9 класс

Второй день

9.5. У Кати есть $2n$ катушек с лентами (n — натуральное число). Изначально на катушках намотано $1^2, 2^2, \ldots, (2n)^2$ дециметров ленты соответственно. Каждый час Катя выбирает натуральное число i и отрезает по i дециметров ленты от всех катушек, на которых осталось не менее i дециметров ленты. Через некоторое время все катушки, на которых изначально было нечётное количество дециметров ленты, оказались пустыми. Докажите, что в этот момент длина оставшейся ленты на каждой из остальных катушек меньше $4n$ дециметров.

9.6. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Из точки A опустили перпендикуляры AP и AQ на продолжения отрезков BO и CO за точку O. Окружность с центром T, проходящая через точки P и Q, касается отрезка BC. Докажите, что $TO \parallel BC$.

9.7. Пусть n — нечётное натуральное число. Дана таблица $n \times n$. *Расстоянием* между двумя клетками таблицы назовём наименьшее число шагов, за которое можно добраться от одной клетки до другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку (так, расстояние между клетками, соседними по стороне, равно 1). R клеток таблицы окрашены в красный цвет, а другие B клеток — в синий. Известно, что любая прямая, соединяющая центры красной и синей клеток, не параллельна ни одной из диагоналей таблицы. Кроме того, расстояние между любыми красной и синей клетками не равно n. Докажите, что $\sqrt{R} + \sqrt{B} \leqslant n$.

9.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a, b и c. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ не является полным квадратом.

9 класс

Второй день

9.5. У Кати есть $2n$ катушек с лентами (n — натуральное число). Изначально на катушках намотано $1^2, 2^2, \ldots, (2n)^2$ дециметров ленты соответственно. Каждый час Катя выбирает натуральное число i и отрезает по i дециметров ленты от всех катушек, на которых осталось не менее i дециметров ленты. Через некоторое время все катушки, на которых изначально было нечётное количество дециметров ленты, оказались пустыми. Докажите, что в этот момент длина оставшейся ленты на каждой из остальных катушек меньше $4n$ дециметров.

9.6. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Из точки A опустили перпендикуляры AP и AQ на продолжения отрезков BO и CO за точку O. Окружность с центром T, проходящая через точки P и Q, касается отрезка BC. Докажите, что $TO \parallel BC$.

9.7. Пусть n — нечётное натуральное число. Дана таблица $n \times n$. *Расстоянием* между двумя клетками таблицы назовём наименьшее число шагов, за которое можно добраться от одной клетки до другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку (так, расстояние между клетками, соседними по стороне, равно 1). R клеток таблицы окрашены в красный цвет, а другие B клеток — в синий. Известно, что любая прямая, соединяющая центры красной и синей клеток, не параллельна ни одной из диагоналей таблицы. Кроме того, расстояние между любыми красной и синей клетками не равно n. Докажите, что $\sqrt{R} + \sqrt{B} \leqslant n$.

9.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a, b и c. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ не является полным квадратом.

10 класс

Второй день

10.5. Существует ли выпуклый 201-угольник, в котором каждая диагональ перпендикулярна какой-то другой диагонали?

10.6. В стране ровно 1000 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что для любого натурального $k \leqslant 500$ выполнено следующее утверждение: «Если выбрать любое множество A из k городов, то найдётся хотя бы k городов, не принадлежащих A, каждый из которых соединён авиалинией хотя бы с одним городом из A». Какое наименьшее количество авиалиний может быть в этой стране?

10.7. На координатной плоскости вершины выпуклого четырехугольника имеют целые координаты и лежат на графике многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что если диагонали этого четырехугольника перпендикулярны, то они равны между собой.

10.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a, b и c. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ не является полным квадратом.

10 класс

Второй день

10.5. Существует ли выпуклый 201-угольник, в котором каждая диагональ перпендикулярна какой-то другой диагонали?

10.6. В стране ровно 1000 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что для любого натурального $k \leqslant 500$ выполнено следующее утверждение: «Если выбрать любое множество A из k городов, то найдётся хотя бы k городов, не принадлежащих A, каждый из которых соединён авиалинией хотя бы с одним городом из A». Какое наименьшее количество авиалиний может быть в этой стране?

10.7. На координатной плоскости вершины выпуклого четырехугольника имеют целые координаты и лежат на графике многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что если диагонали этого четырехугольника перпендикулярны, то они равны между собой.

10.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a, b и c. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ не является полным квадратом.

11 класс

Второй день

11.5. Саша поставил фишку в одну из точек координатной плоскости. За одну операцию разрешается переместить фишку, расположенную в точке с координатами (a_i, b_i), в другую точку (a_{i+1}, b_{i+1}), если уравнение прямой, соединяющей эти точки, имеет вид $y = a_i x + c_i$ (где i — номер операции). Может ли после нескольких таких операций фишка вернуться в исходную точку?

11.6. На доску выписаны 2026 попарно различных натуральных чисел, больших 1. Оказалось, что для любого выписанного числа a найдутся хотя бы k пар выписанных чисел $b < c$, для которых $bc - 1$ делится на $a - 1$. Найдите наибольшее возможное значение k.

11.7. Сфера с центром в точке I вписана в тетраэдр $ABCD$ и касается его граней BCD, CDA, DAB, ABC в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Отрезок A_1B_1 пересекает плоскость C_1D_1I в точке E. Докажите, что середина ребра AB лежит в плоскости CDE.

11.8. Даны нечётные числа $a \leqslant b$, большие 1. На клетчатую плоскость (сторона клетки равна 1) выложены по линиям сетки салфетки в форме квадратов 2×2 так, что каждая клетка накрыта не более чем одной салфеткой. Оказалось, что для любого клетчатого прямоугольника с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b его левый нижний угол является центром одной из салфеток в том и только в том случае, когда его правый верхний угол является центром одной из салфеток. Найдите наименьшее положительное число α, при котором для любого натурального N гарантированно найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, содержащий целиком не более αN^2 салфеток.

11 класс

Второй день

11.5. Саша поставил фишку в одну из точек координатной плоскости. За одну операцию разрешается переместить фишку, расположенную в точке с координатами (a_i, b_i), в другую точку (a_{i+1}, b_{i+1}), если уравнение прямой, соединяющей эти точки, имеет вид $y = a_i x + c_i$ (где i — номер операции). Может ли после нескольких таких операций фишка вернуться в исходную точку?

11.6. На доску выписаны 2026 попарно различных натуральных чисел, больших 1. Оказалось, что для любого выписанного числа a найдутся хотя бы k пар выписанных чисел $b < c$, для которых $bc - 1$ делится на $a - 1$. Найдите наибольшее возможное значение k.

11.7. Сфера с центром в точке I вписана в тетраэдр $ABCD$ и касается его граней BCD, CDA, DAB, ABC в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Отрезок A_1B_1 пересекает плоскость C_1D_1I в точке E. Докажите, что середина ребра AB лежит в плоскости CDE.

11.8. Даны нечётные числа $a \leqslant b$, большие 1. На клетчатую плоскость (сторона клетки равна 1) выложены по линиям сетки салфетки в форме квадратов 2×2 так, что каждая клетка накрыта не более чем одной салфеткой. Оказалось, что для любого клетчатого прямоугольника с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b его левый нижний угол является центром одной из салфеток в том и только в том случае, когда его правый верхний угол является центром одной из салфеток. Найдите наименьшее положительное число α, при котором для любого натурального N гарантированно найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, содержащий целиком не более αN^2 салфеток.