ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Линейная алгебра и геометрия. Часть 1»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Разработка*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2025*

Москва
2025

Электронный документ

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Разработка, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) дает развитие аналитического мышления, навыков работы с математическими моделями и понимания пространственных структур, что является основой для дальнейшего изучения более сложных математических и компьютерных дисциплин.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Разработка и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия» имеет два уровня подготовки: основной и пилотный поток. Обучающиеся распределяются на соответствующие уровни по итогам входного тестирования по дисциплине (модулю).

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- освоение фундаментальных понятий и геометрических интерпретаций линейной алгебры**;**
- применение алгоритмов и методов для решения вычислительных задач**;**
- интеграция теории с доказательствами и прикладными моделями**.**

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- основные концепции линейной алгебры, такие как матричная алгебра, векторные пространства, линейная зависимость, определители, линейные операторы, скалярные произведения и другие ключевые понятия;
- основные алгоритмы решения задач линейной алгебры, такие как метод Гаусса для систем линейных уравнений, методы поиска обратной матрицы, диагонализация, ортогонализация Грама-Шмидта и аналогичные;
- геометрическую интерпретацию основных концепций и утверждений линейной алгебры;
- матричную и векторную формы записи математических объектов и операций;
- приложения линейной алгебры в работе с математическими и статистическими моделями, такими как цепи Маркова, метод главных компонент (PCA) и другие;

уметь:

- решать системы линейных уравнений с использованием матричных методов (метод Гаусса, метод Крамера);
- выполнять операции с матрицами (сложение, умножение, поиск обратной матрицы, транспонирование);
- вычислять определители матриц и определять их ранг;
- Работать с векторными пространствами, включая определение базиса и размерности;

— находить собственные значения и собственные векторы матриц, а также использовать их для диагонализации;

— вычислять скалярные произведения векторов и нормы векторов в евклидовом пространстве;

— применять метод ортогонализации Грама-Шмидта для построения ортогональных базисов;

— объяснять логику доказательств основных теорем курса, опираясь на предоставленное доказательство;

— применять теоремы курса для доказательства несложных утверждений;

владеть:

— навыками комплексного применения методов линейной алгебры для анализа и решения практических задач в области математического моделирования и статистики (например, в цепях Маркова или PCA);

— способностью интегрировать знания линейной алгебры с другими дисциплинами, такими как математический анализ или бизнес-аналитика, для решения междисциплинарных проблем;

— умением интерпретировать результаты вычислений (например, диагонализации или ортогонализации) в контексте геометрических и прикладных интерпретаций.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализация математических моделей в профессиональной деятельности
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности.
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.

	математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары (практические занятия)			
Основной уровень 1 семестр						
1	Системы линейных уравнений	2	2		15	Домашнее задание
2	Матричный формализм	4	4		15	Домашнее задание Контрольная работа
3	Перестановки	4	4		15	Домашнее задание Контрольная работа
4	Определители	4	4		15	Домашнее задание Коллоквиум
5	Векторные пространства	4	4		16	Домашнее задание Контрольная работа
6	Ранги	4	4		16	Домашнее задание Коллоквиум
7	Линейные отображения	4	4		16	Домашнее задание Контрольная работа
8	Билинейные и квадратичные формы	4	4		16	Домашнее задание Коллоквиум
	Экзамен			6		
	Итого по дисциплине (модулю)	***30***	***30***	***6***	***124***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
Основной уровень 1 семестр		
1	Системы линейных уравнений	Системы линейных уравнений. Матрица системы. Элементарные преобразования, ступенчатый и улучшенный ступенчатый вид, алгоритм Гаусса. Главные и свободные неизвестные. Существование ненулевого решения у широкой однородной системы. Связь между множеством решений СЛУ и ОСЛУ.
2	Матричный формализм	Матрицы и матричные операции, и их свойства. Связь с линейными уравнениями. Обратимость матриц. Матрицы элементарных преобразований. Невырожденность матриц: 6 эквивалентных определений. Следствия 6 эквивалентных определений. LU-разложение. Массовое решение систем. Поиск обратной матрицы Гауссом. Блочные формулы умножения матриц. Метод восстановления главных переменных через множество решений. Полиномиальное исчисление от матриц. Существование многочлена зануляющего матрицу.

		Минимальный многочлен. Наивная оценка степени минимального многочлена.
3	Перестановки	Перестановки на множестве из n элементов. Способы задания перестановок. Произведение перестановок. Ассоциативность произведения. Тождественная перестановка, обратная перестановка. Переименование элементов. Понятие цикла и его способы задания. Инверсии перестановки и декремент. Знак перестановке, теорема о согласованности знака с произведением. Вычисление знака.
4	Определители	Явная формула вычисления определителя квадратной матрицы. Определители порядков 2 и 3. Определитель транспонированной матрицы. Определитель матрицы со строкой (столбцом) нулей. Поведение определителя при умножении строки (столбца) на число и при разложении строки (столбца) в сумму двух строк (столбцов). Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами). Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на число. Изменение знака определителя при перестановке двух строк (столбцов). Верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы, их определители. Классификация полилинейных функций от столбцов квадратной матрицы. Определитель с углом нулей. Определитель произведения матриц. Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы. Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке. Разложение определителя по строке (столбцу). Лемма о фальшивом разложении определителя. Обратная матрица, её единственность. Невырожденные матрицы. Определитель обратной матрицы. Присоединённая матрица. Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы. Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы. Формулы Крамера. Характеристический многочлен. Три основных коэффициента для хар многочленов. Блочные формулы и определитель.
5	Векторные пространства	Векторные пространства, подпространства, линейные комбинации, линейная зависимость. Порождающая система, линейная оболочка. Три эквивалентных определения базиса. Понятие размерности. Конечномерные векторные пространства. Базисы, матрица перехода, смена координат. Подпространства векторных пространств. Множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством в F^n. Линейная оболочка подмножества векторного пространства. Фундаментальная система решений. Сумма двух подпространств векторного пространства. Связь размерностей двух подпространств с размерностями их суммы и пересечения. Аффинные пространства и подпространства. Репер и координаты в аффинном пространстве. Взаимное расположение подпространств.
6	Ранги	Ранг конечной системы векторов, его связь с размерностью линейной оболочки системы. Строчный и столбцовый ранг. Их неизменность при преобразовании строк и столбцов. Базисный минор и совпадение его размера с рангом. Матрицы ранга 0 и 1.
7	Линейные отображения	Линейная независимость подпространств. Внешние и внутренние прямые суммы (6 эквивалентных определений). Проекции, формула «БАБА» для проекции. Линейное отображение и изоморфизм. Операции на линейных отображениях, структура векторного пространства. Критерий существования линейного отображения в терминах базиса, критерий изоморфности векторных пространств. Матрица линейного отображения и ее связь с операциями на линейных отображениях. Замена матрицы линейного отображения при смене базисов. Образ и ядро. Критерий инъективности и сюръективности в их терминах. Оценка ранга произведения и суммы матриц. Связь

		размерности ядра и образа линейного отображения. Классификация линейных отображений. Пространство V∗ и двойственный базис.
8	Билинейные и квадратичные формы	Билинейные формы и матричный формализм. Ранг билинейной формы. Левые и правые ортогональные дополнения, ядра формы, невырожденность в терминах ядер. Связь ранга с размерностями ядер. Вид матрицы билинейной формы и разложение в прямую сумму пространства и ортогонального слева (или справа).

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Татарников, О. В. Линейная алгебра : учебник для вузов / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 273 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19275-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/556226.

2. Шилин, И. А. Линейная алгебра. Задачник : учебное пособие для вузов / И. А. Шилин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 118 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-14382-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/567570.

3. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 416 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18887-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560611.

4. Лубягина, Е. Н. Линейная алгебра : учебник для вузов / Е. Н. Лубягина, Е. М. Вечтомов. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 150 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10594-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/565745.

Дополнительная литература:

1. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15839-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560017.

2. Сабитов, И. Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для вузов / И. Х. Сабитов, А. А. Михалев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 258 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08941-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/539950.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		

Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, коллоквиумы, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме ***экзамена***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1» в каждом семестре оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
		Основой уровень
Домашние задания	10%	Набор задач по темам недели
Аудиторная работа	15%	Активная работа на семинарах, ответы на вопросы
Контрольные работы	20%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	20%	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Экзамен	35%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1»:

Основной уровень: «0,1× среднее за домашние задания + 0,15 × среднее за аудиторную работу + 0,2 × среднее за контрольные работы + 0,2 × коллоквиум + 0,35 × экзамен».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные темы к коллоквиуму

Тема «Системы линейных уравнений»

— Совместная и несовместная система
— Определённая и неопределённая система
— Однородная и неоднородная система
— Матрица
— Главная и побочная диагонали
— Элементарные преобразования строк
— Ступенчатый вид матрицы
— Главные и свободные переменные
— Как по ступенчатому виду понять, что система определена?
— Сколько может быть решений у системы линейных уравнений?
— Прямой ход алгоритма Гаусса
— Обратный ход алгоритма Гаусса

Тема «Операции над матрицами»

— Сумма матриц
— Нулевая матрица
— Произведение матрицы на число
— Произведение матриц
— Пример некоммутативности матричного умножения
— Коммутирующие матрицы
— Делители нуля
— Нильпотентные матрицы
— Транспонирование матриц
— Симметричная матрица
— След матрицы
— Блочное умножение матриц
— Умножение на диагональную матрицу
— Транспонирование от произведения матриц
— След от произведения матриц

Тема «Обратные матрицы. Матричные уравнения»

— Единичная матрица
— Обратная матрица
— Матрицы элементарных преобразований I, II, III типов и их обратные
— Подстановка матрицы в многочлен
— Матрицы, коммутирующие с диагональной матрицей с разными числами на диагонали
— Классификация систем линейных уравнений
— Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
— Эквивалентные условия обратимости матрицы
— Подстановка в многочлен матрицы $C^{-1}AC$
— Алгоритм поиска обратной и проверки обратимости
— Алгоритм решения уравнений $AX = B$

— Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
— Только квадратные матрицы обратимы

Тема «LU-разложение»

— LU-разложение

Тема «Векторные пространства»

— Векторное пространство
— Пример векторного пространства отличный от R^n или матриц
— Подпространство векторного пространства
— Линейная комбинация векторов
— Линейно независимый набор векторов
— Коллинеарные векторы
— Компланарные векторы
— Линейная оболочка системы векторов
— Порождающая система векторов
— Базис
— Размерность векторного пространства
— Координаты вектора в базисе
— Матрица перехода между базисами
— Критерий подпространства
— Достаточное условие линейной зависимости в n-мерном пространстве
— Три эквивалентных условия для базиса в n-мерном пространстве
— Критерий подпространства
— Совпадение размеров базисов
— Алгоритм выделения базиса из системы векторов
— Алгоритм выделения базиса из системы векторов
— Алгоритм дополнения линейно независимой системы до базиса

Тема «Определители матриц»

— Определители матрицы 2 на 2 и 3 на 3
— $i\,j$-ый минор матрицы
— $i\,j$-ое алгебраическое дополнение матрицы
— Невырожденная матрица
— Присоединённая матрица
— Формула разложения определителя по строке
— Изменение определителя при элементарных преобразованиях
— Определитель транспонированной матрицы
— Определитель произведения матриц
— Критерий обратимости в терминах определителя
— Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц
— Связь линейной зависимости и определителя
— Линейность определителя по строке
— Метод Крамера
— Определитель обратной матрицы
— Явные формулы обратной матрицы (через алгебраические дополнения)
— Определитель произведения матриц
— Критерий обратимости в терминах определителя
— Метод Крамера
— Определитель обратной матрицы
— Явные формулы обратной матрицы
— Определитель Вандермонда

Тема «Фундаментальная система решений»

— Строчный ранг матрицы
— Базисный минор

— Фундаментальная система решений
— Тривиальная оценка на ранг матрицы
— Теорема о базисном миноре
— Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
— Размерность пространства решений однородной системы
— Связь решений однородной и неоднородной системы
— Теорема Кронекера-Капелли
— Размерность ФСР
— Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
— Теорема Кронекера-Капелли

Тема «Сумма и пересечение подпространств»

— Пересечение подпространств
— Пример, когда объединение подпространств — не подпространство
— Сумма подпространств
— Прямая сумма двух подпространств
— Теорема о неполном базисе
— Связь размерности суммы и пересечения подпространств (Формула Грассмана)
— Алгоритм поиска ФСР
— Алгоритм поиска скелетного разложения

Примерные вопросы для семинаров (основной уровень)

1 семестр

Системы линейных уравнений

1. Что такое матрица системы линейных уравнений и как она связана с записью уравнений в матричном виде?
2. Опишите процесс элементарных преобразований и объясните, как они приводят к ступенчатому виду матрицы.
3. Как определить главные и свободные неизвестные в системе после приведения к ступенчатому виду?
4. Приведите пример системы, где алгоритм Гаусса показывает, что она имеет бесконечно много решений, и объясните почему.
5. В чём разница между ступенчатым и улучшенным ступенчатым видом матрицы? Покажите на примере.
6. Объясните связь между множеством решений неоднородной системы линейных уравнений (СЛУ) и соответствующей однородной системой (ОСЛУ).
7. Может ли широкая однородная система иметь только нулевое решение? Обоснуйте ответ с помощью понятия ранга.
8. Решите систему уравнений методом Гаусса и определите её общее решение.
9. Как элементарные преобразования влияют на множество решений системы?
10. Докажите, что если однородная система имеет ненулевое решение, то она имеет бесконечно много решений.

Матричный формализм

1. Перечислите основные свойства матричных операций (сложение, умножение) и приведите примеры их применения к системам линейных уравнений.

2. Что такое обратимость матрицы и как её проверить с помощью элементарных преобразований?
3. Опишите шесть эквивалентных определений невырожденности матрицы и объясните их следствия.
4. Как найти LU-разложение матрицы и зачем оно используется при решении систем?
5. Приведите пример массового решения систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
6. Как использовать метод Гаусса для поиска обратной матрицы? Покажите на матрице 2x2.
7. Объясните блочные формулы умножения матриц и их применение в вычислениях.
8. Что такое полиномиальное исчисление от матриц и как оно связано с существованием многочлена, зануляющего матрицу?
9. Опишите метод восстановления главных переменных через множество решений системы.
10. Как оценить степень минимального многочлена матрицы и почему она не может быть больше размера матрицы?

Перестановки

1. Что такое перестановка на множестве из n элементов и как её можно задать с помощью таблицы или цикла?
2. Объясните, как вычислить произведение двух перестановок, и приведите пример ассоциативности.
3. Что такое тождественная перестановка и как найти обратную к данной перестановке?
4. Опишите понятие цикла в перестановке и способы его задания (например, для перестановки (1 3 2)).
5. Как вычислить число инверсий в перестановке и что такое декремент?
6. Что такое знак перестановки и как его определить с помощью инверсий?
7. Докажите теорему о согласованности знака перестановки с произведением.
8. Приведите пример перестановки с чётным и нечётным знаком и объясните, как это влияет на определитель.
9. Как переименование элементов влияет на представление перестановки?
10. Решите задачу: найдите знак перестановки для (1 4 2 3) и объясните шаги.

Определители

1. Что такое определитель квадратной матрицы и как вычислить его для матриц порядка 2 и 3?
2. Как изменяется определитель при транспонировании матрицы?
3. Объясните поведение определителя, если матрица имеет строку или столбец из нулей.
4. Что происходит с определителем, если строку (столбец) умножить на число или разложить в сумму?
5. Почему определитель равен нулю, если две строки (столбца) одинаковы?
6. Как влияет прибавление к строке другой, умноженной на число, на значение определителя?
7. Опишите, как перестановка двух строк меняет знак определителя.

8. Вычислите определитель верхнетреугольной матрицы и объясните общую формулу.
9. Что такое алгебраические дополнения и как их использовать для разложения определителя по строке?
10. Приведите формулу Крамера для решения системы и объясните её связь с определителем.

Векторные пространства

1. Что такое векторное пространство и подпространство? Приведите примеры.
2. Объясните понятия линейной комбинации, линейной зависимости и независимости векторов.
3. Что такое порождающая система и линейная оболочка подмножества?
4. Перечислите три эквивалентных определения базиса векторного пространства.
5. Как определить размерность векторного пространства и что такое конечномерные пространства?
6. Опишите процесс смены координат при переходе от одного базиса к другому с помощью матрицы перехода.
7. Почему множество решений однородной системы является подпространством?
8. Что такое сумма двух подпространств и как связаны их размерности с пересечением?
9. Объясните понятие аффинного пространства и реперов для задания координат.
10. Определите взаимное расположение двух подпространств (например, параллельность или пересечение).

Ранги

1. Что такое ранг конечной системы векторов и как он связан с размерностью линейной оболочки?
2. В чём разница между строчным и столбцовым рангом матрицы?
3. Объясните, почему ранг не изменяется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.
4. Что такое базисный минор и как его размер связан с рангом матрицы?
5. Приведите пример матрицы ранга 0 и ранга 1, и объясните их свойства.
6. Как вычислить ранг матрицы с помощью приведения к ступенчатому виду?
7. Может ли ранг системы векторов превышать число векторов? Обоснуйте.
8. Свяжите ранг матрицы с существованием решений системы линейных уравнений.
9. Что происходит с рангом при транспонировании матрицы?
10. Решите задачу: найдите ранг матрицы и объясните, почему он равен определённому значению.

Линейные отображения

1. Что такое линейное отображение и изоморфизм между векторными пространствами?
2. Объясните операции на линейных отображениях и почему они образуют векторное пространство.
3. Как построить матрицу линейного отображения относительно базиса?

4. Опишите процесс замены матрицы отображения при смене базисов.
5. Что такое образ и ядро линейного отображения, и как они связаны с инъективностью и сюръективностью?
6. Докажите, что размерность образа плюс размерность ядра равна размерности области определения.
7. Как классифицировать линейные отображения (инъективные, сюръективные, биективные)?
8. Что такое двойственное пространство V* и двойственный базис?
9. Приведите пример проекции и объясните формулу «БАБА».
10. Свяжите ранг произведения матриц с рангами сомножителей.

Билинейные и квадратичные формы

1. Что такое билинейная форма и как её представить в матричном виде?
2. Как определить ранг билинейной формы и что он означает?
3. Объясните понятия левых и правых ортогональных дополнений, и ядер формы.
4. Когда билинейная форма называется невырожденной? Свяжите это с размерностями ядер.
5. Как разложить пространство в прямую сумму относительно билинейной формы?
6. Приведите пример симметричной билинейной формы и её матрицы.
7. Что такое квадратичная форма и как она связана с билинейной?
8. Как найти канонический вид квадратичной формы?
9. Объясните, как ортогонализация применяется к билинейным формам.
10. Решите задачу: классифицируйте билинейную форму по её матрице и найдите ранг.

Примерные задания по контрольной работе

1. Реши систему $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Выпиши базис решений (ФСР) соответствующей однородной системы $A\mathbf{x} = 0$;
   Найди решения неоднородной системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   Запиши решения неоднородной СЛУ через ФСР, через базис, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Дана матрица $A \in$ M3 3(R).

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Найди LU-разложение для A.
2. Найди разложение A в произведение элементарных матриц.
3. Найди определитель матрицы A.

4. Запиши матрицу линейного оператора поворота на 30 градусов в R^2.
5. В пространстве R^3 заданы векторы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   1. Проверь, что $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ формируют базис в R^3.
   2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.
   3. Найди координаты векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$.
6. Проверь, является ли отображение линейным. φ: $R[x]_{\leqslant 4} \to R[x]_{\leqslant 4}$, где
   $\varphi(f) = f' + f(2) - fg + (fh)'$
   $g = 2 + x + x^4$, $h = x + x^2$
7. Посчитай определитель матрицы $A \in M_{n\ n}(R)$:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

Примерные домашние задания

Домашнее задание

ЗАДАЧА 1

Вычислить определители матрицы:

1. $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

ЗАДАЧА 2

Доказать, что определитель

$$\det \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & a \\ z_2 & \bar{z}_2 & b \\ z_3 & \bar{z}_3 & c \end{pmatrix},$$

где z_1, z_2, z_3 — комплексные, а a, b, c — вещественные числа, является чисто мнимым числом.

ЗАДАЧА 3

Доказать равенство

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧА 4

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

выписать все перестановки σ, для которых соответствующее слагаемое в определителе не равно нулю.
Для каждой такой перестановки найдите произведение соответствующих ей элементов и знак переста-

новки.

ЗАДАЧА 5

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

посчитать определитель.

ЗАДАЧА 6

Приведением к треугольному виду вычислить определитель

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Домашнее задание

ЗАДАЧА 1 **1.5 балл**

Является ли следующее отображение билинейным:

$$\beta\colon\ \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$(X,Y) \mapsto \det(X)\,\mathrm{tr}\big(YX^{-1}\big) + \mathrm{tr}(XY)$$

ЗАДАЧА 2 **1.5 балл**

Пусть билинейная форма $\beta\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задана по правилу $\beta(x,y) = x^T By$, где

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите матрицу билинейной формы β в следующем базисе:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧА 3 **1.5 балл**

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы билинейная форма β и линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ по правилам $\beta(x,y) = x^t By$ и $\varphi(x) = Ax$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдите матрицу билинейной формы $\gamma(x,y) = \beta(\varphi(x), \varphi^{-1}(y))$ в стандартном базисе.

ЗАДАЧА 4 **1.5 балл**

В пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ задана билинейная форма $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ по правилу $\beta(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.

Найдите матрицу этой формы в базисе $1, x, x^2$.

ЗАДАЧА 5 **2 балл**

Для фиксированных матриц $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ рассмотрим билинейную форму

$$\begin{aligned}\beta\colon\ \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}\\ (X,Y) &\mapsto \operatorname{tr}(AXY)\end{aligned}$$

Найдите ранг β.

ЗАДАЧА 6 **2 балл**

Пусть билинейная форма β задана следующим образом

$$\begin{aligned}\beta\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} &\to \mathbb{R}\\ (f,g) &\mapsto f(1)\int\limits_{0}^{1} g(t)\,dt\end{aligned}$$

Найдите ранг β.

Домашнее задание

ЗАДАЧА 1 **1.5 балл**

Пусть задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 & 5\\ 1 & -2 & 6 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -4 & 3 & -6\\ 2 & -1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис для пространства

$$U = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$$

и определите его размерность.

ЗАДАЧА 2 **1.5 балл**

В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы векторы

$$f_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix}-3\\6\\-1\end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

1. Проверьте, что f_1, f_2, f_3 является базисом в $\mathbb{R}^3$.
2. Найдите матрицу перехода от стандартного базиса e_1, e_2, e_3 к базису f_1, f_2, f_3 и матрицу перехода в обратном направлении.
3. Найдите координаты векторов v_1 и v_2 в базисе f_1, f_2, f_3.

ЗАДАЧА 3 **1 балл**

Рассмотрим в качестве векторного пространства $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Проверить, что заданный вектор лежит в указанной линейной оболочке и найти его координаты в указанном базисе.

1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ в базисе $\{\sin(x), \cos(x)\}$.
2. $\frac{2}{x^3-6x^2+11x-6}$ в базисе $\left\{\frac{1}{x-1}, \frac{1}{x-2}, \frac{1}{x-3}\right\}$.

ЗАДАЧА 4 **1.5 балл**

В пространстве $\mathbb{R}[x]$ заданы многочлены:

$$\begin{aligned} f_1 &= -x^3 + x^2 + 2x + 1,\\ f_2 &= 2x^3 + 2x^2 + x - 1,\\ f_3 &= -3x^3 - x^2 + x + 2,\\ f_4 &= 3x^3 + 5x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

Пусть $U = \langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle$. Определите $\dim U$.

ЗАДАЧА 5 **1.5 балл**

Доказать, что система матриц E_1, E_2, E_3, E_4 образует базис пространства $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Построить другой базис этого пространства так, чтобы ни одна из его матриц не была линейной комбинацией каких-либо двух матриц E_1, E_2, E_3, E_4.

$$E_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

ЗАДАЧА 6 **1 балл**

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 8 & -2 & 5\\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

найдите скелетное разложение.

ЗАДАЧА 7 **2 балл**

Проверить лежит ли подпространство U внутри подпространства W, где

1. $U = \left\langle \begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle,\quad W = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$
2. $U = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}\right\rangle,\quad W = \left\{y \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 6 & -9 & 3\end{pmatrix} y = 0\right\}$
3. $U = \left\{y \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix} y = 0\right\},\quad W = \left\{y \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ -8 & -3 & 7\end{pmatrix} y = 0\right\}$

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) 1 семестр

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Найди ранг матрицы: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$	1	ПК-1
2.	Найди ранг системы векторов в $\mathbb{R}^2$: $$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$	2	ПК-1
3.	Найди след обратной матрицы A^{-1} к $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$	4	ОПК-1
4.	Найди собственные значения матрицы A^2, если $$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$ В ответ выпиши два числа в порядке возрастания через точку с запятой и без пробелов.	1;9	ОПК-4
5.	Найди сумму элементов матрицы X: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$ В ответ выпиши искомую сумму.	13	ПК-1
6.	Найди косинус угла между векторами: $$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	0,5/0.5	ПК-1

7.	Вычисли $tr(A) + tr(B) + det(A)$, если : $$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$	20	ПК-1
8.	Вычисли скалярное произведение векторов **u** и **v**, если известно, что $\|\mathbf{u}\| = 10$, $\|\mathbf{v}\| = 7$ и угол между ними равен 60◦.	35	ПК-1
9.	Дана матрица A. Найди её определитель: $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$	1	ОПК-4
10.	Найди размерность пространства решения уравнения: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.	2	ПК-1
11.	Найди собственные значения и собственные вектора матрицы A, если $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$ В ответ выпиши собственные значения через точку с запятой, в порядке возрастания, без пробелов.	0;2	ОПК-1
12.	Реши систему линейных уравнений $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$ В ответ выпиши решение x_1,x_2 через точку с запятой и без пробелов.	2;1	ПК-1