9 класс

Первый день

9.1. Сначала на тарелке лежат 75 конфет. Петя и Вася по очереди берут из тарелки любое натуральное количество конфет до тех пор, пока конфет на тарелке не останется. Начинает Петя. При каком наименьшем k Петя может играть так, чтобы гарантировать, что в конце игры количества конфет у мальчиков отличаются не более чем на k? (Во время игры мальчики конфеты не едят.)

9.2. Назовём натуральное число n *странным*, если существуют такие попарно различные натуральные числа a, b, c, d и e, большие 1, что $n = a^{a^a} = b^{b^c} = d^{e^e}$. Конечно или бесконечно количество странных чисел? (Напомним, что x^{y^z} означает число, получившееся в результате возведения числа x в степень y^z.)

9.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне BC отмечены точки X и Y таким образом, что $2BX = AB$ и $2CY = AC$. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки X и Y, которая касается вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника ABC.

9.4. На олимпиаду приехало несколько участников из n регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

9 класс

Первый день

9.1. Сначала на тарелке лежат 75 конфет. Петя и Вася по очереди берут из тарелки любое натуральное количество конфет до тех пор, пока конфет на тарелке не останется. Начинает Петя. При каком наименьшем k Петя может играть так, чтобы гарантировать, что в конце игры количества конфет у мальчиков отличаются не более чем на k? (Во время игры мальчики конфеты не едят.)

9.2. Назовём натуральное число n *странным*, если существуют такие попарно различные натуральные числа a, b, c, d и e, большие 1, что $n = a^{a^a} = b^{b^c} = d^{e^e}$. Конечно или бесконечно количество странных чисел? (Напомним, что x^{y^z} означает число, получившееся в результате возведения числа x в степень y^z.)

9.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне BC отмечены точки X и Y таким образом, что $2BX = AB$ и $2CY = AC$. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки X и Y, которая касается вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника ABC.

9.4. На олимпиаду приехало несколько участников из n регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

10 класс

Первый день

10.1. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \ldots, 1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

10.2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет равенству

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = a_n^2$$

при всех натуральных n. Найдите все такие последовательности, в которых встречается число 3.

10.3. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а его высоты пересекаются в точке H. Касательные к окружности (BHC) в точке B, к окружности (AHB) в точке A и к окружности (CHA) в точке C ограничивают треугольник T_1. Касательные к окружности (BHC) в точке C, к окружности (AHB) в точке B и к окружности (CHA) в точке A образуют треугольник T_2. Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников T_1 и T_2 соответственно. Докажите, что HI_1OI_2 — параллелограмм, либо точки H, I_1, O, I_2 лежат на одной прямой.

(Здесь под окружностью (XYZ) мы понимаем окружность, описанную вокруг треугольника XYZ.)

10.4. Даны натуральные числа m и k, причём $m > 100$ и $1 < k < 2m$. Изначально в ряд выложены $2m$ пластилиновых шариков, каждый шарик имеет массу 1. Петя и Вася играют в игру, делая $2m-1$ ходов по очереди, начинает Петя. За ход игрок должен выбрать два соседних шарика и слепить их в один шарик (который остается в том же месте в ряду). Победа присуждается Пете, если в какой-либо момент игры в ряду появлялся шарик массы k. Иначе победа присуждается Васе. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

10 класс

Первый день

10.1. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \ldots, 1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

10.2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет равенству

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = a_n^2$$

при всех натуральных n. Найдите все такие последовательности, в которых встречается число 3.

10.3. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а его высоты пересекаются в точке H. Касательные к окружности (BHC) в точке B, к окружности (AHB) в точке A и к окружности (CHA) в точке C ограничивают треугольник T_1. Касательные к окружности (BHC) в точке C, к окружности (AHB) в точке B и к окружности (CHA) в точке A образуют треугольник T_2. Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников T_1 и T_2 соответственно. Докажите, что HI_1OI_2 — параллелограмм, либо точки H, I_1, O, I_2 лежат на одной прямой.
(Здесь под окружностью (XYZ) мы понимаем окружность, описанную вокруг треугольника XYZ.)

10.4. Даны натуральные числа m и k, причём $m > 100$ и $1 < k < 2m$. Изначально в ряд выложены $2m$ пластилиновых шариков, каждый шарик имеет массу 1. Петя и Вася играют в игру, делая $2m-1$ ходов по очереди, начинает Петя. За ход игрок должен выбрать два соседних шарика и слепить их в один шарик (который остается в том же месте в ряду). Победа присуждается Пете, если в какой-либо момент игры в ряду появлялся шарик массы k. Иначе победа присуждается Васе. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

11 класс

Первый день

11.1. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \ldots, 1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

11.2. Медианы остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M. На стороне BC отмечены точки K и N так, что $BK = KN = NC$. Высоты треугольника MKN пересекаются в точке H. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков AH, BH и CH, касается описанной окружности треугольника MKN.

11.3. На олимпиаду приехало несколько участников из n регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

11.4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, у которого старший коэффициент равен 1. Оказалось, что можно выбрать 100 попарно различных вещественных корней $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ у многочлена $P(x)$ и 100 попарно различных вещественных корней $y_1, y_2, \ldots, y_{100}$ у многочлена $P(x)-1$ так, чтобы числа x_i и y_i отличались на 1 при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Каково наименьшее возможное значение n?

11 класс

Первый день

11.1. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \ldots, 1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

11.2. Медианы остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M. На стороне BC отмечены точки K и N так, что $BK = KN = NC$. Высоты треугольника MKN пересекаются в точке H. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков AH, BH и CH, касается описанной окружности треугольника MKN.

11.3. На олимпиаду приехало несколько участников из n регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

11.4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, у которого старший коэффициент равен 1. Оказалось, что можно выбрать 100 попарно различных вещественных корней $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ у многочлена $P(x)$ и 100 попарно различных вещественных корней $y_1, y_2, \ldots, y_{100}$ у многочлена $P(x)-1$ так, чтобы числа x_i и y_i отличались на 1 при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Каково наименьшее возможное значение n?