуалы), охват всех этапов проекта, время (10-15 минут). Баллы за энтузиазм и умение заинтересовать аудиторию.

- **Ответы на вопросы (3 баллов):** Глубина понимания, корректность ответов на вопросы по теории и практике. Баллы за аргументированные объяснения и способность адаптироваться.

- **Общая подготовка (2 баллов):** Знание материала, уверенность, взаимодействие с аудиторией. Баллы снижаются за чтение с листа или отсутствие подготовки.

Оценка защиты влияет на итоговую оценку проекта (усредняется с оценкой отчета).
В случае низкой оценки защиты возможна передача.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) 1 семестр

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Найди предел $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1).$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	5,00/5.00	ОПК-1
2.	Найди вертикальную асимптоту функции $f(x) = \frac{x^3}{x - 2}.$ Ответ запиши в виде $x = a$, где a – число. А. $x=0$ Б. $x=1$ В. $x=2$ Г. $x=3$	В	ПК-1
3.	Найди предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n + 1}.$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	2,00/2.00	ОПК-1
4.	Найди предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{3(x - 1)}.$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	0,33/0.33	ПК-1
5.	Последовательность задана уравнением: $a_n = n^2 + 2025$.	А	ПК-1

	<p>Является ли она:</p> <p>А. Возрастающей; Б. Убывающей; В. Не монотонной.</p>		
6.	<p>Найди точку экстремума функции $y(x) = x^2 - 4x + 3$</p>	2	ПК-1
7.	<p>Определи промежутки убывания функции</p> $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$ <p>А. $(-\infty; 0)$ Б. $(2; +\infty)$ В. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ Г. $(0; 2)$</p>	Г	ОПК-1
8.	<p>Найди максимальное значение функции</p> $f(x) = 5xe^{1-x}$ <p>на отрезке $[0; 3]$.</p> <p>А. 3 Б. 5 В. 7 Г. 9</p>	Б	ПК-1
9.	<p>Найди вторую производную функции $f(x) = x^4 + \ln(x)$ в точке $x_0 = 2$.</p> <p>Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.</p>	47,75/47.75	ОПК-1
10.	<p>Найди точку разрыва функции</p> $f(x) = \frac{x^2 - 4}{ x - 2 }.$ <p>Выбери правильный вариант ответа:</p> <p>А. $x = 2$ Б. $x = -2$ В. $x = 2$ и $x = -2$ Г. Функция непрерывна</p>	А	ПК-1
11.	<p>Дана функция</p>	Б	ОПК-1

	$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leq 0; \\ ax + b, & \text{если } 0 < x < 2; \\ 2x + 3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$ <p>Выбери все пары значений a и b, при которых функция f непрерывна на \mathbb{R}.</p> <p>А. $a = 2, b = 0$; Б. $a = 3, b = 1$; В. $a = 1, b = 1$; Г. $a = 3, b = 0$.</p>		
12.	Рассчитайте предел последовательности $\{n/(n+1)\}$ при n , стремящемся к бесконечности	1	ОПК-4
13.	Определите сумму первых 10 членов арифметической прогрессии с разностью 2 и первым членом 1	55	ОПК-4
14.	Вычислите предел функции $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ при x , стремящемся к 1	2	ОПК-4