ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**
**«Математический анализ. Часть 3»**

**Направление подготовки:** *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

**Направленность (профиль) подготовки:** *Разработка*

**Квалификация (степень) выпускника:** *бакалавр*

**Форма обучения:** *очная*

**Срок освоения программы:** *4 года*

**Год набора:** *2025*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

**Москва**
**2025**

**Содержание**

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** ..... 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** ..... 5
3. **Тематический план** ..... 7
4. **Содержание дисциплины (модуля)** ..... 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** ..... 9
6. **Материально-техническое обеспечение** ..... 9
7. **Методические и оценочные материалы** ..... 11

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математический анализ. Часть 3» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Разработка», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Математический анализ. Часть 3» позволяет исследовать и решать сложные прикладные задачи, где простые одно-мерные методы оказываются недостаточными, тем самым повышая их профессиональную компетентность и конкурентоспособность на научном и отраслевом рынках труда.

**Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Разработка» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин (модулей): «Математический анализ. Часть 1», «Математический анализ. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» или «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 1», «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2».

**Цель изучения дисциплины (модуля):** формирование у студентов знаний анализа функций нескольких переменных, интегральных и дифференциальных методов в многомерных пространствах, а также подготовить их к самостоятельному использованию этих инструментов при решении задач в математической физике, геометрии, экономике и компьютерных науках.

**Задачи изучения дисциплины (модуля)**:

- изучить дифференциальное исчисление функций нескольких переменных;
- оценить Сходимость и свойства функций, задаваемых рядами;
- освоить разложения в ряд Фурье и их обобщения;
- изучить основы многомерного дифференциального анализа на многообразиях;
- развивать навыки математической доказательности и построения моделей.

**В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:**

***знать:***

- основные свойства и условия сходимости рядов фурье;
- классификацию особенностей и характер поведения интегралов с параметрами;
- связь между преобразованием фурье и свёрткой, а также с линейными дифференциальными уравнениями;

***уметь:***

- строить и исследовать ряды фурье для периодических функций, в том числе с разрывами;
- применять критерии равномерной, абсолютной и точечной сходимости рядов фурье;
- вычислять интегралы с параметрами и проверять условия корректности перестановки пределов (лейбниц, теорема фубини и др.);
- выполнять прямое и обратное преобразование фурье для типичных функций**;**

***владеть:***

— навыками аналитического разложения функций в ряды фурье и применения ортогональных базисов;

— методикой анализа параметрически заданных интегралов, в том числе с осциллирующими и особенными ядрами;

— навыками использования преобразования фурье для анализа частотных характеристик сигналов.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

| Компетенция | Содержание компетенции | Индикатор компетенции | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| УК-1. | Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1. | Знает методы поиска и анализа информации в области разработки, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности. |
| | | УК-1.2. | Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем |
| | | УК-1.3. | Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации |
| УК-2. | Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений | УК-2.1. | Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач |
| | | УК-2.2. | Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения |
| | | УК-2.3. | Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями |
| ОПК-1. | Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики | ОПК-1.1. | Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области |
| | | ОПК-1.2. | Умеет анализировать и формулировать математические задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | доступной форме |
| | | ОПК-1.3. | Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи |
| ПК-1. | Способен определять общие формы и закономерности области машинного обучения | ПК-1.1. | Знает основные теоретические концепции и принципы, относящиеся к области машинного обучения, а также ключевые закономерности и модели, которые помогают в анализе и интерпретации данных |
| | | ПК-1.2. | Умеет проводить систематический анализ области разработки, выявлять и формулировать общие закономерности и тенденции, а также применять методы исследования для получения новых знаний и понимания |
| | | ПК-1.3. | Имеет практический опыт работы в области машинного обучения, включая участие в научных проектах, исследованиях или практических заданиях, где были выявлены и описаны общие формы и закономерности |
| ПК-2. | Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области разработки, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности | ПК-2.1. | Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности |
| | | ПК-2.2. | Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности |
| | | ПК-2.3. | Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области разработки, включая соблюдение норм информационной безопасности |

## 3. Тематический план

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Трудоемкость, академические часы | | | | ТКУ (текущий контроль успеваемости) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Очная форма* | | | | |
| | | Аудиторная работа | | Контроль | Самостоятельная работа | |
| | | Лекции | Семинары | | | |
| 1. | Ряды Фурье. Элементы функционального анализа | 14 | 14 | 2 | 60 | Домашнее задание Контрольная работа |
| 2. | Интегралы, зависящие от параметра и специальные функции | 16 | 16 | 4 | 60 | Домашнее задание Контрольная работа Коллоквиум |
| | ***Зачет с оценкой*** | | | 4 | | Итоговая работа |
| | ***Итого:*** | ***30*** | ***30*** | ***10*** | ***120*** | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)*** | | ***190*** | | | | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)*** | | ***5*** | | | | |

## 4. Содержание дисциплины (модуля)

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Содержание дисциплины (модуля) по темам |
|---|---|---|
| 1. | Ряды Фурье. Элементы функционального анализа | Элементы функционального анализа: метрические пространства, нормированные пространства<br>Элементы функционального анализа: евклидовы пространства<br>Ряды Фурье по ортогональным системам. Тригонометрические ряды Фурье<br>Сходимость тригонометрического ряда Фурье<br>Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических<br>Приближение функций многочленами и тригонометрическими многочленами<br>Полнота системы функций<br>Различные виды сходимости ряда Фурье |
| 2. | Интегралы, зависящие от параметра и специальные функции | Определённый интеграл с параметром<br>Несобственный интеграл с параметром: равномерная сходимость<br>Непрерывность интеграла с параметром. Интегрирование и дифференцирование интеграла по параметру. Часть 1<br>Непрерывность интеграла с параметром. Интегрирование и дифференцирование интеграла по параметру. Часть 2<br>B-функция и Г-функция Эйлера<br>Интеграл Фурье<br>Преобразование Фурье. Свертка |

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

***Основная литература:***

1. Пантелеев, А. В. Математический анализ : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Н. И. Савостьянова, Н. М. Федорова. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 502 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1077332. - ISBN 978-5-16-016008-5. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/1898119

2. Математический анализ : учебное пособие / О.И. Воронин, В. А. Жулего, С. М. Демидов [и др.]. ; под ред. А. М. Попова. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. - 224 с. - ISBN 978-5-9729-1720-4. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2171787

***Дополнительная литература:***

1. Пергунов, В. В. Математический анализ: расширенный курс лекций : курс лекций / В. В. Пергунов. – 2-е изд., стер. – Москва : ФЛИНТА, 2025. – 224 с. – ISBN 978-5-9765-5743-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2216038

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том

числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

| № | Наименование портала (издания, курса, документа) | Ссылка |
|---|---|---|
| 1. | Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека | https://elibrary.ru/defaultx.asp |
| 2. | База данных для IT-специалистов | https://habr.com |
| 3. | База данных ScienceDirect | https://www.sciencedirect.com |
| 4. | Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации | https://minobrnauki.gov.ru/ |
| 5. | Федеральный портал «Российское образование" | https://www.edu.ru/ |
| 6. | Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" | http://window.edu.ru/ |
| 7. | Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов | http://school-collection.edu.ru/ |
| 8. | Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов | http://fcior.edu.ru/ |

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

| Наименование ПО | Производство | Лицензионное / свободно распространяемое |
|---|---|---|
| **Операционные системы:** | | |
| Microsoft Imagine (Windows Client, Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Браузеры:** | | |
| Яндекс.Браузер | отечественное | свободно распространяемое |
| Google Chrome | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Офисные приложения:** | | |
| Microsoft Imagine (Visio, OneNote) | зарубежное | лицензионное |
| TeXstudio | зарубежное | свободно распространяемое |
| Adobe Acrobat Reader | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Программное обеспечение для планирования и учета времени:** | | |
| Toggle app | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления проектами:** | | |
| Microsoft Imagine (Project) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы управления базами данных:** | | |
| Microsoft Imagine (SQL Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы резервного копирования (backup):** | | |
| Acronis Backup Advanced for HyperV | зарубежное | лицензионное |
| **Справочно-правовые системы:** | | |
| КонсультантПлюс: справочно-правовая система | отечественное | лицензионное |
| **Средства антивирусной защиты:** | | |
| Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition | отечественное | лицензионное |
| **Среды разработки:** | | |
| Visual Studio Code | зарубежное | свободно распространяемое |
| Bash (Unix shell) | зарубежное | свободно распространяемое |
| Anaconda | зарубежное | свободно распространяемое |
| Robotic Operating System | зарубежное | свободно распространяемое |

| | | |
|---|---|---|
| CopelliaSim | зарубежное | свободно распространяемое |
| Google Colaboratory | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Пакеты программных средств и библиотек:** | | |
| AutoPsy | зарубежное | свободно распространяемое |
| Interactive Disassembler (IDA) | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления библиографической информацией:** | | |
| Zotero | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Сервисы и службы:** | | |
| Bind | зарубежное | свободно распространяемое |
| Docker | зарубежное | свободно распространяемое |

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математический анализ. Часть 3» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, домашние задания, контрольные работы, коллоквиум, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Семинар* — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал, использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Коллоквиум* – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные

конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

## Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Математический анализ. Часть 3»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

| **Десятибалльная оценка** | **Пятибалльная оценка** | **Оценка за зачет** | **Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)** |
|---|---|---|---|
| 10 | Отлично | Зачтено | Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами. |
| 9 | Отлично | Зачтено | |
| 8 | Отлично | Зачтено | |
| 7 | Хорошо | Зачтено | Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на |
| 6 | Хорошо | Зачтено | |

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| | | | наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами. |
| 5 | Удовлетворительно | Зачтено | Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования. |
| 4 | Удовлетворительно | Зачтено | |
| 3 | Не сдан | Не зачтено | Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы. |
| 2 | Не сдан | Не зачтено | |
| 1 | Не сдан | Не зачтено | |

Дисциплина (модуль) «Математический анализ. Часть 3» оценивается следующим образом:

| Активность | Вес | Количество | Описание |
|---|---|---|---|
| Домашнее задание | 15% | 14 | Форма проверки знаний, при которой студент отвечает на вопросы преподавателя в устной форме, демонстрируя свои знания и понимание темы |
| Коллоквиум | 20% | 1 | Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее |
| Контрольная работа | 30% | 2 | Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время |
| Зачет с оценкой | 35% | 1 | Итоговая работа - письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время, возможен дополнительный устный экзамен |

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Математический анализ. Часть 3»:** «0,15× среднее за домашнее задание + 0,2 ×коллоквиум + 0,3 × среднее за контрольные работы + 0,35 × зачет с оценкой».

**Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)**

**Примерные домашние задания**

1. **Коэффициенты Фурье** – для функции

$f(x)=\{0,1,-\pi\le x<0,0\le x\le\pi,$

запишите её 2\pi\)-периодическое продолжение, найдите коэффициенты \(a_{n},b_{n} и запишите ряд Фурье. Проверьте полученный ряд в точке разрыва (теорема Дирихле).

2. **Сходимость ряда Фурье** – докажите, что если $f\in C1(R)$ и периодична, то её ряд Фурье сходится к $f$ равномерно на R. Оформите доказательство, используя интеграл Дирихле и оценку остаточного члена.

3. **Прямое и обратное преобразование Фурье** – найдите прямое преобразование Фурье функции

$g(t)=t2+a21,a>0,$

а затем полученный образ верните обратно, проверив формулу Параллель-Поля (парсевская теорема).

4. **Интеграл с параметром** – вычислите

$I(\alpha)=\int 0\infty x2+1\cos(\alpha x)dx,\alpha\in R,$

используя теорему о дифференцировании под знаком интеграла (правило Лейбница) и известный интеграл $\int 0\infty e-x\cos(\beta x)dx$.

5. **Фубини и перестановка пределов** – покажите, что при $\Re p>0$, $\Re q>0$ справедливо

$\int 0\infty\int 0\infty xp-1yq-1e-(x+y)dxdy=\Gamma(p)\Gamma(q)=\int 0\infty tp+q-1e-tdt.$

Обоснуйте возможность менять порядок интегрирования (теорема Фубини).

6. **Резидуа и параметрический интеграл** – при помощи метода вычетов найдите

$J(a)=\int -\infty\infty x2+b2eiaxdx,a,b>0.$

Укажите, какие полюса учитываются, и выведите окончательную формулу.

7. **Применение Фурье к краевой задаче** – решите задачу Дирихле на отрезке $[0,\pi]$ для уравнения

$u''(x)+\lambda u(x)=f(x),u(0)=u(\pi)=0,$

где $f(x)=x(\pi-x)$. Представьте решение в виде ряда синусов Фурье и найдите коэффициенты $\lambda$, при которых решение существует.

**Примерные задания для коллоквиума**

1. Перечислите три базовых свойства коэффициентов Фурье (через запятую).
2. Как называется условие, обеспечивающее равномерную сходимость ряда Фурье к функции в точке разрыва? (одно слово)
3. Запишите формулу преобразования Фурье для функции $f\in L1(R)$.
4. Как называется теорема, позволяющая менять порядок интегрирования в двойном интеграле при абсолютной сходимости? (одно слово)
5. Что такое «резидуум» в контексте интегралов Фурье? (одно слово)
6. Укажите тип сингулярности функции $\Gamma(z)$ в точке $z=0$. (одно слово)
7. Как называется связь между преобразованием Фурье и свёрткой? (одно слово)
8. Какой принцип гарантирует, что $\|Ff\|L2=\|f\|L2$? (одно слово)
9. Запишите условие (коротко), при котором можно дифференцировать под знаком интеграла $F(\alpha)=\int abf(x,\alpha)dx$.
10. Назовите физический закон, который часто выводят из уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье. (одно слово)

**Примерные задания для контрольной работы**

1. **Ряды Фурье**

а) Для функции $f(x)=|x|$ на $[-\pi,\pi]$ найдите коэффициенты $a0,an,bn$.

б) Укажите, к чему сходится ряд в точке $x=0$ и объясните, почему (теорема Дирихле).

2. **Сходимость и оценка**

а) Доказать, что если $f$ непрерывна и кусочно-гладка, то ряд Фурье сходится к $f$ равномерно.

б) Вывести неравенство Парсеваля для частичных сумм ряда Фурье и пояснить его смысл.

3. **Интегралы с параметром**

а) Вычислить $I(\lambda)=\int 0\infty 1+xx\lambda-1dx$ при $\Re\lambda\in(0,1)$ (использовать бета-функцию).

б) Объяснить, при каких условиях можно переставить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int 0\infty\int 0\infty e-(x+y)xp-1yq-1dxdy$.

4. **Фурье-преобразование и резидуа**

а) С помощью метода вычетов найдите $J(\omega)=\int -\infty\infty x2+a2ei\omega xdx$, $a>0$.

б) Приведите формулу обратного преобразования и проверьте, что $F-1\{J(\omega)\}=\pi e-a|x|/a$.

5. **Применение к краевой задаче**

а) Решить задачу Дирихле для уравнения $u''(x)-u(x)=\sin 2x$ на $[0,\pi]$, используя разложение $u(x)=n=1\sum\infty cn\sin nx$.

б) Вычислить первые три коэффициента $cn$ и написать приближённую форму решения.

6. **Дополнительный вопрос (по выбору)**

– Оценить размер остаточного члена ряда Фурье функции $f(x)=x2$ после N\)-х членов и указать, как быстро растёт порядок сходимости при увеличении \(N.

**Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

| № п/п | Задание | Ответ | Компетенция |
|---|---|---|---|
| 1 | Перечислите аксиомы, определяющие метрическое пространство. | Неотрицательность, симметрия, неравенство треугольника | УК-1 |
| 2 | Благодаря какому свойству системы функций находятся коэффициенты Фурье? | Ортогональность / Ортонормированность | ОПК-1 |
| 3 | Какие требования признака Дирихле гарантируют сходимость ряда? | Кусочно-гладкость / Ограниченная вариация | ОПК-1 |
| 4 | Как классифицируются виды сходимости функциональных последовательностей? | Поточечная, равномерная, в среднем | УК-1 |
| 5 | Что связывает равенство Парсеваля в контексте нормы функции? | Норма функции и сумма квадратов коэффициентов | ОПК-1 |
| 6 | В каком методе анализа данных используется спектральное разложение? | PCA / Анализ главных компонент | ПК-1 |
| 7 | Запишите интегральное определение преобразования Фурье. | F(ω)=∫f(t)e^{-iωt}dt | ОПК-1 |
| 8 | Чему равно преобразование Фурье от свертки двух функций? | Произведению преобразований | ОПК-1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | Какое ограничение накладывается на функцию для существования интеграла Фурье? | Абсолютная интегрируемость / $L^1$ | УК-2 |
| 10 | При каком условии допускается дифференцирование интеграла по параметру? | Равномерная сходимость производной подынтегральной функции | ОПК-1 |
| 11 | Какое свойство интеграла гарантирует непрерывность предельной функции? | Равномерная сходимость интеграла | ОПК-1 |
| 12 | Каким несобственным интегралом задается Гамма-функция? | ∫₀^∞ x^{z-1}e^{-x}dx | ОПК-1 |
| 13 | Выразите B-функцию через Гамма-функции Эйлера. | B(p,q)=Γ(p)Γ(q)/Γ(p+q) | ОПК-1 |
| 14 | Какие программные пакеты применяются для символьного вычисления рядов? | SymPy / Mathematica / Maple | ПК-2 |
| 15 | Что означает полнота ортогональной системы в гильбертовом пространстве? | Равенство нулю функции, ортогональной всей системе | ОПК-1 |
| 16 | В каких пределах берется интеграл для Эйлерова интеграла первого рода? | От 0 до 1 | УК-2 |
| 17 | Как преобразование Фурье интерпретируется в обработке сигналов? | Переход из временной области в частотную | ПК-1 |
| 18 | Какое уравнение математической физики решается методом Фурье? | Уравнение теплопроводности / Волновое | ОПК-1 |
| 19 | Какой метод суммирования использует средние арифметические частичных сумм? | Метод Фейера | УК-1 |
| 20 | Как определяется норма в пространстве интегрируемых функций $L^2$? | Корень из интеграла квадрата модуля функции | ОПК-1 |