Материалы для проведения заключительного этапа

LII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2025–2026 учебный год

Первый день

Москва, 14–20 апреля 2026 года

Москва, 2026

9 класс

Первый день

9.1. Сначала на тарелке лежат 75 конфет. Петя и Вася по очереди берут из тарелки любое натуральное количество конфет до тех пор, пока конфет на тарелке не останется. Начинает Петя. При каком наименьшем k Петя может играть так, чтобы гарантировать, что в конце игры количества конфет у мальчиков отличаются не более чем на k? (Во время игры мальчики конфеты не едят.)

Ответ: 25.

Решение. *Стратегия Пети.* Покажем, как действовать Пете, чтобы в итоге количества конфет отличались не больше, чем на 25, как бы ни ходил Вася. Пусть на первом ходе Петя возьмёт 25 конфет, а затем на каждом ходе будет брать по одной конфете. Если после первого хода он возьмёт ещё x конфет, то он (а значит, и Вася) сделает ещё x ходов. Поэтому количество y конфет у Васи будет не меньше, чем x, при этом $x + y = 50$. Количества конфет у мальчиков будут отличаться на $|25 + x - y|$; при этом $0 \leqslant y - x \leqslant$ $\leqslant y + x = 50$, то есть $-25 \leqslant 25 + x - y \leqslant 25$, или $|25 + x - y| \leqslant 25$, что и требовалось.

Стратегия Васи. Покажем, как действовать Васе, чтобы количества конфет у мальчиков отличались не меньше, чем на 25, как бы ни ходил Петя. Пусть Петя первым ходом взял x конфет. Если $x \leqslant 25$, то Васе достаточно сразу же забрать все оставшиеся конфеты — количества будут различаться на $(75-x)-x = 75-2x \geqslant 25$. Если же $x > 25$, Вася будет брать каждым своим ходом по одной конфете. Тогда, если у Васи окажется y конфет, то Петя сделает (после первого) ещё хотя бы $y - 1$ ход, то есть у него окажется не менее $x+(y-1)$ конфет. Значит, разность их количеств будет не меньше $(x+y-1)-y = x-1 \geqslant 25$, что и требовалось.

9.2. Назовём натуральное число n *странным*, если существуют такие попарно различные натуральные числа a, b, c, d и e, большие 1, что $n = a^{a^a} = b^{b^c} = d^{e^e}$. Конечно или бесконечно количество странных чисел? (Напомним, что x^{y^z} означает число, получившееся в результате возведения числа x в степень y^z.)

Ответ: Бесконечно.

Решение. Если число a чётно, то a^a кратно четырём и, значит, число a^{a^a} представляет собой четвёртую степень некоторого натурального числа. Тогда его можно представить и в виде d^{e^e} для $e = 2$ и подходящего d.

Положим $a = b^b$ для чётного $b > 2$. Тогда $a \geqslant 16$, $a^a = (b^b)^a = b^{ab}$ и $a^{a^a} = (b^b)^{b^{ab}} =$ $= b^{b \cdot b^{ab}} = b^{b^{ab+1}}$. Следовательно, при $c = ab + 1$ будет выполнено равенство $a^{a^a} = b^{b^c}$. Осталось понять, что в этом случае числа a, b, c, d и e будут различными. По построению $c > a > b > 2 = e$. Поскольку $d^4 = a^{a^a} \geqslant a^{16}$, число d будет больше, чем $a^2 > ab + 1 = c$.

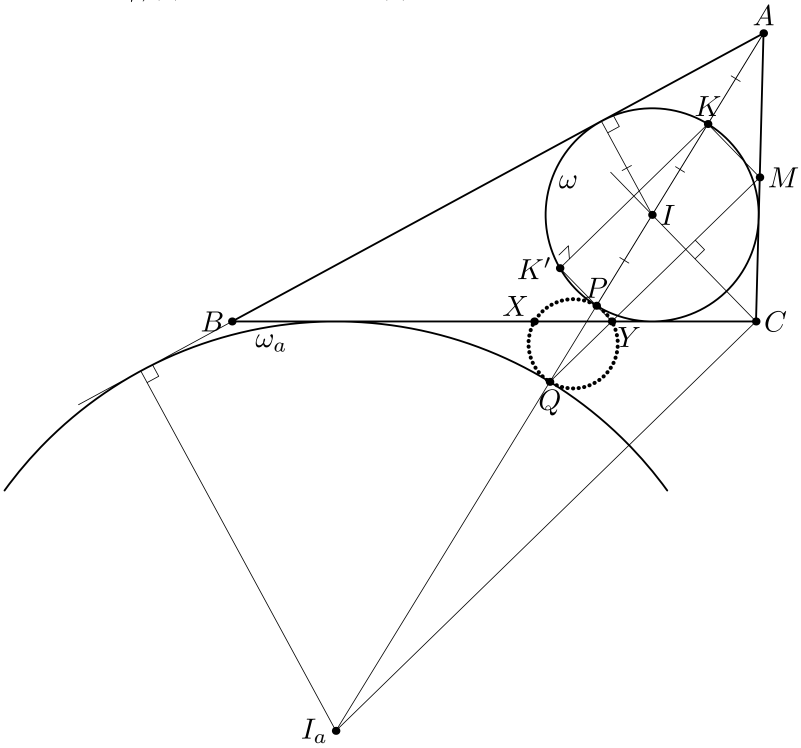
Таким образом, для любого четного $b > 2$ число $n = a^{a^a}$ при $a = b^b$ будет странным. Поэтому странных чисел бесконечно много.

Замечание. Существуют и другие примеры. Например, можно положить $a = b^b$ для произвольного (не обязательно чётного) b, имеющего вид $b = e^e$ при $e > 1$. Также существуют конструкции, когда $a = b^{b^2}$ и т. п.

9.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне BC отмечены точки X и Y таким образом, что $2BX = AB$ и $2CY = AC$. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки X и Y, которая касается вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника ABC.

Решение. Обозначим через ω вписанную окружность треугольника ABC, а через ω_a его вневписанную окружность, касающуюся стороны BC. Покажем, что существует окружность, которая проходит через точки X и Y и касается ω и ω_a. Обозначим через P и Q ближайшие друг к другу точки пересечения биссектрисы угла A с окружностями ω и ω_a

соответственно, через I и I_a — центры этих окружностей, а через r и r_a — их радиусы. Докажем, что окружность γ с диаметром PQ — искомая. Для этого проверим, что точка Y лежит на окружности γ; доказательство для точки X аналогично.



Пусть K — вторая точка пересечения ω с биссектрисой угла A, а M — середина AC. Поскольку $\angle BAI = 30^\circ$, имеем $AI = 2r = 2IK = 2IP$ и $AI_a = 2r_a = 2I_aQ$. В частности, это означает, что $AQ = QI_a = r_a$ и $AK = KI = IP = r$. Значит, MK — средняя линия в треугольнике ACI, то есть $MK \parallel CI$.

При симметрии относительно биссектрисы CI угла C точка M переходит в Y, а точка K — в некоторую точку K', также лежащую на ω. Тогда $YK' \parallel MK \parallel CI$ и, значит, $YK' \perp KK'$. С другой стороны, так как KP — диаметр ω, то $PK' \perp KK'$. Поэтому точка K' лежит на прямой YP, а значит, $YP \parallel CI$.

Наконец, $QM \parallel CI_A$ как средняя линия треугольника ACI_A, а $MY \parallel CI_A$, поскольку CI_A — биссектриса в равнобедренном треугольнике CMY; значит, точка M лежит на прямой YQ, и $QY \parallel CI_a$. Таким образом, $\angle PYQ = \angle ICI_a = 90^\circ$, и точка Y лежит на γ.

Замечание. По-другому тот факт, что точка Y лежит на γ, можно доказать так. Как и в решении, заметим, что $AI = 2r = IP$. Пусть прямая AI пересекает BC в точке L. Поскольку CI — биссектриса в треугольнике ACL, имеем

$$\frac{CL}{IL} = \frac{CA}{IA} = \frac{2CY}{2IP} = \frac{CY}{IP}.$$

Отсюда следует, что $PY \parallel CI$. Параллельность $QY \parallel CI_A$ доказывается аналогично.

9.4. На олимпиаду приехало несколько участников из $n > 1$ регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины соответствуют участникам, а рёбра соединяют пары друзей. Тогда нам известно, что вершины можно окрасить в n цветов так, что в каждом простом цикле не более половины вершин будут одноцветными (назовём такую окраску *приятной*). Нужно же доказать, что можно вершины окрасить в n цветов правильным образом.

Назовём цвет *правильным*, если никакие две вершины этого цвета не соединены; иначе назовём его *неправильным*. Рассмотрим любую приятную окраску вершин и два цвета A и B в ней. Мы докажем, что можно перекрасить вершины этих цветов (окрасив каждую снова либо в A, либо в B) так, что оба этих цвета станут правильными, и раскраска останется приятной. Заметим, что при такой операции любой другой правильный цвет останется правильным. Значит, проделав такую операцию несколько раз, задействовав каждый цвет хотя бы по разу, мы получим правильную окраску вершин, что и требовалось.

Осталось показать, как совершить перекраску для двух цветов. Рассмотрим лишь граф H на вершинах цветов A и B (со всеми рёбрами, соединяющими пары этих вершин). Если в H есть простой цикл, то в нём не больше половины вершин цвета A и не больше половины — цвета B, то есть вершин обоих цветов в нём ровно по половине. Следовательно, этот цикл чётный. Таким образом, в графе H нет нечётных циклов; как известно, вершины такого графа можно правильно окрасить в два цвета.

Сделаем такую окраску в цвета A и B; оба этих цвета стали правильными. Осталось доказать, что в любом простом цикле в исходном графе G по-прежнему не более половины вершин одного цвета. Это условие могло нарушиться лишь для цветов A или B; покажем, что оно не нарушилось, скажем, для цвета A. Сопоставим каждой вершине цикла, имеющей цвет A, следующую за ней по циклу. Сопоставленные вершины будут иметь цвета, отличные от A, и все они будут различными. Значит, вершин цвета A в цикле столько же, сколько сопоставленных им вершин других цветов, то есть не больше половины общего числа вершин в цикле, что и требовалось.

Замечание. Рассуждение из последнего абзаца решения показывает, что если вершины окрашены правильным образом, то в любом простом цикле не более половины одноцветных вершин. Таким образом, существование правильной раскраски *равносильно* существованию раскраски из условия.

10 класс

Первый день

10.1. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \ldots, 1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Пусть такое разбиение существует, причём в одной из групп оказались числа $1+x_1\sqrt{2}, 1+x_2\sqrt{2}, \ldots, 1+x_k\sqrt{2}$. Перемножим эти выражения, раскроем скобки. Мы получим слагаемое $1^k = 1$, слагаемые $x_1\sqrt{2}, \ldots, x_k\sqrt{2}$, а все остальные слагаемые будут иметь вид $N \cdot \left(\sqrt{2}\right)^k$, где $k \geqslant 2$ и N — целые числа. Значит, в сумме получится число вида $A + B\sqrt{2}$, где A и B — целые числа, причём $B \equiv x_1 + \ldots + x_k \pmod 2$. Аналогично, если в другой группе окажутся числа $1+y_1\sqrt{2}, \ldots, 1+y_n\sqrt{2}$, то их произведение будет иметь вид $C + D\sqrt{2}$, где $C, D \in \mathbb{Z}$ и $D \equiv y_1 + \ldots + y_n \pmod 2$.

Заметим, что $x_1 + \ldots + x_k + y_1 + \ldots + y_n = 1 + 2 + \ldots + 2026 = 2027 \cdot 1013$, это число нечётно. Значит, число $B + D$ тоже нечётно, а тогда $B \neq D$. Однако, поскольку числа $A + B\sqrt{2}$ и $C + D\sqrt{2}$ имеют одинаковую дробную часть, то их разность — целое число. Поскольку $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ это возможно лишь в случае, когда $B - D = 0$, противоречие.

10.2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет равенству

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = a_n^2$$

при всех натуральных n. Найдите все такие последовательности, в которых встречается число 3.

Ответ: Только одна последовательность $1, 3, 5, \ldots$ (т.е. $a_n = 2n-1$).

Решение. Указанная в ответе последовательность удовлетворяет условию

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = a_n^2. \qquad (*)$$

Действительно, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(2n-1)-1) = (2n-1)^2 = a_n^2$.

Далее из условия $(*)$ выведем, что $a_n = 2n-1$ при всех n.

Вычитая равенства $(*)$ для индексов $n+1$ и n, получим

$$a_{2n+1} + a_{2n} = a_{n+1}^2 - a_n^2. \quad (1)$$

Левая часть равенства (1) положительна, поэтому $a_{n+1} > a_n$, значит, наша последовательность строго возрастает.

Далее, если для какого-то натурального n будет выполнено $a_{n+1} - a_n = 1$, то из (1) последовало бы $a_{2n+1} + a_{2n} = a_{n+1} + a_n$. Однако в силу монотонности $a_{2n+1} > a_{n+1}$ и $a_{2n} > a_n$, и поэтому $a_{2n+1} + a_{2n} > a_{n+1} + a_n$. Полученное противоречие показывает, что $a_{n+1} - a_n = 1$ невозможно, поэтому для всех номеров n выполнено $a_{n+1} - a_n \geqslant 2$. Тогда, начиная с неравенства $a_1 \geqslant 1$ последовательно выводим: $a_2 \geqslant 3$, $a_3 \geqslant 5$, и т.д.,

$$a_k \geqslant 2k-1, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Наконец покажем индукцией по n с базой $n = 2$, что (2) обращается в равенство при всех $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$.

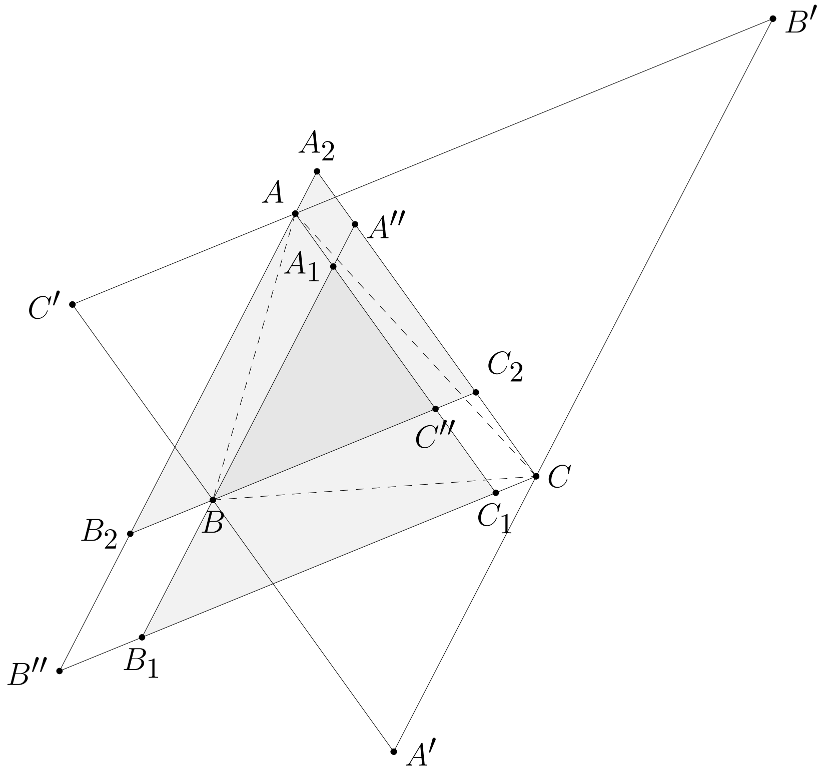
Докажем базу. Заметим, что $(*)$ при $n = 1$ дает $a_1 = 1$. В силу (2), $a_2 \geqslant 3$ и $a_k > 3$ при $k > 2$. Поскольку число 3 должно содержаться в последовательности, имеем $a_2 = 3$. Тогда из $(*)$ для $n = 2$ получаем $a_3 = a_2^2 - a_1 - a_2 = 5$.

Докажем переход $n \to n+1$, где $n \geqslant 2$, т.е. из того, что $a_k = 2k-1$ для $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$, выведем, что $a_{2n} = 4n-1$ и $a_{2n+1} = 4n+1$. Так как $n+1 \leqslant 2n-1$, по предположению индукции $a_{n+1} = 2n + 1$ и $a_n = 2n - 1$. Тогда из (1) получаем $a_{2n+1} + a_{2n} = (2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 8n$. Но как мы помним (согласно (2)) $a_{2n+1} \geqslant 4n + 1$ и $a_{2n} \geqslant 4n - 1$, откуда $8n = a_{2n+1} + a_{2n} \geqslant 8n$. Значит, оба неравенства $a_{2n+1} \geqslant 4n + 1$, $a_{2n} \geqslant 4n - 1$ обращаются в равенство. Этим заканчивается доказательство индукционного перехода.

10.3. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а его высоты пересекаются в точке H. Касательные к окружности (BHC) в точке B, к окружности (AHB) в точке A и к окружности (CHA) в точке C ограничивают треугольник T_1. Касательные к окружности (BHC) в точке C, к окружности (AHB) в точке B и к окружности (CHA) в точке A образуют треугольник T_2. Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников T_1 и T_2 соответственно. Докажите, что HI_1OI_2 — параллелограмм, либо точки H, I_1, O, I_2 лежат на одной прямой.

(Здесь под окружностью (XYZ) мы понимаем окружность, описанную вокруг треугольника XYZ.)

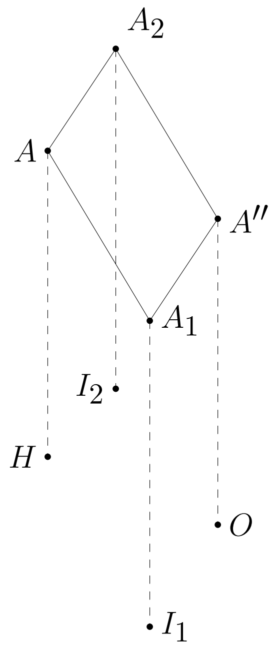
Решение. Пусть касательные, проведенные к окружности (ABC) в вершинах A, B, C, образуют треугольник $A'B'C'$ (см. рис.).



Поскольку $\angle BAC + \angle BHC = 180°$, окружности (ABC) и (AHC) симметричны относительно середины BC. Пусть касательные, проведенные к B и C к окружности (BHC), пересекаются в A''. Тогда касательные CA' и BA'' симметричны относительно середины BC; то же верно для BA' и CA''. Отсюда $BA'CA''$ — параллелограмм, и даже ромб (в силу равенства отрезков касательных $A'B = A'C$). Аналогично, строим ромбы $CB'AB''$ и $AC'BC''$.

Видим, что стороны наших треугольников T_1 и T_2 параллельны соответствующим сторонам треугольника $A'B'C'$. Обозначим их вершины $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, где $A_1 = CA'' \cap AB''$, и т.д. Также из этих параллельностей мы видим, что $AA_1A''A_2$ — параллелограмм.

Заметим, что O лежит на биссектрисе l угла $BA'C$, а значит и на биссектрисе угла $BA''C$ (из ромба $BA'CA''$), Но $A'O \perp BC$, отсюда $A''O \perp BC$. Биссектриса A_1I_1 угла $C_1A_1B_1$ параллельна l (так как биссектрисы углов с сонаправленными сторонами параллельны). Аналогично $A_2I_2 \parallel l$. Наконец $AH \perp BC$. Таким образом, в нашей конструкции через вершины параллелограмма $AA_1A''A_2$ проведены параллельные прямые (перпендикулярные BC) AH, A_1I_1, $A''O$, A_2I_2.



Значит, середины N и P отрезков OH и I_1I_2 лежат на одной прямой $m \perp BC$ (проходящей через центр параллелограмма). Иначе говоря, проекции точек N и P на прямую BC совпадают.

Аналогично рассуждая, показываем, что проекции точек N и P на прямую CA совпадают. Значит, N и P совпадают, что и требовалось показать.

10.4. Даны натуральные числа m и k, причём $m > 100$ и $1 < k < 2m$. Изначально в ряд выложены $2m$ пластилиновых шариков, каждый шарик имеет массу 1. Петя и Вася играют в игру, делая $2m-1$ ходов по очереди, начинает Петя. За ход игрок должен выбрать два соседних шарика и слепить их в один шарик (который остается в том же месте в ряду). Победа присуждается Пете, если в какой-либо момент игры в ряду появлялся шарик массы k. Иначе победа присуждается Васе. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Ответ: Петя побеждает при $2 \leqslant k \leqslant m+1$; иначе побеждает Вася.

Решение. Переформулируем задачу следующим образом. Пусть изначально у нас на числовой прямой покрашены красным точки $0, 1, 2, \ldots, 2m$ (а шарики из условия соответствуют единичным отрезкам $[i, i+1]$). За свой ход игрок перекрашивает одну из красных точек, отличных от точек 0 и $2m$, в синий цвет (склеивает два отрезка между соседними красными точками). Так Петя и Вася по очереди делают ходы (Петя — m ходов, Вася — $(m-1)$ ход), пока в конце не останутся лишь две красные точки 0 и $2m$. Петя выигрывает, если в какой-то момент игры найдутся красные точки i и $i+k$ такие, что все целые точки между ними синие.

1) Пусть $2 \leqslant k \leqslant m$. Предъявим стратегию за Петю. Первым ходом пусть он покрасит синим точку k. Выделим $k-1$ пар красных точек $(1, k+1)$, $(2, k+2)$, $\ldots$, $(k-1, 2k-1)$, а красные точки $2k, 2k+1, \ldots, 2m-1$ разобьем на пары произвольно. Если за свой ход Вася перекрашивает в синий цвет некоторую точку, то пусть Петя на следующем ходе перекрасит вторую точку из той же пары. В результате после ходов Пети все выделенные пары точек одноцветные, причем количество выделенных пар красных точек не изменяется или уменьшается на 1. В какой-то момент после хода Пети будет ровно одна выделенная пара $(j, j+k)$ красных точек. В этот момент среди точек $1, 2, \ldots, 2k-1$ только j и $j+k$ красные, значит все целые точки между ними синие, и Петя выигрывает.

2) Пусть $k = m+1$. Предъявим стратегию за Петю. Первым ходом пусть он покрасит синим точку m. Остальные красные точки, за исключением 0 и $2m$, разобьем на пары: $(1, m+2)$, $(2, m+3)$, $\ldots$, $(m-2, 2m-1)$ и $(m-1, m+1)$. Если за свой ход Вася перекрашивает в синий цвет некоторую точку, то пусть Петя на следующем ход перекрасит вторую точку из той же пары. В результате перед последним ходом Васи останется ровно одна указанная

пара красных точек (а точки во всех остальных парах будут синими). Если это пара вида $(i, i+m+1)$, то Петя уже побеждает. Пусть это пара $(m-1, m+1)$. Перекрашивая последним ходом $m-1$, Вася проигрывает из-за пары красных точек $(0, m+1)$. Аналогично, перекрашивая последним ходом $m+1$, он проигрывает из-за пары $(m-1, 2m)$.

3) Пусть $m+2 \leqslant k \leqslant 2m-1$. Предъявим стратегию за Васю. Рассмотрим последовательность точек $A = (k, 1, 2, \ldots, 2m-k)$. Пусть Вася на своем ходе перекрашивает самую первую на текущий момент красную точку в этой последовательности. Так как $|A| = 2m-k+1 \leqslant m-1$, ходов у Васи хватит, чтобы все точки из A в итоге стали синими. После этого пусть Вася играет как угодно. Покажем что такая стратегия работает. Предположим противное, в какой-то момент точки i и $i+k$ красные (для некоторого $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2m-k\}$, а все $k-1$ целых точек из интервала $(i, i+k)$ — синие. Не может быть $i = 0$, так как точка k стала на первом же ходу Васи синей, и к этому моменту среди точек $1, \ldots, k-1$ было не более одной синей. Пусть $i \geqslant 1$. Поскольку i еще красная, Вася пока только перекрашивал точки множества $\{k, 1, 2, \ldots, i-1\}$, т.е. сделал к рассматриваемому моменту не более i ходов, при этом лишь один раз он перекрашивал точку из интервала $(i, i+k)$ (точку k). Тогда к этому моменту Петя сделал не более $i+1$ хода. Значит, к этому моменту среди целых точек интервала $(i, i+k)$ синими стали не более $1+i+1$ точки. Но $i+2 \leqslant 2m-k+2 \leqslant k-2$, тем самым в $(i, i+k)$ осталась хотя бы одна красная точка — противоречие.

11 класс

Первый день

11.1. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \ldots, 1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

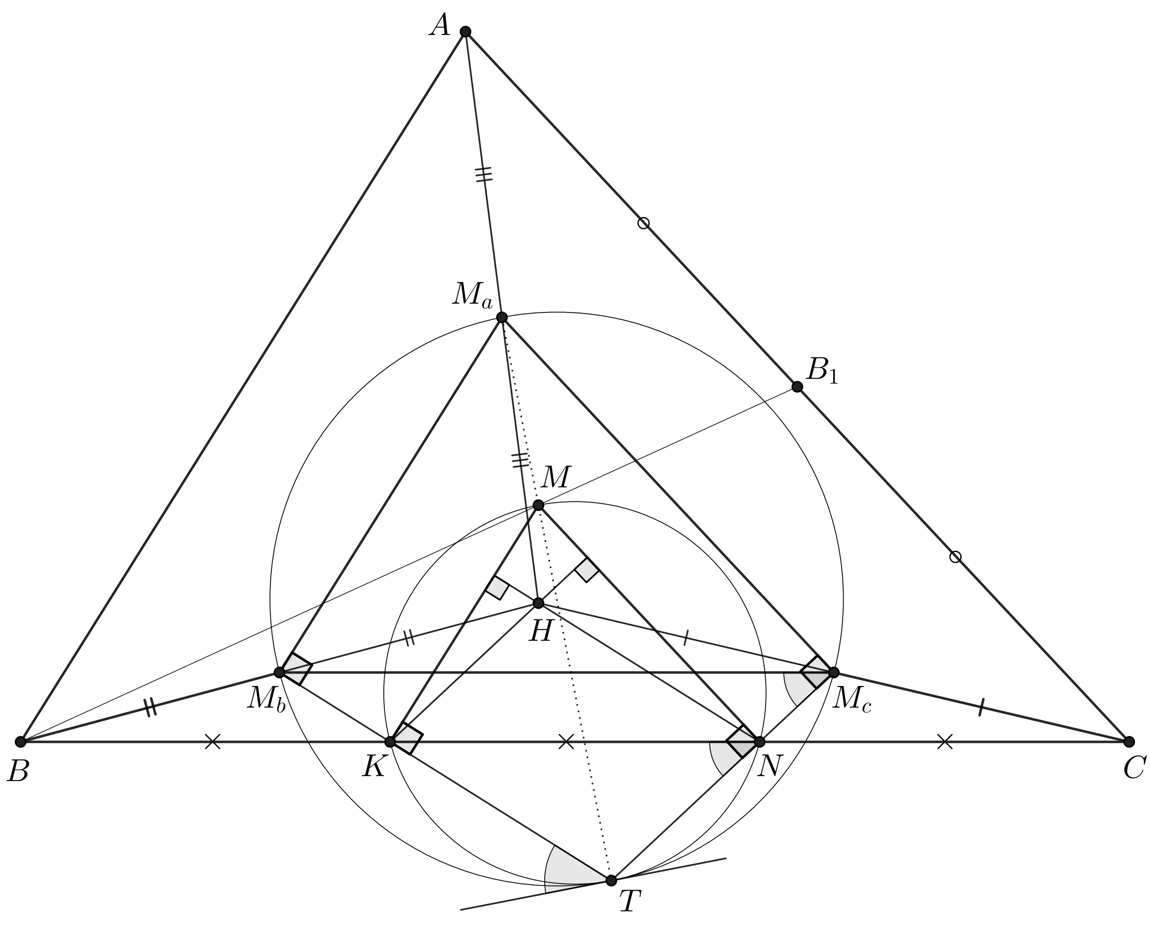
Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Пусть такое разбиение существует, причём в одной из групп оказались числа $1+x_1\sqrt{2}, 1+x_2\sqrt{2}, \ldots, 1+x_k\sqrt{2}$. Перемножим эти выражения, раскроем скобки. Мы получим слагаемое $1^k=1$, слагаемые $x_1\sqrt{2}, \ldots, x_k\sqrt{2}$, а все остальные слагаемые будут иметь вид $N\cdot\left(\sqrt{2}\right)^k$, где $k \geqslant 2$ и N — целые числа. Значит, в сумме получится число вида $A+B\sqrt{2}$, где A и B — целые числа, причём $B \equiv x_1+\ldots+x_k \pmod 2$. Аналогично, если в другой группе окажутся числа $1+y_1\sqrt{2}, \ldots, 1+y_n\sqrt{2}$, то их произведение будет иметь вид $C+D\sqrt{2}$, где $C, D \in \mathbb{Z}$ и $D \equiv y_1+\ldots+y_n \pmod 2$.

Заметим, что $x_1+\ldots+x_k+y_1+\ldots+y_n = 1+2+\ldots+2026 = 2027\cdot 1013$, это число нечётно. Значит, число $B+D$ тоже нечётно, а тогда $B \neq D$. Однако, поскольку числа $A+B\sqrt{2}$ и $C+D\sqrt{2}$ имеют одинаковую дробную часть, то их разность — целое число. Поскольку $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ это возможно лишь в случае, когда $B-D=0$, противоречие.

11.2. Медианы остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M. На стороне BC отмечены точки K и N так, что $BK=KN=NC$. Высоты треугольника MKN пересекаются в точке H. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков AH, BH и CH, касается описанной окружности треугольника MKN.

Решение. Обозначим через M_a, M_b и M_c — середины отрезков AH, BH и CH соответственно. Поскольку M_aM_b — средняя линия треугольника AHB, то $M_aM_b \parallel AB$. Аналогично $M_bM_c \parallel BC$ и $M_cM_a \parallel CA$.



Пусть BB_1 — медиана треугольника ABC. Тогда $BM : MB_1 = 2 : 1 = BN : NC$, поэтому $MN \parallel AC$. Аналогично $KM \parallel AB$. Итого соответствующие стороны треугольников $M_aM_bM_c$ и MKN параллельны.

Заметим, что M_bK — средняя линия треугольника BHN. Поскольку $NH \perp KM$, то прямая M_bK перпендикулярна MK и M_aM_b. Аналогично $M_cN \perp M_cM_a, M_cN \perp MN$, поэтому прямые M_bK и M_cN пересекаются некоторой точке T, лежащей и на окружности (MKN), и на окружности $(M_aM_bM_c)$. Как мы знаем, $M_bM_c \parallel KN$. Обозначим тогда $\angle TM_cM_b = \angle TNK = \alpha$. Получаем, что у окружностей (MKN) и $(M_aM_bM_c)$ общая касательная в точке T (прямая, образующая с прямой TK угол α, см. рис.), откуда и следует касание окружностей.

Замечание. Приведём план другого решения. Как и в предыдущем подходе покажем, что соответствующие стороны треугольников $M_aM_bM_c$ и MKN параллельны. Значит, эти треугольники подобны с коэффициентом

$$\frac{M_aM_c}{KN} = \frac{M_aM_c}{BC} \cdot \frac{BC}{KN} = \frac{3}{2}.$$

Обозначим через AA_1 медиану треугольника ABC, через M' — точку, симметричную M относительно A_1. Тогда, как известно, полученная точка диаметрально противоположна M на окружности (MKN). Поскольку $AM{:}MA_1 = 2{:}1$, то M — точка пересечения медиан треугольника $AM'H$, поэтому $\overrightarrow{M'M_a} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{M'M}$. Таким образом, при гомотетии с центром в точке M' и коэффициентом $3/2$ треугольник MKN переходит в треугольник $M_aM_bM_c$. Поскольку еще и точка M' лежит на окружности (MKN), то описанные окружности этих треугольников касаются в точке M'.

Разумеется, построенная точка M' совпадает с точкой T из предыдущего решения. Треугольник $AM'H$ может быть вырожденным, но и в этом случае выполняется соответствующее векторное равенство.

11.3. На олимпиаду приехало несколько участников из $n > 1$ регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины соответствуют участникам, а рёбра соединяют пары друзей. Тогда нам известно, что вершины можно окрасить в n цветов так, что в каждом простом цикле не более половины вершин будут одноцветными (назовём такую окраску *приятной*). Нужно же доказать, что можно вершины окрасить в n цветов правильным образом.

Назовём цвет *правильным*, если никакие две вершины этого цвета не соединены; иначе назовём его *неправильным*. Рассмотрим любую приятную окраску вершин и два цвета A и B в ней. Мы докажем, что можно перекрасить вершины этих цветов (окрасив каждую снова либо в A, либо в B) так, что оба этих цвета станут правильными, и раскраска останется приятной. Заметим, что при такой операции любой другой правильный цвет останется правильным. Значит, проделав такую операцию несколько раз, задействовав каждый цвет хотя бы по разу, мы получим правильную окраску вершин, что и требовалось.

Осталось показать, как совершить перекраску для двух цветов. Рассмотрим лишь граф H на вершинах цветов A и B (со всеми рёбрами, соединяющими пары этих вершин). Если в H есть простой цикл, то в нём не больше половины вершин цвета A и не больше половины — цвета B, то есть вершин обоих цветов в нём ровно по половине. Следовательно, этот цикл чётный. Таким образом, в графе H нет нечётных циклов; как известно, вершины такого графа можно правильно окрасить в два цвета.

Сделаем такую окраску в цвета A и B; оба этих цвета стали правильными. Осталось доказать, что в любом простом цикле в исходном графе G по-прежнему не более половины вершин одного цвета. Это условие могло нарушиться лишь для цветов A или B; покажем, что оно не нарушилось, скажем, для цвета A. Сопоставим каждой вершине цикла, имеющей цвет A, следующую за ней по циклу. Сопоставленные вершины будут иметь цвета, отличные от A, и все они будут различными. Значит, вершин цвета A в цикле столько же, сколько сопоставленных им вершин других цветов, то есть не больше половины общего числа вершин в цикле, что и требовалось.

Замечание. Рассуждение из последнего абзаца решения показывает, что если вершины окрашены правильным образом, то в любом простом цикле не более половины одноцветных вершин. Таким образом, существование правильной раскраски *равносильно* существованию раскраски из условия.

11.4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, у которого старший коэффициент равен 1. Оказалось, что можно выбрать 100 попарно различных вещественных корней $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ у многочлена $P(x)$ и 100 попарно различных вещественных корней $y_1, y_2, \ldots, y_{100}$ у многочлена $P(x)-1$ так, чтобы числа x_i и y_i отличались на 1 при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Каково наименьшее возможное значение n?

Ответ: 101.

Решение. Начнём с *примера.* Положим

$$Q(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-100) + \frac{1}{100}.$$

Пусть $a \in \left\{\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \ldots, 100\frac{1}{2}\right\}$. Тогда $|a(a-1)\ldots(a-99)| > \frac{1}{4}$, поскольку два множителя равны по модулю $\frac{1}{2}$, а остальные больше, чем 1. Следовательно, знаки значений $Q(x)$ в этих точках чередуются: $Q\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, $Q\left(1\frac{1}{2}\right) < 0, \ldots, Q\left(100\frac{1}{2}\right) > 0$, поэтому между каждыми двумя соседними из них у многочлена Q есть корень. Таким образом, у этого многочлена 100 различных вещественных корней $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. Положим $P(x) = xQ(x)$. Тогда

$$P(x)-1 = x(x-1)\ldots(x-100)+\frac{x}{100}-1 = (x-100)\left(x(x-1)\ldots(x-99)+\frac{1}{100}\right) = xQ(x+1).$$

Итого числа $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — корни многочлена $P(x)$, а числа $x_1-1, x_2-1, \ldots, x_{100}-1$ являются корнями многочлена $P(x)-1$, тем самым, построенный многочлен $P(x)$ степени 101 подходит под условие задачи.

Теперь докажем *оценку*, что $\deg P \geqslant 101$. Предположим, что это неверно; поскольку у многочлена P есть 100 вещественных корней, это возможно лишь в случае $\deg P = 100$. Положим $P(x) = x^{100} + a_{99}x^{99} + \ldots + a_1x + a_0$. По теореме Виета для многочленов $P(x)$ и $P(x)-1$ мы получаем, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = -a_{99} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{100}.$$

По условию $x_i - y_i = \pm 1$ при $i = 1, 2, \ldots, 100$, значит, ровно для 50 пар в этом равенстве будет знак «+» и ровно для 50 будет знак «−». Обозначим через $R(x)$ унитарный многочлен степени 50, корнями которого будут 50 чисел x_i, для которых $x_i - y_i = 1$, через $S(x)$ — унитарный многочлен степени 50, корнями которого будут оставшиеся x_i, для которых $x_i - y_i = -1$. Тогда числа $y_1, \ldots, y_{100}$ будут корнями многочлена $R(x+1)S(x-1)$, то есть $P(x) = R(x)S(x)$ и $P(x)-1 = R(x+1)S(x-1)$, поэтому

$$R(x)S(x) - R(x+1)S(x-1) \equiv 1. \qquad (\star)$$

Положим $T(x) = R(x+1) - S(x)$. Поскольку R и S — унитарные многочлены степени 50, то $d = \deg T \leqslant 49$. Кроме того,

$$T(x-1)S(x)-T(x)S(x-1) \equiv R(x)S(x)-S(x-1)S(x)-R(x+1)S(x-1)+S(x)S(x-1) \equiv 1.$$

В частности, многочлен $S(x)$ тождественно не равен нулю. Положим

$$T(x) = t_d x^d + t_{d-1}x^{d-1} + \ldots + t_0, \quad t_d \neq 0; \qquad S(x) = x^{50} + s_{49}x^{49} + \ldots + s_0.$$

Тогда у многочлена $T(x)S(x-1)$ коэффициент при x^{50+d-1} равен $-50t_d + s_{49}t_d + t_{d-1}$, а у многочлена $S(x-1)T(x)$ получится $-dt_d + s_{49}t_d + t_{d-1}$. Эти коэффициенты отличаются на $(50-d)t_d \neq 0$, однако, в силу полученного выше соотношения, они должны быть одинаковы, противоречие.

Замечание. Прийти к противоречию, используя равенство $(\star)$, можно несколько иначе. Приравнивая соответствующие коэффициенты, мы получим, что по данному многочлену $R(x)$ однозначно восстанавливаются коэффициенты $S(x)$, причём для этого достаточно условий на коэффициенты при степенях не младше 49-й. Однако, если в правой части заменить 1 на 0, то полученному равенству будет удовлетворять многочлен $R(x-1)$. Таким образом, именно его коэффициенты и будут восстановлены как коэффициенты многочлена $S(x)$, противоречие.