ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Функциональный анализ»

Направление подготовки: *38.03.05 Бизнес-информатика*

Направленность (профиль) подготовки: *Бизнес-аналитика*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2025*

Москва
2025

Электронный документ

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Функциональный анализ» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 38.03.05 Бизнес-информатика, профиль Бизнес-аналитика, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 838 от 29.07.2020 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Функциональный анализ» имеет фундаментальное значение для развития математического мышления и навыков абстрактного моделирования, что позволяет студентам эффективно решать задачи в области численных методов, оптимизации и машинного обучения. Эта дисциплина (модуль) способствует интеграции теоретических основ с практическими приложениями, такими как анализ больших данных, разработка алгоритмов искусственного интеллекта и моделирование сложных систем.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 38.03.05 Бизнес-информатика, профиль Бизнес-аналитика и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор.

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у студентов глубокого понимания основных концепций и методов функционального анализа для применения в математических моделях, алгоритмах и вычислительных задача.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- изучить основные понятия, такие как банаховы и гильбертовы пространства, линейные операторы и функционалы, для понимания структуры бесконечномерных пространств и их свойств;
- научиться применять методы функционального анализа к решению дифференциальных уравнений, задач оптимизации и спектрального анализа, что формирует основу для численных алгоритмов в компьютерных науках;
- доказательства теорем и анализа сходимости, необходимых для работы с алгоритмами машинного обучения и обработки сигналов;
- научиться моделировать и решать прикладные проблемы в области данных и вычислений.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- определения и свойства метрических/нормированных/гильбертовых пространств, компактных множеств;
- ключевые результаты (Хана-Банаха, Арцела-Асколи, свойства спектра);
- понятия σ-алгебры, меры (включая Лебега), интеграла Лебега;
- свойства линейных, ограниченных, унитарных операторов; понятие спектра;
- основы слабой сходимости, обобщенных функций, преобразования Фурье;

уметь:

- анализировать свойства множеств в метрических/нормированных пространствах (открытость, замкнутость, компактность);
- использовать теоремы (Хана-Банаха, Арцела-Асколи) для доказательств;
- строить простые меры, вычислять интегралы Лебега для базовых функций;

— определять свойства линейных операторов (ограниченность), находить спектр в простых случая;

— различать и применять понятия сильной, слабой, слабой* сходимостей;

владеть:

— навыками работы с абстрактными пространствами и операторами;

— методами строгих доказательств теорем и свойств в функциональном анализе;

— пониманием и базовым применением конструкции меры Лебега и интеграла;

— подходом к изучению операторов через их спектр;

— точным использованием профессионального языка функционального анализа.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области аналитики, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
ОПК-4.	Способен понимать принципы работы информационных технологий; использовать информацию, методы и программные средства ее сбора, обработки и анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений	ОПК-4.1.	Знает основные принципы работы информационных технологий и их влияние на бизнес-процессы
		ОПК-4.2.	Умеет использовать методы и программные средства для сбора, обработки и анализа информации, обеспечивая качественную информационно-аналитическую поддержку
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт в применении аналитических инструментов для поддержки принятия управленческих решений в организациях
ПК-2.	Способен использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования для решения задач профессиональной деятельности	ПК-2.1.	Знает основные математические методы и инструментальные средства, применяемые для обработки и анализа информации
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать математический аппарат для систематизации данных и решения профессиональных задач
		ПК-2.3.	Имеет практический опыт работы с инструментами анализа информации в рамках исследовательских проектов

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары			
1	Метрические пространства	2	4		7	Домашнее задание Подготовка к семинару
2	Нормированные пространства	2	4		7	Домашнее задание
3	Теоремы полноты	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
4	Компактность	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
5	Линейные функционалы	2	4		7	Домашнее задание Подготовка к семинару
6	Сопряжённые пространства	2	4		7	Подготовка к семинару
7	Гильбертовы пространства	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
8	Линейные операторы	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
9	Основные теоремы	2	4		7	Домашнее задание Подготовка к семинару
10	Спектральная теория	2	4		7	Подготовка к семинару
11	Компактные операторы	2	4		6	Домашнее задание Контрольная работа
12	Самосопряжённые операторы	2	4	2	6	Домашнее задание Контрольная работа
13	Теоремы аппроксимации	2	4		6	Домашнее задание Подготовка к семинару
14	Обобщённые функции. Дополнительные темы	4	8		6	Подготовка к семинару
	Зачет с оценкой			4		
	Итого:	***30***	***60***	***6***	***94***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Метрические пространства	Аксиомы метрики. Примеры: дискретная метрика, R^n, C[a,b], l^p. Полнота. Контрпримеры неполных пространств. Пополнение пространств. Конструкция пополнения. Теорема о вложенных шарах. Приложения к существованию решений.
2	Нормированные пространства	Связь нормы и метрики. Эквивалентность норм. Пространства L^p и l^p. Неравенства Гёльдера и Минковского. Конечномерные подпространства. Теорема Рисса.
3	Теоремы полноты	Теорема Бэра о категориях. Приложения. Принцип сжимающих отображений. Теорема о продолжении равномерно непрерывных отображений.
4	Компактность	Критерий Хаусдорфа. Тотальная ограниченность. Теорема Арцела-Асколи. Равностепенная непрерывность. Компактность в l^p и C[a,b].
5	Линейные функционалы	Теорема Хана-Банаха (вещественный и комплексный случаи). Следствия: разделение выпуклых множеств. Примеры нетривиальных продолжений.
6	Сопряжённые пространства	Двойственное пространство. Примеры: $(l^1)^* = l^\infty$. Слабая и слабая* топологии. Теорема Банаха-Алаоглу. Рефлексивность. Пространства L^p.
7	Гильбертовы пространства	Тождество параллелограмма. Проекционная теорема. Ортогональные системы. Неравенство Бесселя. Теорема Рисса. Ряды Фурье в L^2.
8	Линейные операторы	Ограниченность и непрерывность. Ядро оператора. Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности). Обратные операторы. Обратный оператор к компактному.
9	Основные теоремы	Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Примеры применения. Теорема об открытом отображении.
10	Спектральная теория	Спектр и резольвента. Точечный, непрерывный, остаточный спектр. Спектральный радиус. Формула Гельфанда. Спектр умножения на функцию.
11	Компактные операторы	Критерии компактности. Теорема Шаудера. Альтернатива Фредгольма. Спектр компактного оператора. Интегральные операторы в L^2.
12	Самосопряжённые операторы	Симметричные и самосопряжённые операторы. Теорема Гильберта-Шмидта о спектре. Спектральная теорема для компактных операторов.
13	Теоремы аппроксимации	Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Алгебры функций. Теорема Фейера. Ядра Дирихле и Фейера. Полиномы Бернштейна.
14	Обобщённые функции. Дополнительные темы	Пространство D основных функций. Регуляризация. Пространства Соболева H^p. Теоремы вложения. Обобщённые производные. Формула интегрирования по частям. Теорема Крейна-Мильмана о крайних точках. Теорема Маркова-Какутани о неподвижной точке. Теорема Гротендика о ядерных пространствах.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Осокин, А. Н. Теория информации : учебник для вузов / А. Н. Осокин, А. Н. Мальчуков. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 208 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-16333-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561389.
2. Терсенов, А. С. Лекции по прикладному функциональному анализу : учебник для вузов / А. С. Терсенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 83 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18812-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/568927.
3. Старовойтов, В. Н. Функциональный анализ. Мера и интеграл Лебега : учебник для вузов / В. Н. Старовойтов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 121 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19991-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/569213.

Дополнительная литература:

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М. : Вильямс, 2009. — 784 с.
2. Локтионов, И. К. Численные методы : учебник / И. К. Локтионов, Л. П. Мироненко, В. В. Турупалов ; под общ. ред. канд. техн. наук, проф. В. В. Турупалова. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. - 380 с. - ISBN 978-5-9729-0786-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1902598.
3. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 3-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09085-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560316.
4. Никитин, А. А. Математический анализ. Сборник задач : учебное пособие для вузов / А. А. Никитин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 353 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8585-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560413.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:
- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое

Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Функциональный анализ» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Функциональный анализ»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Оценка за зачет**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не
2	Не сдан	Не зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
1	Не сдан	Не зачтено	может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.

Дисциплина (модуль) «Функциональный анализ» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	13	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	30%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Аудиторная работа	15%	1	Ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Зачет с оценкой	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время, возможен дополнительный устный экзамен

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Функциональный анализ»: «0,2× среднее за домашние задания + 0,3× среднее за контрольные работы + 0,15 ×за аудиторную работу + 0,35 ×зачет с оценкой».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)

Примерные вопросы для семинаров

Метрические пространства

1. Перечислите аксиомы метрики и объясните, почему они необходимы для определения расстояния между элементами.
2. Приведите пример дискретной метрики на множестве натуральных чисел и покажите, как она работает для двух различных элементов.
3. Опишите метрику в пространстве R^n и укажите, как она связана с евклидовой нормой.
4. Что такое метрика в пространстве C[a,b]? Приведите пример функции и вычислите расстояние между двумя функциями.
5. Определите метрику l^p на последовательностях и объясните, как она зависит от параметра p.
6. Что такое полное метрическое пространство? Приведите пример полного пространства и контрпример неполного.
7. Объясните понятие пополнения метрического пространства и приведите конструкцию пополнения для рациональных чисел.
8. Сформулируйте теорему о вложенных шарах и объясните ее приложения к существованию решений уравнений.
9. Приведите пример неполного метрического пространства и покажите, как его пополнить.
10. Как теорема о вложенных шарах применяется в анализе сходимости последовательностей?

Нормированные пространства

1. Объясните связь между нормой и метрикой в нормированном пространстве.
2. Что такое эквивалентность норм? Приведите пример двух эквивалентных норм на R^2.
3. Опишите пространство L^p и укажите, как оно определяется для функций на отрезке.
4. Сформулируйте неравенство Гёльдера и объясните его роль в анализе интегралов.
5. Приведите неравенство Минковского и покажите его применение к суммам рядов.
6. Что такое пространство l^p? Приведите пример последовательности из l^2.
7. Объясните теорему Рисса о конечномерных подпространствах и ее следствия.
8. Приведите пример нормированного пространства, где все конечномерные подпространства замкнуты.
9. Как неравенство Гёльдера используется в доказательстве полноты L^p?
10. Сравните свойства пространств l^1 и l^∞ с точки зрения их норм.

Теоремы полноты

1. Сформулируйте теорему Бэра о категориях и объясните понятие категории множеств.
2. Приведите приложение теоремы Бэра к существованию непрерывных функций с заданными свойствами.
3. Что такое сжимающее отображение? Приведите пример и объясните принцип сжимающих отображений.
4. Как применяется принцип сжимающих отображений к решению интегральных уравнений?
5. Сформулируйте теорему о продолжении равномерно непрерывных отображений и приведите пример.
6. Объясните, почему равномерная непрерывность важна для продолжения функций.
7. Приведите контрпример, где функция не может быть продолжена равномерно непрерывно.
8. Как теорема Бэра связана с полнотой метрических пространств?
9. Примените принцип сжимающих отображений к нахождению неподвижной точки в R.
10. Объясните роль теорем полноты в доказательстве существования решений дифференциальных уравнений.

Компактность

1. Сформулируйте критерий Хаусдорфа компактности в метрических пространствах.
2. Что такое тотальная ограниченность? Приведите пример тотально ограниченного множества.
3. Объясните теорему Арцела-Асколи и понятие равностепенной непрерывности.
4. Как применяется теорема Арцела-Асколи к компактности в C[a,b]?
5. Покажите, что пространство l^p компактно для конечномерных случаев.
6. Приведите пример компактного множества в R^2 и проверьте его свойства.

7. Объясните связь между компактностью и равностепенной непрерывностью семейства функций.
8. Как критерий Хаусдорфа используется для проверки компактности подмножеств.
9. Приведите контрпример некомпактного множества в C[0,1].
10. Объясните приложения компактности к сходимости последовательностей функций.

Линейные функционалы

1. Сформулируйте теорему Хана-Банаха в вещественном случае и объясните ее смысл.
2. Приведите пример нетривиального продолжения линейного функционала по теореме Хана-Банаха.
3. Что такое теорема Хана-Банаха в комплексном случае? Чем она отличается от вещественного?
4. Объясните следствие теоремы Хана-Банаха о разделении выпуклых множеств.
5. Приведите пример двух выпуклых множеств, разделимых гиперплоскостью.
6. Как теорема Хана-Банаха применяется к существованию непрерывных расширений.
7. Покажите на примере, почему не всякий функционал можно продолжить без потери непрерывности.
8. Объясните роль теоремы Хана-Банаха в двойственных пространствах.
9. Приведите пример линейного функционала на C[a,b] и его продолжение.
10. Как следствие о разделении множеств используется в оптимизации?

Сопряжённые пространства

1. Что такое двойственное пространство? Приведите пример $(l^1)^*$.
2. Объясните слабую топологию в нормированном пространстве.
3. Сформулируйте теорему Банаха-Алаоглу и объясните ее значение.
4. Что такое слабая* топология? Приведите пример ее применения.
5. Объясните понятие рефлексивности пространства и приведите пример рефлексивного пространства.
6. Покажите, что L^p рефлексивно для $1 < p < \infty$.
7. Приведите пример нерефлексивного пространства, такого как L^1.
8. Как теорема Банаха-Алаоглу связана с компактностью в слабой* топологии?
9. Объясните приложения слабой сходимости в функциональном анализе.
10. Сравните свойства двойственных пространств для l^2 и C[0,1].

Гильбертовы пространства

1. Сформулируйте тождество параллелограмма и объясните его роль в определении гильбертовых пространств.
2. Что такое проекционная теорема? Приведите пример проекции на подпространство.
3. Объясните понятие ортогональных систем и неравенство Бесселя.
4. Сформулируйте теорему Рисса о представлении функционалов в гильбертовых пространствах.
5. Как строятся ряды Фурье в L^2? Приведите пример разложения функции.
6. Покажите, что ортонормированная система полна в гильбертовом пространстве.

7. Приведите пример ортогональной системы в R^3.
8. Объясните приложения проекционной теоремы к решению уравнений.
9. Как неравенство Бесселя используется в анализе рядов Фурье?
10. Сравните гильбертовы пространства с банаховыми по свойствам.

Линейные операторы

1. Что такое ограниченный линейный оператор? Приведите пример и контрпример.
2. Объясните понятие ядра оператора и его свойства.
3. Сформулируйте теорему Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности).
4. Приведите пример применения принципа равномерной ограниченности к последовательности операторов.
5. Что такое обратный оператор? Когда он существует для ограниченного оператора?
6. Объясните, почему обратный оператор к компактному оператору не всегда существует.
7. Приведите пример компактного оператора и его спектральные свойства.
8. Как теорема Банаха-Штейнгауза применяется в анализе сходимости рядов операторов?
9. Покажите на примере, что непрерывность оператора следует из ограниченности.
10. Объясните связь между ядром оператора и его инъективностью.

Основные теоремы

1. Сформулируйте теорему Банаха об обратном операторе и объясните ее условия.
2. Что такое теорема о замкнутом графике? Приведите пример ее применения.
3. Объясните теорему об открытом отображении и ее роль в изоморфизмах.
4. Приведите пример, где теорема об обратном операторе гарантирует существование обратного.
5. Как теорема о замкнутом графике используется для доказательства непрерывности операторов?
6. Покажите на примере применение теоремы об открытом отображении к линейным операторам.
7. Объясните, почему эти теоремы важны для теории банаховых пространств.
8. Приведите контрпример, где теорема об обратном операторе не применима.
9. Как теорема о замкнутом графике связана с полнотой пространств?
10. Объясните приложения этих теорем в решении операторных уравнений.

Спектральная теория

1. Что такое спектр оператора и его компоненты (точечный, непрерывный, остаточный)?
2. Объясните понятие резольвенты и ее свойства.
3. Сформулируйте формулу Гельфанда для спектрального радиуса.
4. Приведите пример спектра оператора умножения на функцию в L^2.
5. Как вычисляется спектральный радиус для нормального оператора?

6. Объясните разницу между точечным и непрерывным спектром на примере.
7. Приведите пример оператора с остаточным спектром.
8. Как резольвента используется для решения операторных уравнений?
9. Покажите на примере, что спектр компактного оператора дискретен.
10. Объясните приложения спектральной теории в квантовой механике.

Компактные операторы

1. Перечислите критерии компактности оператора и приведите пример.
2. Сформулируйте теорему Шаудера о неподвижных точках компактных отображений.
3. Что такое альтернатива Фредгольма для компактных операторов?
4. Объясните спектр компактного оператора и его свойства.
5. Приведите пример интегрального оператора в L^2 и проверьте его компактность.
6. Как альтернатива Фредгольма применяется к решению уравнений вида $Ax = y$.
7. Покажите, что спектр компактного оператора состоит из нуля и собственных значений.
8. Объясните роль компактных операторов в аппроксимации.
9. Приведите пример некомпактного оператора и объясните почему.
10. Как теорема Шаудера используется в нелинейном анализе?

Самосопряжённые операторы

1. Что такое симметричный оператор? Приведите пример.
2. Объясните понятие самосопряжённого оператора и его свойства.
3. Сформулируйте теорему Гильберта-Шмидта о спектре самосопряжённых операторов.
4. Что такое спектральная теорема для компактных самосопряжённых операторов?
5. Приведите пример спектрального разложения оператора в L^2.
6. Как доказывается, что самосопряжённый оператор имеет вещественный спектр?
7. Объясните приложения спектральной теоремы к диагонализации операторов.
8. Приведите пример несамосопряжённого оператора и его свойства.
9. Покажите, как спектральная теорема применяется к интегральным операторам.
10. Объясните связь между симметричностью и ортогональностью собственных функций.

Теоремы аппроксимации

1. Сформулируйте теорему Стоуна-Вейерштрасса для алгебр функций.
2. Приведите пример применения теоремы Стоуна-Вейерштрасса к полиномам на отрезке.
3. Что такое теорема Фейера и ядра Дирихле?
4. Объясните, как ядра Фейера аппроксимируют непрерывные функции.
5. Приведите пример полиномов Бернштейна и их свойства.
6. Как теорема Стоуна-Вейерштрасса используется для плотности подалгебр.
7. Покажите на примере аппроксимацию функции полиномами Бернштейна.

8. Объясните роль ядер Дирихле в суммировании рядов Фурье.
9. Приведите контрпример, где алгебра не плотна в C[a,b].
10. Как эти теоремы применяются в численном анализе?

Обобщённые функции. Дополнительные темы

1. Что такое пространство D основных функций и как оно определяется?
2. Объясните понятие регуляризации обобщённых функций.
3. Опишите пространства Соболева H^p и теоремы вложения.
4. Что такое обобщённые производные? Приведите пример.
5. Сформулируйте формулу интегрирования по частям для обобщённых функций.
6. Объясните теорему Крейна-Мильмана о крайних точках выпуклых множеств.
7. Что такое теорема Маркова-Какутани о неподвижной точке?
8. Приведите пример применения теоремы Гротендика к ядерным пространствам.
9. Как обобщённые функции используются в решении дифференциальных уравнений?
10. Объясните приложения пространств Соболева в вариационном исчислении.

Примерные задания по контрольной работе

Контрольная работа №1

1. Докажите, что пространство C[0,1] с метрикой ||f - g|| = sup |f(t) - g(t)| является полным. Приведите контрпример неполного пространства.
2. Покажите, что в пространстве l^p (p ≥ 1) нормы ||x||_p и ||x||_∞ эквивалентны на конечномерных подпространствах. Используйте неравенство Гёльдера.
3. Примените теорему Бэра о категориях к доказательству того, что множество рациональных чисел является первой категории в R.
4. Проверьте компактность множества {f_n(t) = t^n} в пространстве C[0,1] с помощью теоремы Арцела-Асколи. Объясните понятие равностепенной непрерывности.
5. Сформулируйте теорему Хана-Банаха в комплексном случае и приведите пример разделения выпуклых множеств.
6. Покажите, что пространство L^p (1 < p < ∞) рефлексивно. Объясните теорему Банаха-Алаоглу для слабой* топологии.
7. В $L^2[0,1]$ найдите проекцию функции f(t) = t на подпространство, натянутое на {1, t}. Используйте тождество параллелограмма.
8. Для оператора сдвига в l^∞ определите, является ли он ограниченным. Примените принцип равномерной ограниченности к семейству операторов.
9. Сформулируйте теорему об открытом отображении и приведите пример её применения к линейным операторам.
10. Для оператора умножения на f(t) = t в $L^2[0,1]$ найдите спектр. Вычислите спектральный радиус и резольвенту для λ = 1.5.

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1

1. Докажите, что функция ρ(x, y) = |x - y| / (1 + |x - y|) является метрикой на множестве вещественных чисел. Проверьте аксиомы метрики и приведите пример вычисления расстояния между двумя числами.

2. Примените принцип сжимающих отображений для решения уравнения x = (1/3) sin x на отрезке [0, π]. Покажите, что отображение является сжимающим и найдите неподвижную точку.

3. Используя теорему Хана-Банаха в вещественном случае, продолжите линейный функционал f(x) = x(0) с подпространства многочленов на пространство C[0,1]. Укажите норму продолжения.

4. В пространстве $L^2[0,1]$ рассмотрите ортонормированную систему {e_n(t) = √2 sin(nπt), n=1,2,...}. Проверьте ортогональность и нормированность. Приведите неравенство Бесселя для произвольного элемента.

5. Докажите теорему о замкнутом графике для банаховых пространств. Приведите пример оператора с замкнутым графиком, для которого обратный оператор непрерывен.

Домашнее задание 2

1. Покажите эквивалентность норм $||x||_1 = \sum |x\_i|$ и $||x||_2 = \max |x\_i|$ на конечномерном пространстве R^n. Используйте неравенство Минковского для сравнения.

2. Примените теорему Арцела-Асколи к семейству функций {f_n(t) = t^n} на [0,1]. Проверьте равностепенную непрерывность и компактность в C[0,1].

3. Покажите, что двойственное пространство к l^1 совпадает с l^∞. Приведите пример функционала из l^∞ и вычислите его норму.

4. Рассмотрите оператор сдвига в l^2: (Tx)*n* = *x*{n+1}. Определите, является ли он ограниченным, найдите ядро и образ. Примените принцип равномерной ограниченности к последовательности таких операторов.

5. Для оператора умножения на функцию f(t) = t в $L^2[0,1]$ найдите спектр. Вычислите резольвенту для λ = 2 и спектральный радиус.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Укажите аксиомы метрики в метрических пространствах (перечислите через запятую).	Положительность, симметричность, неравенство треугольника	УК-1
2	Назовите пример полного метрического пространства из темы "Метрические пространства".	R^n / l^2	УК-1
3	Найдите пополнение пространства Q с обычной метрикой.	R	УК-1
4	Примените теорему о вложенных шарах к существованию решений уравнения в полном пространстве (укажите теорему).	Теорема о вложенных шарах	УК-1
5	Определите связь между нормой и метрикой в нормированных пространствах (одно слово).	Естественная	УК-1
6	Укажите неравенство, связанное с пространствами L^p (Гёльдера или Минковского).	Гёльдера / Минковского	УК-1
7	Найдите двойственное пространство к l^1.	l^∞	УК-1
8	Примените теорему Рисса к конечномерным подпространствам (укажите теорему).	Теорема Рисса	УК-1
9	Укажите критерий компактности в метрических пространствах (имя).	Хаусдорфа	ОПК-4
10	Найдите спектральный радиус оператора умножения на функцию t в $L^2[0,1]$.	1	ОПК-4
11	Сформулируйте теорему Банаха об обратном операторе (кратко).	Теорема Банаха об обратном операторе	ОПК-4
12	Укажите альтернатива Фредгольма для компактных операторов (число альтернатив).	3	ОПК-4

13	Найдите проекцию вектора (1,0) на подпространство в R^2 с внутренней нормой.	(1,0)	ПК-2
14	Укажите теорему, связанную с рядами Фурье в L^2 (имя).	Рисса / Парсеваля	ПК-2
15	Примените спектральную теорему для компактных операторов (укажите теорему).	Спектральная теорема для компактных операторов	ОПК-4
16	Укажите теорему Стоуна-Вейерштрасса (применение).	Аппроксимация функций	ОПК-4
17	Найдите обобщённую производную функции x в пространстве D (одно слово).	1	ПК-2
18	Укажите теорему о крайних точках (имя).	Крейна-Мильмана	ПК-2
19	Примените теорему Маркова-Какутани к неподвижной точке (укажите теорему).	Теорема Маркова-Какутани	ПК-2
20	Укажите ядерное пространство по Гротендику (пример).	L^1 / Соболева	ПК-2