Материалы для проведения
заключительного этапа

LII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2025–2026 учебный год

Второй день

**Москва,
14–20 апреля 2026 года**

Москва, 2026

9 класс

Второй день

9.5. У Кати есть $2n$ катушек с лентами (n — натуральное число). Изначально на катушках намотано $1^2, 2^2, \ldots, (2n)^2$ дециметров ленты соответственно. Каждый час Катя выбирает натуральное число i и отрезает по i дециметров ленты от всех катушек, на которых осталось не менее i дециметров ленты. Через некоторое время все катушки, на которых изначально было нечётное количество дециметров ленты, оказались пустыми. Докажите, что в этот момент длина оставшейся ленты на каждой из остальных катушек меньше $4n$ дециметров.

Решение. Рассмотрим две катушки K_1 и K_2, на которых изначально было соответственно $(2k-1)^2$ и $(2k)^2$ дм ленты, где $k = 1, \ldots, n$. Если ленту с этих катушек всегда отрезали одновременно, то с K_2 было срезано $(2k-1)^2$ дм, и длина оставшейся на ней ленты равна $(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k-1$ дм.

Если это не так, то рассмотрим самый первый момент, когда совершалась операция лишь с одной из этих двух катушек. Так как до этого момента ленту с этих катушек отрезали одновременно, то разница между их длинами до этой операции равна изначальной: K_2 содержит на $4k-1$ дм ленты больше, чем на K_1. Поэтому в наш момент Катя не может отрезать ленту только с K_1, то есть она должна отрезать ленту только с K_2, причём больше, чем осталось на K_1. Значит, после отрезания длина оставшейся на K_2 ленты станет меньше изначальной разности длин лент на этих катушках, то есть меньше $4k-1$ дм. При дальнейших же операциях длина ленты на K_2 увеличиваться не будет, то есть и в конце она не будет превосходить $4k-1$ дм.

Итак, в любом случае на K_2 останется не более $4k-1 \leqslant 4n-1$ дм ленты, что и требовалось.

9.6. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Из точки A опустили перпендикуляры AP и AQ на продолжения отрезков BO и CO за точку O. Окружность с центром T, проходящая через точки P и Q, касается отрезка BC. Докажите, что $TO \parallel BC$.

Решение 1. Заметим, что существует две окружности, проходящие через точки P и Q и касающиеся *прямой* BC; при этом точки их касания с BC лежат по разные стороны от прямой PQ. Поскольку эта прямая не пересекает отрезка BC, максимум одна из этих окружностей касается *отрезка* BC. Значит, окружность с центром T из условия определена однозначно; покажем, как построить её другим способом.

Пусть AH — высота в треугольнике ABC. Четырёхугольники $APHB$, $AQHC$ и $APOQ$ вписаны в окружности с диаметрами AB, AC и AO соответственно, поэтому

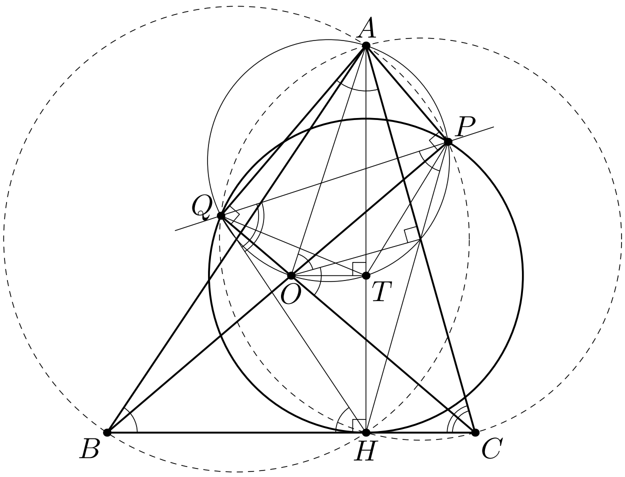
$$\angle HPQ = \angle HPA - \angle APQ = \angle HPA - \angle AOQ = (180^\circ - \angle ABC) - (180^\circ - 2\angle ABC) = \angle ABC;$$

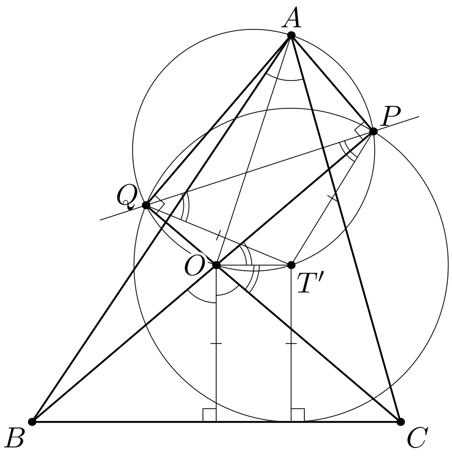
аналогично, $\angle QPH = \angle ACB$. Кроме того,

$$\angle QHB = \angle QAC = 90^\circ - \angle ACQ = \angle ABC = \angle HPQ,$$

то есть описанная окружность треугольника PQH касается отрезка BC. Значит, она и является окружность из условия.

Поскольку эта окружность касается BC, её центр T лежит на высоте AH. Теперь имеем $\angle PTQ = 2\angle PHQ = 2(180^\circ - \angle PQH - \angle QPH) = 2(180^\circ - \angle ACB - \angle ABC) = 2\angle BAC = \angle POQ$. Значит, точки T лежит на одной окружности с точками P, O и Q, то есть на окружности с диаметром AO, и потому $OT \perp AT$. Поскольку $BC \perp AT$, отсюда и следует, что $BC \parallel OT$.





Решение 2. Обозначим через R радиус описанной окружности треугольника ABC. Заметим опять же, что точки P и Q лежат на окружности ω с диаметром OA. Пусть T' — середина дуги POQ этой окружности. Тогда OT' — внешняя биссектриса угла POQ, а значит, и угла BOC. Поскольку $BO = OC$, эта биссектриса параллельна BC, то есть расстояния от O и T' до прямой BC равны, и оба равны $R\cos BAC$. С другой стороны, по теореме синусов имем $T'P = T'Q = R\sin T'PQ = R\cos(PT'Q/2) = R\cos(POQ/2) = R\cos BAC$, поэтому окружность γ с центром T' и радиусом $R\cos BAC$ проходит через P и Q и касается BC.

Пусть, не умаляя общности, $AB > AC$. Тогда $OP > OQ$, следовательно, луч PQ пересекается с лучом CB, а точка T' ближе к точке C, чем к точке B, поэтому окружность γ будет касаться луча BC. Как и в начале первого решения, можно получить, что такая окружность единственна, а значит, точка T' совпадает с T. При этом, как мы уже видели выше, $OT \parallel BC$.

9.7. Пусть n — нечётное натуральное число. Дана таблица $n \times n$. *Расстоянием* между двумя клетками таблицы назовём наименьшее число шагов, за которое можно добраться от одной клетки до другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку (так, расстояние между клетками, соседними по стороне, равно 1). R клеток таблицы окрашены в красный цвет, а другие B клеток — в синий. Известно, что любая прямая, соединяющая центры красной и синей клеток, не параллельна ни одной из диагоналей таблицы. Кроме того, расстояние между любыми красной и синей клетками не равно n. Докажите, что $\sqrt{R} + \sqrt{B} \leqslant n$.

Решение. Занумеруем строки сверху вниз, а столбцы слева направо числами от 1 до n; каждую клетку будем обозначать как (r, c), где r — номер её строки, а c — номер её столбца. Запишем в каждую клетку (r, c) остатки u и v от деления чисел $r + c$ и $r - c$ на n.

Предположим, что в клетках (r_1, c_1) и (r_2, c_2) записана одна и та же (упорядоченная) пара остатков. Это значит, что $r_1 + c_1 \equiv r_2 + c_2 \pmod n$ и $r_1 - c_1 \equiv r_2 - c_2 \pmod n$. Складывая и вычитая эти два сравнения, получаем $2r_1 \equiv 2r_2 \pmod n$ и $2c_1 \equiv 2c_2 \pmod n$, а поскольку n нечётно, то $r_1 \equiv r_2 \pmod n$ и $c_1 \equiv c_2 \pmod n$, то есть $r_1 = c_1$ и $r_2 = c_2$. Значит, в любых двух различных клетках написаны разные пары остатков.

Покажем теперь, что если в красной клетке (r_r, c_r) написаны остатки u_r, v_r, а в синей клетке (r_b, c_b) — остатки u_b, v_b, то $u_r \neq u_b$ и $v_r \neq v_b$. Предположим, что $u_r = u_b$. Числа $r_r + c_r$ и $r_b + c_b$ отличаются меньше, чем на $2n$; поскольку они дают одинаковые остатки при делении на n, они либо равны, либо отличаются на n. В первом случае прямая, соединяющая центры этих клеток, параллельна диагонали таблицы, что невозможно по условию. Во втором же, если, скажем, $r_r + c_r = r_b + c_b + n$, то $(r_r - r_b) + (c_r - c_b) = n$. Оба слагаемых меньше n, поэтому оба они положительны. Тогда это равенство означает, что расстояние между нашими клетками равно n, что также запрещено условием. Случай $v_r = v_b$ разбирается аналогично.

Пусть в красных клетках встречаются k остатков на первых местах и ℓ остатков на вторых; поскольку каждая пара остатков задаёт клетку однозначно, получаем

$$R \leqslant k\ell \leqslant \left(\frac{k+\ell}{2}\right)^2.$$

По доказанному, в синих клетках на первых местах могут встречаться лишь $n-k$ других остатков, а на вторых — лишь $n-\ell$ других остатков, то есть

$$B \leqslant (n-k)(n-\ell) \leqslant \left(\frac{(n-k)+(n-\ell)}{2}\right)^2 = \left(n - \frac{k+\ell}{2}\right)^2.$$

Значит,

$$\sqrt{R} + \sqrt{B} \leqslant \frac{k+\ell}{2} + \left(n - \frac{k+\ell}{2}\right) = n,$$

что и требовалось доказать.

9.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a, b и c. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ не является полным квадратом.

Решение 1. Предположим, что все три числа $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ являются полными квадратами. Пусть, не умаляя общности, $a < b < c$. При этом, по неравенству треугольника, $a+b > c$. Заметим, что числа $(ca+1)(cb+1)$ и $c^2(ab+1)$ являются полными квадратами, то есть $(ca+1)(cb+1) = x^2$ и $c^2(ab+1) = y^2$ для некоторых натуральных x и y. Разность $d = x^2 - y^2$ равна $c(a+b-c)+1$. Видим, что $d > 0$, а тогда $x \geqslant y+1$. Значит, $d \geqslant (y+1)^2 - y^2 = 2y+1 = 2c\sqrt{ab+1}+1$. Но тогда имеем

$$d \geqslant 2c\sqrt{ab+1}+1 > 2ac+1 > ac+1 > c(a+b-c)+1 = d,$$

то есть $d > d$. Противоречие.

Решение 2. Не умаляя общности, можно считать, что c — наибольшее из чисел. Предположим противное: пусть $ab+1 = z^2$, $ac+1 = y^2$, $bc+1 = x^2$, где x, y, z — натуральные числа. Тогда $x^2 < c^2+1$, откуда $x \leqslant c$. Аналогично, $y \leqslant c$. С другой стороны, $(x+y)^2 > x^2+y^2 > c(a+b) > c^2$ (здесь мы воспользовались неравенством треугольника). Значит, $x+y > c$. Отсюда следует, что $x+y > c \geqslant \max(x,y) > |x-y|$.

Заметим, что $(x^2-1)(y^2-1) = abc^2 = (z^2-1)c^2$. Преобразуя это равенство, получаем

$$(zc)^2 - c^2 = (x^2-1)(y^2-1) = (xy+1)^2 - (x+y)^2 = (xy-1)^2 - (x-y)^2.$$

Выше мы получили, что $x+y > c > |x-y|$. Тогда из полученных равенств следует, что $xy+1 > zc > xy-1$, а такое возможно только если $zc = xy$. Но, так как $x^2 = bc+1$, числа x и c взаимно просты, и аналогично y взаимно просто с c. Но xy кратно c, откуда $c = 1$. Это невозможно, поскольку c — максимальное из трёх различных натуральных чисел.

10 класс

Второй день

10.5. Существует ли выпуклый 201-угольник, в котором каждая диагональ перпендикулярна какой-то другой диагонали?

Ответ: Да, существует.

Решение. Возьмем правильный 202-угольник Q, выделим в нем вершину A. Нужный нам пример — 201-угольник P с вершинами во всех вершинах Q, кроме вершины A.

Действительно, любая диагональ d многоугольника P служит также диагональю в Q. Поэтому в Q имеется хотя бы 99 диагоналей направления, перпендикулярного d. Среди этих 99 диагоналей заведомо найдется диагональ P (точно подойдет любая из этих диагоналей, не проходящая через вершину A и соседние с ней вершины).

Замечание. На аналогичный вопрос для выпуклого n-угольника ответ положительный для всех $n \geqslant 4$ кроме $n = 5$. Для четных n примером является правильный n-угольник; при нечетных $n > 5$ — правильный $(n + 1)$-угольник с вычеркнутой вершиной (как в решении); также нетрудно показать, что требуемого 5-угольника не существует.

10.6. В стране ровно 1000 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что для любого натурального $k \leqslant 500$ выполнено следующее утверждение: «Если выбрать любое множество A из k городов, то найдётся хотя бы k городов, не принадлежащих A, каждый из которых соединён авиалинией хотя бы с одним городом из A». Какое наименьшее количество авиалиний может быть в этой стране?

Ответ: 250000.

Решение. Положим $n = 500$, так что в нашем графе $2m$ вершин.

Оценка. Докажем, что в нашем графе степени всех вершин хотя бы n. Отсюда будет следовать, что количество ребер не меньше $2n \cdot n/2 = n^2$.

Пойдём от противного: пусть у некоторой вершины v степень не больше $n - 1$. Тогда можно взять множество A из n вершин, каждая из которых не соединена с v. Для множества A условие не будет выполнено. Противоречие.

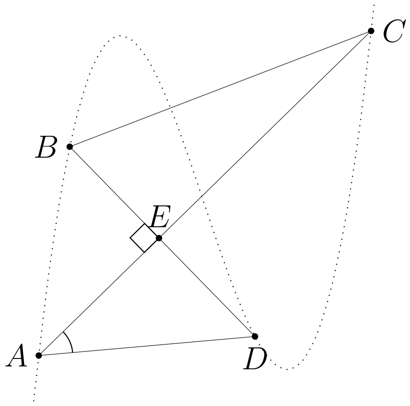
Пример. В качестве примера можно взять $K_{n,n}$ (полный двудольный граф на $2n$ вершинах с равными долями). Нетрудно проверить, что он удовлетворяет условию: если множество вершин A принадлежит одной доле, то любая из n вершин другой доли соединена с (любой) вершиной из A; если же в A есть вершины из обеих долей, то любая вершина, не лежащая в A, соединена хотя бы в одной вершиной из A (лежащей в противоположной доле).

10.7. На координатной плоскости вершины выпуклого четырехугольника имеют целые координаты и лежат на графике многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что если диагонали этого четырехугольника перпендикулярны, то они равны между собой.

Решение. *Лемма.* Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. На графике $y = P(x)$ взяты две различные точки A и B с целыми координатами. Тогда прямая AB либо параллельна горизонтальной прямой, либо образует с ней угол, не меньший 45°.

Доказательство. Пусть a и b — абсциссы точек A и B, тогда угловой коэффициент k прямой AB равен $\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$, что равно целому числу (как известно, $P(b) - P(a)$ делится на $b - a$ для любого многочлена с целыми коэффициентами P). В случае $k = 0$ прямая AB горизонтальная. Иначе $|k| \geqslant 1$, значит AB образует с горизонталью угол, не меньший 45°. $\square$

Перейдём к задаче. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, где $AC \perp BD$. Так как AC не вертикальная, то BD — не горизонтальная. Аналогично AC не горизонтальная. Произведение k_1k_2 угловых коэффициентов прямых AC и BD равно -1. Но согласно лемме $|k_i| \geqslant 1$. Значит, эти коэффициенты равны 1 и -1. Для определенности пусть AC параллельна прямой $y = x$, а BD — прямой $y = -x$.



Пусть $E = AC \cap BD$. Для определенности, пусть A и D расположены ниже E (а C и B — выше). Для определенности, пусть A не выше чем D. Тогда прямая AD образует с горизонталью угол $\varphi = 45^\circ - \angle EAD$. Поскольку $\varphi \in [0, 45^\circ)$, согласно лемме, имеем $\varphi = 0$, т.е. прямая AD горизонтальная. Аналогично показываем, что BC горизонтальная. Тем самым, $ABCD$ симметричен относительно вертикальной прямой, проходящей через E. Отсюда $AC = BD$.

10.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a, b и c. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ не является полным квадратом.

Решение 1. Предположим, что все три числа $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ являются полными квадратами. Пусть, не умаляя общности, $a < b < c$. При этом, по неравенству треугольника, $a+b > c$. Заметим, что числа $(ca+1)(cb+1)$ и $c^2(ab+1)$ являются полными квадратами, то есть $(ca+1)(cb+1) = x^2$ и $c^2(ab+1) = y^2$ для некоторых натуральных x и y. Разность $d = x^2 - y^2$ равна $c(a+b-c)+1$. Видим, что $d > 0$, а тогда $x \geqslant y+1$. Значит, $d \geqslant (y+1)^2 - y^2 = 2y+1 = 2c\sqrt{ab+1}+1$. Но тогда имеем

$$d \geqslant 2c\sqrt{ab+1}+1 > 2ac+1 > ac+1 > c(a+b-c)+1 = d,$$

то есть $d > d$. Противоречие.

Решение 2. Не умаляя общности, можно считать, что c — наибольшее из чисел. Предположим противное: пусть $ab+1 = z^2$, $ac+1 = y^2$, $bc+1 = x^2$, где x, y, z — натуральные числа. Тогда $x^2 < c^2+1$, откуда $x \leqslant c$. Аналогично, $y \leqslant c$. С другой стороны, $(x+y)^2 > x^2+y^2 > c(a+b) > c^2$ (здесь мы воспользовались неравенством треугольника). Значит, $x+y > c$. Отсюда следует, что $x+y > c \geqslant \max(x,y) > |x-y|$.

Заметим, что $(x^2-1)(y^2-1) = abc^2 = (z^2-1)c^2$. Преобразуя это равенство, получаем

$$(zc)^2 - c^2 = (x^2-1)(y^2-1) = (xy+1)^2 - (x+y)^2 = (xy-1)^2 - (x-y)^2.$$

Выше мы получили, что $x+y > c > |x-y|$. Тогда из полученных равенств следует, что $xy+1 > zc > xy-1$, а такое возможно только если $zc = xy$. Но, так как $x^2 = bc+1$, числа x и c взаимно просты, и аналогично y взаимно просто с c. Но xy кратно c, откуда $c = 1$. Это невозможно, поскольку c — максимальное из трёх различных натуральных чисел.

11 класс

Второй день

11.5. Саша поставил фишку в одну из точек координатной плоскости. За одну операцию разрешается переместить фишку, расположенную в точке с координатами (a_i, b_i), в другую точку (a_{i+1}, b_{i+1}), если уравнение прямой, соединяющей эти точки, имеет вид $y = a_i x + c_i$ (где i — номер операции). Может ли после нескольких таких операций фишка вернуться в исходную точку?

Ответ: не может.

Решение 1. Заметим, что если уравнение прямой, соединяющей точки (a_i, b_i) и (a_{i+1}, b_{i+1}) имеет вид $y = a_i x + c_i$, то $b_i = a_i^2 + c_i$ и $b_{i+1} = a_i a_{i+1} + c_i$. Вычтем одно равенство из другого:

$$b_i - b_{i+1} = a_i^2 - a_i a_{i+1}.$$

Пусть фишка побывала в точках $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), (a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_1, b_1)$. В силу сказанного выше, $b_i - b_{i+1} = a_i^2 - a_i a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь и далее считаем, что нумерация индексов ведётся по модулю n. Сложив все эти равенства, имеем:

$$0 = b_1 - b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 - a_i a_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{i+1}\right)^2.$$

Следовательно, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, а тогда первая и вторая точка маршрута фишки совпадают, противоречие.

Решение 2. Назовем *ценой* точки плоскости (a, b) значение $a^2 - 2b$. После перемещения из точки (a_1, b_1) в точку (a_2, b_2), где $b_1 - b_2 = a_1^2 - a_1 a_2$ и $a_1 \neq a_2$ цена новой точки будет больше, поскольку

$$a_2^2 - 2b_2 - (a_1^2 - 2b_1) = a_2^2 - a_1^2 + 2(a_1^2 - a_1 a_2) = (a_1 - a_2)^2 > 0.$$

Следовательно, в исходную точку фишка вернуться не может.

Замечание. У приведённого в условии процесса есть следующая интерпретация. Если паре чисел (a_1, b_1) сопоставить параболу Γ_{a_1, b_1}, задаваемую уравнением $y = x^2 + a_1 x + \frac{1}{2} b_1$, то парабола, соответствующая паре (a_2, b_2), выбирается проходящей через вершину параболы Γ_{a_1, b_1}. В этом процессе никакая парабола не повториться, поскольку ордината вершины у каждой следующей меньше, чем у предыдущей.

11.6. На доску выписаны 2026 попарно различных натуральных чисел, больших 1. Оказалось, что для любого выписанного числа a найдутся хотя бы k пар выписанных чисел $b < c$, для которых $bc - 1$ делится на $a - 1$. Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: $k = 1012$.

Решение. Для начала приведём *пример* для $k = 1012$. Пусть на доску выписаны числа

$$2^1, 2^2, \ldots, 2^{2026}.$$

Рассмотрим одно из выписанных чисел $a = 2^n$. Если $m \in \{1, 2, \ldots, 2026\}$, то в этом множестве найдётся число $k \neq m$ такое, что $m + k$ делится на n, возможно, за исключением случаев $m = n$ и $2m = n$. Действительно, если r — остаток от деления m на n, можно взять $k = m - r$. Пусть $k + n = Tm$. Тогда $2^n \cdot 2^k - 1 = 2^{Tm} - 1$, что делится на 2^{Tm-1}. Таким образом, для каждого выписанного числа a хотя бы 2024 выписанных числа участвуют хотя бы в одной искомой паре, поэтому таких пар не менее 1012.

Далее докажем *оценку*. Пусть a — наибольшее из чисел, выписанных на доске. Рассмотрим пары выписанных чисел $b < c$, для которых $bc - 1$ делится на a. Покажем, что число a не участвует ни в одной из рассмотренных пар, а любое из оставшихся чисел — не более чем в одной такой паре, отсюда последует, что $2k \leqslant 2025$ и $k \leqslant 1012$.

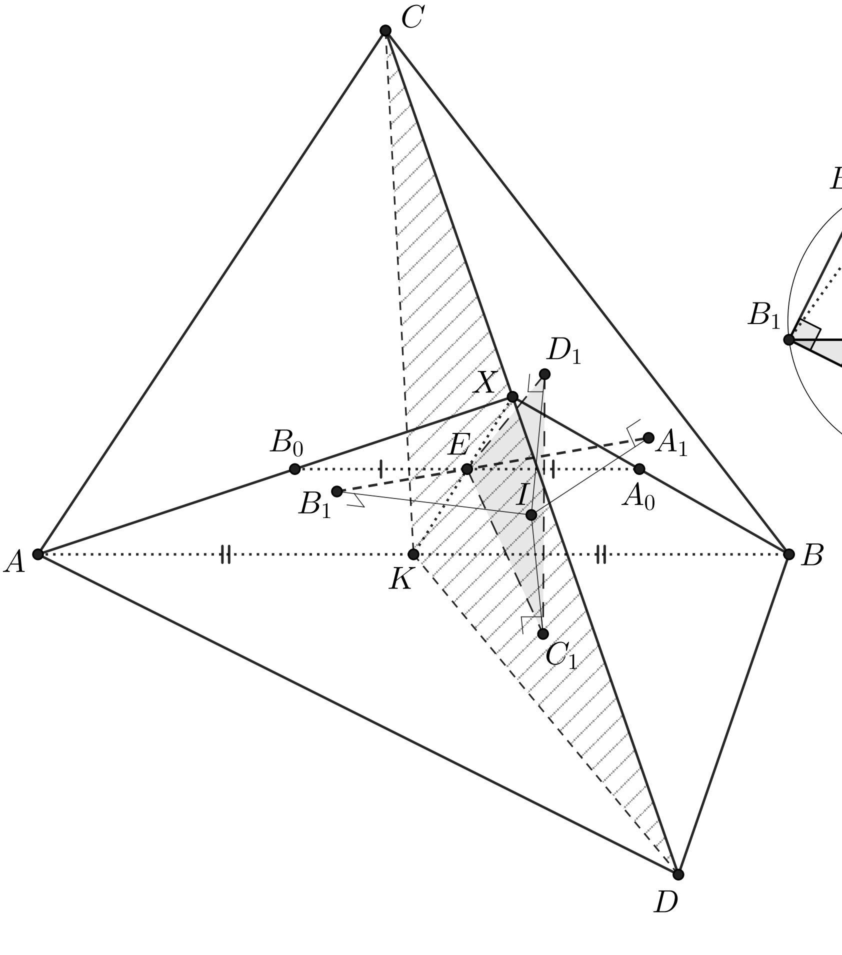
Пусть $an-1$ делится на $a-1$, где $1<n<a$. Поскольку $a \equiv 1 \pmod{a-1}$, то $n-1$ делится на $a-1$, но $0<n-1<a-1$, противоречие. Теперь пусть числа $mk-1$ и $mn-1$ делятся на $a-1$, где m, n, k — различные выписанные числа. Тогда число m взаимно просто с $a-1$ и $mk-mn=m(k-n)$ кратно $a-1$. Значит, $k-n$ делится на $a-1$, однако $|k-n| \leqslant \max(k, n)-2<a-1$, полученное противоречие завершает решение задачи.

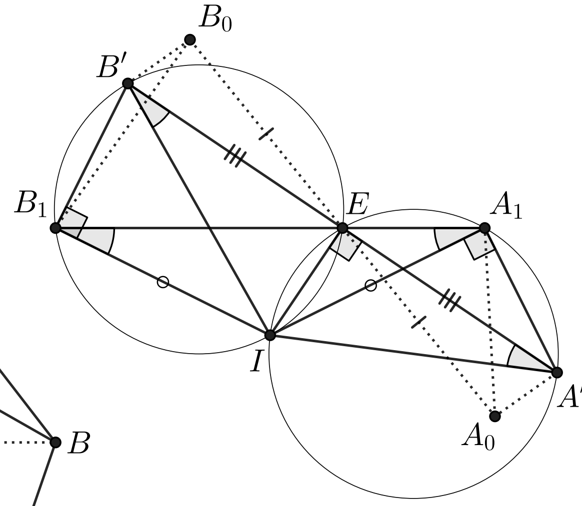
11.7. Сфера с центром в точке I вписана в тетраэдр $ABCD$ и касается его граней BCD, CDA, DAB, ABC в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Отрезок A_1B_1 пересекает плоскость C_1D_1I в точке E. Докажите, что середина ребра AB лежит в плоскости CDE.

Решение 1. Проведем через точку E прямую, параллельную AB. Пусть она пересечет плоскости BCD и ACD в точках A_0 и B_0 соответственно. Тогда точки A, A_0, B, B_0 лежат в одной плоскости, поэтому лучи AB_0 и BA_0 пересекаются в некоторой точке X на ребре CD. Мы далее докажем, что E — середина A_0B_0, а тогда, поскольку $AB \parallel A_0B_0$, то на прямой XE будет лежать середина отрезка AB, при этом по построению прямая XE содержится в плоскости CDE, то есть задача будет решена.

Поскольку $IC_1 \perp ABD$ и $ID_1 \perp ABC$, то плоскость ID_1C_1 перпендикулярна прямой AB, а тогда и прямой A_0B_0. Следовательно, $IE \perp A_0B_0$. Далее можно рассматривать лишь точки I, A_1, B_1, A_0, B_0, E (см. рисунок справа).

Обозначим через A' и B' проекции точек A_0 и B_0 соответственно на плоскость IA_1B_1. Тогда по теореме о трех перпендикулярах точки A', B', E лежат на одной прямой, перпендикулярной IE, а также $\angle B'B_1I=90^\circ=\angle A'A_1I$. Значит, точки I, A_1, A', E лежат на окружности с диаметром $A'I$, а точки I, B_1, B', E — на окружности с диаметром $B'I$, поэтому $\angle IA'B'=\angle IA_1B_1=\angle IB_1A_1=\angle IB'A$ (здесь мы воспользовались равенством радиусов $IA_1=IB_1$). Следовательно, $IA'=IB'$, а поскольку $IE \perp A'B'$, то и $A'E=B'E$. Тогда и $A_0E=B_0E$, что и требовалось.





Решение 2. Будем обозначать через $\operatorname{dist}(T, XYZ)$ расстояние от точки T до плоскости XYZ, через $\angle(UV, XYZ)$ — угол между прямой UV и плоскостью XYZ.

Пусть плоскость CDE пересекает ребро AB в точке K. Тогда

$$\frac{AK}{BK} = \frac{\operatorname{dist}(A, CDK)}{\operatorname{dist}(B, CDK)} = \frac{V_{AECD}}{V_{BECD}} = \frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} \cdot \frac{\operatorname{dist}(E, ACD)}{\operatorname{dist}(E, BCD)} \quad (\star).$$

Точки A_1 и B_1 как точки касания вписанной сферы с плоскостями BCD и ACD симметричны относительно биссектра двугранного угла при ребре CD, в силу этой симметрии прямая A_1B_1 образует равные углы с этими плоскостями. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{dist}(E, ACD)}{\operatorname{dist}(E, BCD)} = \frac{B_1E}{A_1E} = \frac{\operatorname{dist}(B_1, C_1D_1I)}{\operatorname{dist}(A_1, C_1D_1I)} = \frac{V_{IB_1C_1D_1}}{V_{IA_1C_1D_1}} = \frac{\sin\angle(IB_1, IC_1D_1)}{\sin\angle(IA_1, IC_1D_1)}.$$

Прямые IC_1 и ID_1 перпендикулярны плоскостям ABD и ACD, поэтому они обе ортогональны прямой AB. Итого прямая AB перпендикулярна плоскости C_1D_1I, а прямая IA_1 — перпендикулярна плоскости BCD. Следовательно, $\angle(IA_1, IC_1D_1) = \angle(AB, BCD)$, аналогично $\angle(IB_1, IC_1D_1) = \angle(AB, ACD)$. Таким образом,

$$\frac{\operatorname{dist}(E, ACD)}{\operatorname{dist}(E, BCD)} = \frac{\sin\angle(AB, ACD)}{\sin\angle(AB, BCD)} = \frac{\operatorname{dist}(B, ACD)}{\operatorname{dist}(A, BCD)} \quad (\star\star).$$

Поскольку

$$\operatorname{dist}(B, ACD) \cdot S_{ACD} = 3 \cdot V_{ABCD} = \operatorname{dist}(A, BCD) \cdot S_{BCD},$$

из соотношений $(\star)$ и $(\star\star)$ следует требуемое равенство $AK = BK$.

Замечание. Как нетрудно заметить, оба приведенных решения следует плану соответствующих рассуждений для аналогичной плоской задачи: если I — центр вписанной окружности треугольника ABC, которая касается соответствующих сторон в точках C_1, A_1, B_1, и прямая IC_1 пересекает отрезок A_1B_1 в точке E, то прямая CE проходит через середину отрезка A_1B_1. Отметим, что ключевое равенство второго решения

$$\frac{V_{IB_1C_1D_1}}{V_{IA_1C_1D_1}} = \frac{S_{BCD}}{S_{ACD}}$$

аналогично теореме синусов для треугольника. Действительно, если для трехгранного угла тетраэдра при вершине A мы обозначим через $\sin\angle A$ объём тетраэдра, образованного тремя внешними единичными нормалями в точке A к граням тетраэдра ABC, ABD, ACD (и введём аналогичные обозначение для остальных вершин), то наше равенство примет вид

$$\frac{S_{BCD}}{S_{ACD}} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} \Leftrightarrow \frac{S_{BCD}}{\sin\angle A} = \frac{S_{ACD}}{\sin\angle B}.$$

Замечание. Приведём план альтернативного подхода с помощью полярного преобразования относительно вписанной сферы Ω.

Заметим, что точка A_1 — полюс плоскости BCD, аналогично и с другими точками касания. Следовательно, полюс плоскости IC_1D_1 — бесконечно удаленная точка на прямой AB, а поляра прямой A_1B_1 — это прямая CD. Таким образом, полюс P плоскости CDE лежит в плоскости α, параллельной прямой CD и содержащей ребро AB.

Рассмотрим плоскость γ, проходящую через точку C и перпендикулярную прямой CD. Пусть окружность ω — это проекция сферы Ω на γ, проекцию точки X на эту плоскость будем обозначать через X'. Тогда точка P' будет полюсом прямой CE' относительно окружности γ, а также $CP' \parallel AB$. После проектирования отрезки CA' и CB' будут касаться окружности ω (в точках B_1' и A_1').

Пусть прямая CE' пересекает окружность γ в точках U и V. В силу сказанного выше, точка P' лежит на пересечении касательных в точках U и V к окружности ω. Это означает, что четырехугольник $A_1'UB_1'V$ — гармонический, проецируя двойное отношение его вершин с описанной окружности на прямую $A_1'B_1'$ с центром в точке U, мы получаем, что четверка точек $P', B_1', A_1'B_1' \cap UV, A_1'$ — гармоническая. Теперь при проекции этой четверки с центром C на прямую $A'B'$, поскольку $CP' \parallel A'B'$ мы получаем, что CE' проходит через середину отрезка $A'B'$. Следовательно, середина отрезка AB лежит в плоскости CDE, что и требовалось.

11.8. Даны нечётные числа $a \leqslant b$, большие 1. На клетчатую плоскость (сторона клетки равна 1) выложены по линиям сетки салфетки в форме квадратов 2×2 так, что каждая клетка накрыта не более чем одной салфеткой. Оказалось, что для любого клетчатого прямоугольника с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b его левый нижний угол является центром одной из салфеток в том и только в том случае, когда его правый верхний угол является центром одной из салфеток. Найдите наименьшее положительное число α, при котором для любого натурального N гарантированно найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, содержащий целиком не более αN^2 салфеток.

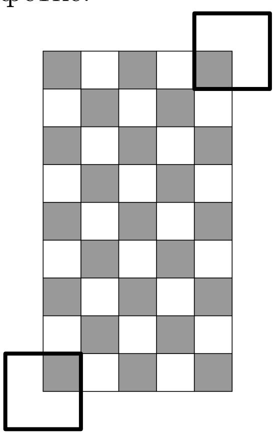
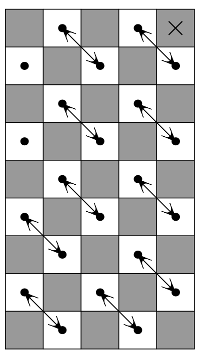
Ответ: $\dfrac{(a+1)(b-1)}{4(ab+b-a)}$.

Решение 1. Все рисунки в решении иллюстрируют сказанное при $a = 5$, $b = 9$.

Сперва докажем, что заявленное в ответе значение α (обозначим чего через α_0) удовлетворяет условию. В каждой салфетке правую верхнюю клетку назовём *базовой*. Непокрытую клетку назовём *дыркой*.

Рассмотрим произвольную салфетку; введём систему координат (пронумеруем строки и столбцы) так, что её базовая клетка имеет координаты $(1, 1)$. Согласно условию задачи, при параллельном переносе T на вектор (a, b) конфигурация переходит в себя. Тогда клетка (a, b) покрыта нижней левой клеткой T-образа этой салфетки.

Рассмотрим прямоугольник P с левой нижней клеткой $(1, 1)$ и правой верхней клеткой (a, b). Раскрасим его клетки в шахматном порядке так, чтобы все угловые клетки были черными (это возможно, поскольку a и b нечётны); чёрных клеток окажется на одну больше, чем белых. Нетрудно видеть, что каждая салфетка покрывает в P не меньше чёрных клеток, чем белых. При этом рассмотренная выше салфетка и её образ покрывают больше чёрных клеток, чем белых. Поскольку каждая клетка покрыта не более чем по одному разу, какая-то белая клетка в этом прямоугольнике — дырка. Сопоставим одну из таких дырок рассмотренной салфетке.

Выясним, скольким салфеткам может быть сопоставлена одна и та же дырка. Введём координаты иначе, чтобы у дырки они были (a, b). Тогда базовые клетки салфеток, которым она соответствует — по-прежнему белые клетки прямоугольника P (в новых координатах). При этом все эти белые клетки, кроме $\frac{b-a}{2}$ верхних клеток левого столбца, можно разбить на пары соседних по диагонали (левая верхняя–правая нижняя); из каждой такой пары не более чем одна клетка может быть базовой. Таким образом, базовых клеток (и, тем самым, сопоставленных салфеток) не больше, чем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ab-1}{2}+\frac{b-a}{2}\right)=\frac{1}{4}(a+1)(b-1).$$

Предположим, что для некоторого натурального N наименьшее количество салфеток в квадрате $N\times N$ равно αN^2. Тогда в любом квадрате $M\times M$, где $M=s\cdot N$, содержится не менее, чем αM^2 салфеток, поскольку он разбивается на s^2 квадратов $N\times N$.

Пусть квадрат $M\times M$ содержит целиком k салфеток. Все эти k салфеток и не менее чем $\frac{4k}{(a+1)(b-1)}$ соответствующих им дырок содержатся в прямоугольнике $(M+a)\times(M+b)$, у которого общий левый нижний угол с рассмотренным ранее квадратом. Значит, сумма площадей этих салфеток и дырок не больше площади прямоугольника:

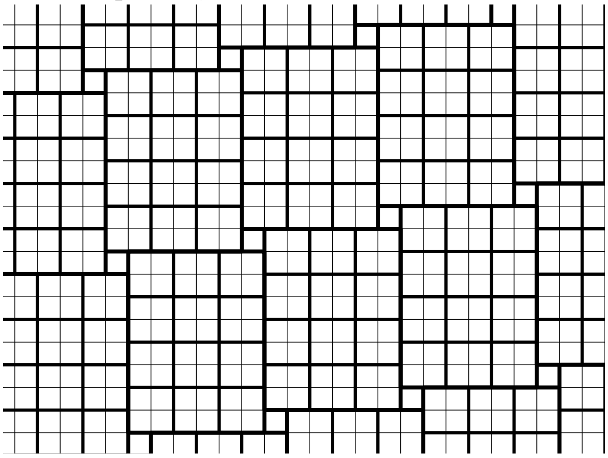
$$k\left(4+\frac{4}{(a+1)(b-1)}\right)\leqslant (M+a)(M+b).$$

Итого

$$\alpha\leqslant\frac{k}{M^2}\leqslant\frac{(a+1)(b-1)}{4(ab+b-a)}\cdot\frac{(M+a)(M+b)}{M^2}. \qquad (\star)$$

Воспользуемся тем, что $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{(sN+a)(sN+b)}{(sN)^2}=1$ (напомним, что $M=s\cdot N$) и перейдём к пределу в неравенстве $(\star)$ — получится, что $\alpha\leqslant\alpha_0$. Значит, действительно для любого N найдётся квадрат $N\times N$, в котором покрыто не более, чем $\alpha_0 N^2$ клеток.

Осталось доказать, что никакое значение $\alpha<\alpha_0$ под условие не подходит. Рассмотрим прямоугольник П с горизонтальной стороной $a+1$ и вертикальной стороной $b-1$. Разобьём его на квадратики 2×2 (салфетки) и добавим все его сдвиги на все целые кратные векторов (a,b) и $(-1,b-1)$ (и их суммы). Сопоставим каждой дырке прямоугольник, с которым она граничит своей нижней стороной, это сопоставление взаимно-однозначно.



Предположим, что квадрат $N\times N$ содержит не более, чем αN^2 салфеток. Значит, он целиком содержит не более, чем $\frac{4\alpha N^2}{(a+1)(b-1)}$ сдвигов прямоугольника П. Тогда в этом квадрате дырок не больше, чем $\frac{4\alpha N^2}{(a+1)(b-1)}+4(a+b)\cdot N$. Действительно, каждой дырке, не лежащих в крайних $a+b$ столбцах (с любой из 4 сторон) соответствует целиком содержащийся в квадрате прямоугольник $(a+1)\times(b-1)$, разбитый на салфетки, а число оставшихся клеток можно оценить как $C\cdot N$ для $C=4(a+b)$. Салфетки, целиком содержащиеся в квадрате, и дырки в гём по площади должны составлять не менее $(N-2)^2$ (клетки крайних строк и столбцов могут быть покрыты салфетками, не содержащимися в квадрате полностью), откуда

$$4\alpha N^2+\frac{4\alpha N^2}{(a+1)(b-1)}+C\cdot N\geqslant (N-2)^2 \quad\Rightarrow\quad 4\alpha+\frac{4\alpha}{(a+1)(b-1)}+\frac{C}{N}\geqslant\frac{(N-2)^2}{N^2}.$$

Эта оценка должна выполняться при каждом натуральном N. Переходя к пределу при $N \to \infty$ в правом неравенстве мы получаем, что

$$4\alpha + \frac{4\alpha}{(a+1)(b-1)} \geqslant 1 \Rightarrow \alpha \geqslant \frac{(a+1)(b-1)}{4(ab+b-a)} = \alpha_0,$$

что и требовалось доказать.

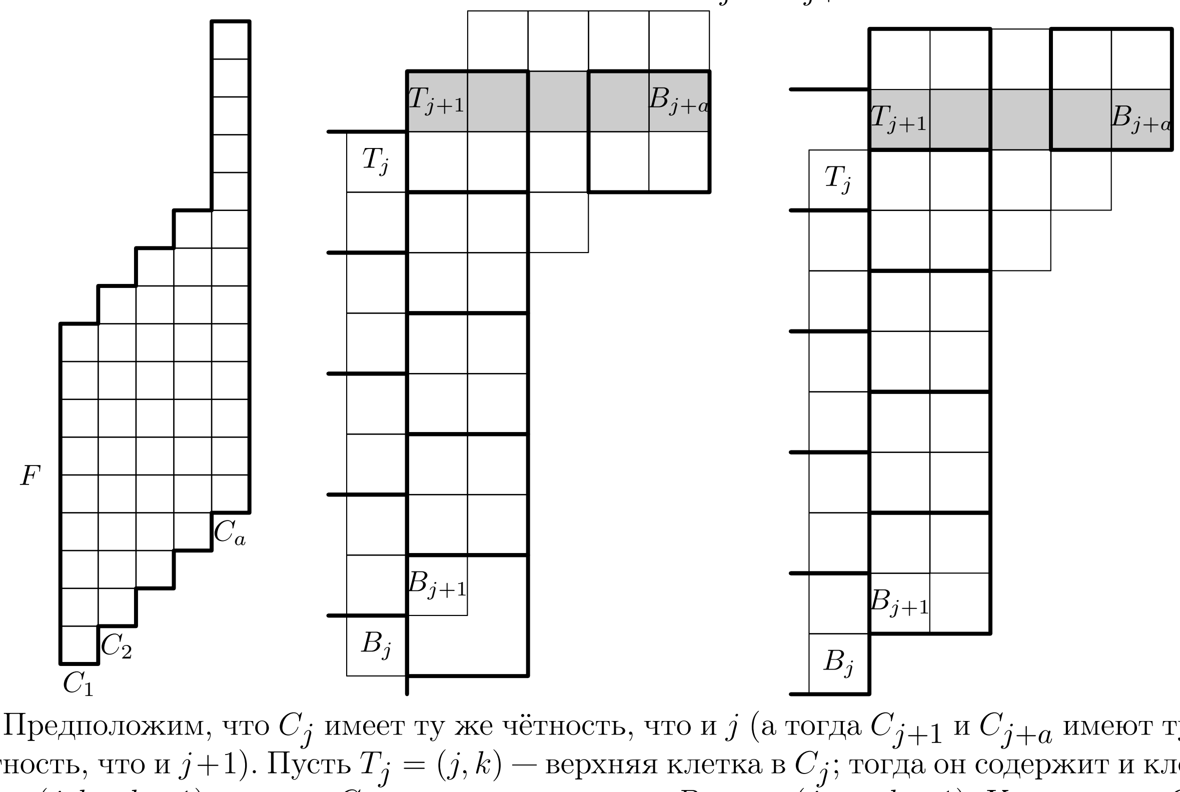
Решение 2. Приведём другое доказательство того, что $\alpha = \alpha_0$ удовлетворяет требованиям. Мы будем пользоваться терминологией из первого решения. Введём систему координат на плоскости.

Рассмотрим фигуру F, содержащую при каждом $i = 1, 2, \ldots, a-1$ столбец C_i от клетки (i, i) до клетки $(i, i+b-1)$, а также столбец клеток C_a от (a, a) до $(a, 2b-1)$; всего эта фигура содержит $(a-1)b + (2b-a) = ab + b - a$ клеток.

Лемма. Любой параллельный перенос этой фигуры (на вектор с целыми координатами) содержит дырку.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать утверждение леммы для исходной фигуры F.

Предположим противное. Назовём салфетку *чётной* или *нечётной* в зависимости от того, чётна или нечётна ордината её базовой клетки. Обозначим через C_{i+a} столбец, полученный из C_i переносом на вектор $\vec{v} = (a, b)$ (в частности, C_{2a+1} получен из C_1 переносом на $2\vec{v}$); по условию, все столбцы C_i, $i = 1, 2, \ldots$, также полностью покрыты. Значит, для каждого i все салфетки, задевающие C_i, имеют одинаковую чётность; в зависимости от неё назовём этот столбец *чётным* или *нечётным*. Заметим, что столбцы C_1 и C_{a+1} имеют разные чётности, так как их покрытия отличаются сдвигом на (a, b); поэтому существует такое j $(1 \leqslant j \leqslant a)$, что C_j и C_{j+1} имеют разную чётность. Выберем одно такое j. Заметим, что тогда одна салфетка не может задевать и C_j, и C_{j+1}.



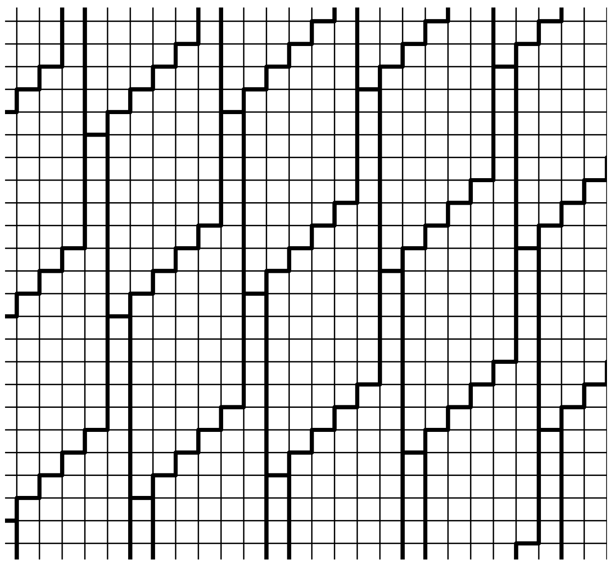
Предположим, что C_j имеет ту же чётность, что и j (а тогда C_{j+1} и C_{j+a} имеют ту же чётность, что и $j+1$). Пусть $T_j = (j, k)$ — верхняя клетка в C_j; тогда он содержит и клетку $B_j = (j, k-b+1)$, а тогда C_{j+a} содержит клетку $B_{j+a} = (j+a, k+1)$. Кроме того, C_{j+1} содержит клетки $B_{j+1} = (j+1, k-b+2)$ и $T_{j+1} = (j+1, k+1)$. Заметим, что числа k и j имеют одинаковую чётность. Мы докажем, что строка R между клетками T_{j+1} и B_{j+a}, содержит дырку. Это даст требуемое противоречие, ибо эта строка полностью содержится в объединении столбцов $C_{j+1}, \ldots, C_{j+a}$.

Действительно, чётность салфетки, накрывающей T_{j+1}, совпадает с чётностью числа $k+1$, то есть ордината её базовой клетки равна $k+1$. Тогда её абсцисса равна $j+2$, иначе она бы накрывала T_j, то есть задевала бы и C_j, и C_{j+1}. Таким образом, левые две клетки в R накрыты одной салфеткой. Аналогично, базовая клетка салфетки, накрывающей B_{j+1}, имеет координаты $(j+2, k-b+2)$, то есть она накрывает и клетку под B_{j+1}. Значит, её не накрывает салфетка, накрывающая B_j, то есть эта салфетка имеет базовую клетку B_j. Поэтому и B_{j+a} является базовой клеткой некоторой салфетки, накрывающей правые две клетки в R. Но тогда строка R, состоящая из нечётного числа клеток, не может быть полностью покрыта салфетками.

Если C_j имеет ту же чётность, что и $j+1$ (а C_{j+1} — ту же чётность, что и j), рассуждения аналогичны. Вводя те же клетки, мы получаем, что базовая клетка салфетки, покрывающей T_j, имеет координаты $(j, k+1)$, поэтому базовая клетка салфетки, покрывающей T_{j+1}, имеет координаты $(j+2, k+2)$, и эта салфетка покрывает левые две клетки строки R. С другой стороны, базовая клетка салфетки, покрывающей B_j, имеет координаты $(j, k-b+2)$, а тогда её перенос на $\overrightarrow{v}$ накрывает правые две клетки в R. Лемма доказана. $\square$

Теперь несложно завершить оценку. Заметим, что вся плоскость разбивается на сдвиги фигуры F на векторы, кратные (a, b) и $(-1, b-1)$. Рассмотрим любой квадрат $M \times M$. Каждая его клетка, отстоящая от границы квадрата хотя бы на $a+b$, покрыта одним из этих сдвигов, целиком содержащимся в квадрате. Значит, сдвигов из разбиения, целиком содержащихся в квадрате, не меньше. чем $\frac{(M-2a-2b)^2}{ab+b-a}$, и каждый содержит дырку. Поэтому количество салфеток, полностью содержащихся в квадрате, не превосходит

$$\frac{1}{4}\left(M^2 - \frac{(M-2a-2b)^2}{ab+b-a}\right).$$



Теперь для любого натурального N выберем наименьшее α такое, что некоторый квадрат $N \times N$ содержит αN^2 салфеток. Тогда в любом квадрате $M \times M$ при $M = s \cdot N$ содержится не менее αM^2 салфеток, то есть

$$\alpha \leqslant \frac{1}{4}\left(1 - \frac{(M-2a-2b)^2}{M^2(ab+b-a)}\right).$$

Переходя к пределу при $s \to \infty$, получаем $\alpha \leqslant \alpha_0$.