ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Приказом Ректора АНО ВО
«Центральный университет»
Е.В. Ивашкевич
от «26» июня 2025 г. № 0626.32

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математика в DS» дополнительной профессиональной программы – программы профессиональной переподготовки «Академия data science»

Траектория: Backend-разработка

Москва
2025

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Изучение дисциплины (модуля) «Математика в DS» является ключевым для понимания алгоритмов машинного обучения, статистических методов и обработки данных, что позволяет эффективно анализировать и интерпретировать большие объемы информации. Математические концепции, такие как линейная алгебра, вероятность и статистика, формируют основу для разработки моделей, способствующих принятию обоснованных решений в различных областях.

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование глубоких знаний математических основ, необходимых для разработки, анализа и оптимизации алгоритмов машинного обучения и статистических моделей.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— освоить ключевые концепции и теоремы линейной алгебры, математического анализа и теории вероятностей, необходимые для анализа данных;

— научиться использовать математические инструменты для решения практических проблем в Data Science и интерпретации научных текстов по этим областям;

— развить практические навыки работы с математическими конструкциями для моделирования и обработки информации в аналитических проектах.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основные объекты и результаты линейной алгебры, математического анализа и теории вероятностей.

уметь:

— применять результаты линейной алгебры, математического анализа и теории вероятностей для решения теоретических и прикладных задач по пройденным темам;

— читать и понимать математическую литературу по тематикам близким к линейной алгебре, математическому анализу и теории вероятностей.

владеть:

— навыком работы с объектами линейной алгебры, математического анализа и теории вероятностей.

2. Тематический план

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары (практические занятия)			
1	Линейная алгебра	11	11		31	Домашние задания
2	Математический анализ	11	11		31	Домашние задания
3	Теория вероятностей	11	12		31	Домашние задания
	Зачет			4		
	Итого:	***33***	***34***	***4***	***94***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***230***				

3. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Линейная алгебра	Матрицы Вектора Решение системы линейных уравнений Матричные разложения Тензорные вычисления с помощью дифференциалов
2	Математический анализ	Производная и градиент Выпуклый анализ Дифференциал Граф вычислений Методы оптимизации первого порядка Методы оптимизации первого порядка Методы оптимизации второго порядка Условная оптимизация
3	Теория вероятностей	Основы теории вероятностей Прикладная теория вероятностей в ML

4. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый слушатель в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Слушателям обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Сабитов, И. Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для вузов / И. Х. Сабитов, А. А. Михалев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 258 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08941-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/539950.
2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 416 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18887-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560611.
3. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/562115.
4. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/562116.
5. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 3-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09085-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560316.
6. Малугин, В. А. Теория вероятностей : учебник для вузов / В. А. Малугин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 266 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06964-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/563987.
7. Энатская, Н. Ю. Теория вероятностей : учебник для вузов / Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 204 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01338-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561149.

Дополнительная литература:

1. Пахомова, Е. Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий : учебное пособие для вузов / Е. Г. Пахомова, С. В. Рожкова. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 110 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-7541-3. — Текст :

электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/534429.

2. Сборник задач по высшей математике в 4 ч. Часть 1 : учебник и практикум для вузов / под редакцией А. С. Поспелова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 355 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02075-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561747.

3. Сборник задач по высшей математике в 4 ч. Часть 2 : учебное пособие для вузов / под редакцией А. С. Поспелова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 253 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-7929-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561748.

4. Сборник задач по высшей математике в 4 ч. Часть 3 : учебное пособие для вузов / под редакцией А. С. Поспелова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 395 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-7930-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561745.

5. Сборник задач по высшей математике в 4 ч. Часть 4 : учебное пособие для вузов / под редакцией А. С. Поспелова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 218 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-7931-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561746.

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т.1 / В. Феллер. — М.: Мир, 1984. — 528 с.

7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т.2 / В. Феллер. — М.: Мир, 1984. — 738 с.

5. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое

Электронный документ

Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

6. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математика в DS» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания и бонусное домашнее задание, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Участие в семинаре – активная работа слушателя на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре слушателям рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа слушателей, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы слушатели взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи слушателя включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Оценивание уровня учебных достижений обучающихся по дисциплине (модулю) осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета***.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

<table>
<tr><th>Десятибалльная оценка</th><th>Пятибалльная оценка</th><th>Оценка за зачет</th><th>Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)</th></tr>
<tr><td>10</td><td>Отлично</td><td>Зачтено</td><td rowspan="3">Слушатель полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину (модуль). Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Слушатель хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Отлично</td><td>Зачтено</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Отлично</td><td>Зачтено</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Хорошо</td><td>Зачтено</td><td rowspan="2">Слушатель обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Хорошо</td><td>Зачтено</td></tr>
</table>

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			Слушатель хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Зачтено	Слушатель обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Слушатель способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Слушатель не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Математика в DS» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Накопительная оценка			
Домашние задания	70%	13	Набор задач по темам недели
Промежуточная аттестация			
Зачет	30%	1	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по дисциплине (модулю)

В рамках изучения дисциплины (модуля) возможно получение бонусных баллов.

Итоговая оценка рассчитывается по накопительной при условии, если средний балл студента составляет 4 и более баллов.

В случае, если студент не выполнил условие для расчета итоговой оценки по накопительной или средний балл студента составляет 4 и более баллов, но он хочет улучшить оценку, итоговая оценка по дисциплине (модулю) выставляется по формуле: «0,7 × среднее за домашние задания + 0,3 × зачет».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

Домашнее задание: Системы линейных уравнений и матрицы

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

3. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_{5\,6}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных для каждого значения $x \in \mathbb{R}$.

4. Вычислить выражение:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^{10}$$

(Указание: попробуйте посчитать вторую степень и выполнять умножение не слева направо, а в каком-нибудь другом порядке, чтобы заметить интересные закономерности).

5. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Доказать, что для любого k верна формула

$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$. (Указание: тут можно либо воспользоваться свойствами биномиальных коэффициентов и индукцией по k, либо подумать в сторону бинома Ньютона).

6. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^m = 0$ для некоторого m. Показать, что $E + A$ и $E - A$ обратимы, где $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица. (Указание: воспользуйтесь 6 эквивалентными свойствами невырожденности).[2]

[1] Такая матрица называется Жордановой клеткой.

[2] Для этих матриц можно явно указать выражения для обратных матриц, для этого попробуйте подумать в сторону геометрической прогрессии, это может вам угадать ответ.

Домашнее задание: Векторные пространства и ранги

1. Даны векторы
$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}3\\8\\11\end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\ a_5 = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$
Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки и выразить все оставшиеся вектора через базисные.

2. Найдите базис векторного пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid Ay = 0\}$, где
$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 0 & 7\\1 & 2 & 0 & 1 & 4\\0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

3. Определите можно ли из системы векторов
$$v_1 = \begin{pmatrix}-4\\-5\\2\\3\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}5\\5\\3\\-2\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}4\\5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$
выбрать ФСР для системы линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 &= 0\\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0\\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0\end{cases}$$

4. Являются ли функции $1, \sin(x), \sin^2(x), \ldots, \sin^n(x)$ линейно зависимыми?

5. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n. Показать, что системы
$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \text{ и } \{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}, \text{ где } a \in \mathbb{R}$$
являются базисами в $\mathbb{R}[x]_n$ и найти матрицы перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.

6. Найти ранг следующей матрицы при различных значениях параметра λ:
$$\begin{pmatrix}7-\lambda & -12 & 6\\ 10 & -19-\lambda & 10\\ 12 & -24 & 13-\lambda\end{pmatrix}$$

7. Пусть A и B – квадратные матрицы одного размера. Доказать, что
$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}A & AB\\ B & B+B^2\end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

Домашнее задание: Билинейные формы и Евклидовы пространства

Общая информация:

- Напомню, что стандартным скалярным произведением на $\mathbb{R}^n$ называется $(x, y) = x^t y$.
- Через $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ обозначается пространство многочленов степени не более n, то есть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n} = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.

Задачи:

1. В пространстве $\mathbb{R}^4$ задана билинейная форма
$$\beta(x, y) = 2x_2 y_1 + x_4 y_4$$
По ней построили квадратичную форму $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. После этого Q ограничили на подпространство $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\}$. Найдите сигнатуру Q и сигнатуру ограничения Q на V.

2. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализуйте базис $1, x, x^2, x^3$.

3. Найти длины сторон, внутренние углы и площадь треугольника ABC в пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением, где
$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^4$ – векторное подпространство заданное следующим образом $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, где
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ -19 \end{pmatrix}$$
Задайте это подпространство в виде $U = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid Ay = 0\}$ для некоторой матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,4}(\mathbb{R})$. (Подумайте с чего эта задача дается на тему про скалярные произведения).

5. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ $(n > 1)$, относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице? (Указание: билинейные формы можно задавать в разных базисах.)

Домашнее задание: Пределы

1. Найти предел

   (a) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin(\cos x-1)}$

2. Даны два семейства кривых на плоскости

$$y^2 = 4a(a-x)\ (a>0) \ \text{ и } \ y^2 = 4b(b+x)\ (b>0)$$

   Покажите, что в любой точке пересечения любой кривой из первого семейства с любой кривой из второго семейства касательные этих кривых перпендикулярны.

3. Исследовать на экстремумы (то есть на локальные минимумы и максимумы) $y=(x+1)^{10}e^{-x}$.

4. Посчитайте неопределенный интеграл

   (a) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$

   (b) $\int\sin^3 x\,dx$

5. Посчитайте определенный интеграл $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx$

6. Найдите предел

$$\lim_{x\to 0} x\int\limits_x^1\frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

Домашнее задание: Оптимизационная задача

1. Найти методом функции Лагранж условные критические точки функции $z = xy+\frac{4}{x}+\frac{9}{y}$ с областью определения $x>0$ и $y>0$,

   (a) при условии, что $xy=1$.

   (b) при условии, что $xy\leqslant 1$.

   (c) при условии, что $xy\geqslant 1$.

2. Найти методом функции Лагранж условные критические точки функции $z=\frac{1}{1+(x+y)^2}$ при условии $xy=0$.

3. Пусть $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ задана по правилу $f(x)=x$. Будем рассматривать f как элемент $L_2[-\pi,\pi]$, со скалярным произведением $(g,h)=\int_{-\pi}^{\pi}g(x)h(x)\,dx$.

   (a) Покажите, что f ортогонально функциям $\cos(kx)$ при $k\in\mathbb{Z}$ и $k\geqslant 0$.

   (b) Найдите разложение $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin(kx)$ посчитав коэффициенты Фурье a_k.

   (c) Найдите длины векторов $\|f\|_2$ и $\|a_k\|_2$. Зная эти длины, найдите сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Домашнее задание: Случайные величины

1. Пусть ξ – случайная величина такая, что $P(\xi = -1) = \frac{1}{4}$ и $P(\xi = 2) = \frac{1}{4}$ и для любых точек $a, b \in [0,1]$ с условием $a < b$ верно $P(\xi \in [a,b]) = \frac{b-a}{2}$. Нарисуйте график функции распределения $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ.

2. В лотерее на 1% билетов выпадет выигрыш в 200 рублей, на 0.01% билетов выпадает выигрыш в 1000 рублей, а остальные билеты без выигрыша. Найдите средний выигрыш в этой лотерее (в расчете на один билет), то есть среднее арифметическое выигрышей всех билетов. Подумайте, как это сформулировать в терминах случайных величин и математического ожидания.

3. В ряд расположены m предметов. Случайно выбираются k предметов, $k < m$. Случайная величина X равна количеству таких предметов i, что i выбран, а все его соседи не выбраны. Найдите математическое ожидание X.

4. В равностороннем треугольнике ABC площади 1 выбираем точку M. Найти математическое ожидание площади ABM.

5. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ с плотностью $p(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$.

6. Пусть $P_\xi(x) = P(\xi = x)$ и $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$.

   (a) Показать, что для $a > 0$ и $-\infty < b < \infty$

   $$P_{a\xi+b}(x) = P_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \text{и} \quad F_{a\xi+b}(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

   (b) Найдите функцию распределения $F_{\xi^2}(y)$ (выразите ее через F_ξ и P_ξ).

Домашнее задание: Условное математическое ожидание и характеристические функции

1. Пусть ξ, η – независимые случайные величины имеющие показательное распределение, то есть

   $$p_\xi(x) = p_\eta(x) = \lambda e^{-\lambda x} \theta(x)$$

   где

   $$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

   Найти следующие плотности

   $$p_{\xi,\xi+\eta}(x,y) \quad \text{и} \quad p_{\xi|\xi+\eta=z}(x)$$

   Важно: для совместной плотности укажите область в которой она равна нулю.

2. Используя характеристические функции и их свойства, найти распределение суммы двух независимых нормальных случайных величин с параметрами (a_1, σ_1^2) и (a_2, σ_2^2).

3. Пусть ξ и η независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0,1)$. Найти плотность величины $\chi = \xi^2 + \eta^2$.

4. Случайные величины X и Y независимы. X имеет распределение Лапласа с плотностью $\frac{1}{2} e^{-|x|}$, а Y – равномерное на отрезке $[1,2]$.

   (a) Найдите плотность распределения случайной величины $-2Y$.

   (b) Найдите плотность распределения случайной величины $X - 2Y$.

5. Игрок приходит в казино с k монетами. Каждый кон он выигрывает с вероятностью p и получает одну монету и проигрывает с вероятностью $q = 1 - p$ и отдает одну монету. Игра заканчивается если игрок потеряет все монеты или если он наберет предельную сумму выигрыша N. Найдите среднюю продолжительность игры в зависимости от k.

Бонусное домашнее задание

Линейная алгебра

1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^T y$ заданы векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Для семейства v_1, v_2, v_3 построили двойственное семейство w_1, w_2, w_3 удовлетворяющее свойствам

$$(w_i, v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Найдите во сколько раз объем параллелепипеда на векторах v_1, v_2, v_3 больше объема параллелепипеда на векторах w_1, w_2, w_3.

2. Найти SVD разложение для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Математический анализ

1. Разложите в ряд фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

и пользуясь этим разложением найдите сумму ряда

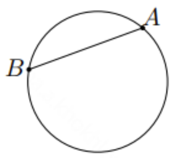
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

2. Пусть $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ – множество квадратных симметричных матриц размера n с положительными собственными значениями. Пусть $P \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ и $Q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. И пусть $X_1, \ldots, X_d \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – фиксированные матрицы. Найдите уравнения, задающие критические точки для следующей функции функции

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \operatorname{tr}(X_i^T P X_i Q) - m \ln \det(P) - n \ln \det(Q)$$

Теория вероятности

1. На плоскости нарисована окружность радиуса один. На ней равновероятно и независимо выбирают две точки A и B. Найдите среднее расстояние между точками A и B.



2. Игральная кость последовательно перекладывается с одной грани на любую другую из четырех соседних. Это делается равновероятно и независимо от предыдущих действий. В начале кость находилась числом «6» вверх. Рассмотрим вероятность

$$p(t) = P(\text{«На } t\text{-ом шаге кость находится гранью «6» вверх»})$$

Найдите предел $p(t)$ при $t \to \infty$.

Примерный перечень вопросов к зачету

Линейная алгебра

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

2. Для матрицы

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Найдите ее ранг при всех возможных значениях $x \in \mathbb{R}$.

3. Посчитайте характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Найдите обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Даны векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки и выразить все оставшиеся вектора через базисные.

6. Найдите базис векторного пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid Ay = 0\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$

Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2.

8. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами: (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Можно ли эти матрицы диагонализовать в каком-нибудь базисе?

9. Найдите сигнатуру следующей квадратичной формы:

$$Q(x, y, z) = 5\,x^2 - 6\,xy - 10\,xz - 8\,y^2 + 6\,yz + 5\,z^2$$

10. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализуйте базис $1, x, x^2, x^3$.

11. «Решите» систему методом наименьших квадратов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

12. Найти сингулярное разложение следующих матриц

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Математический анализ

1. Исследовать на экстремумы (то есть на локальные минимумы и максимумы) $y = (x+1)^{10}e^{-x}$.

2. Посчитайте определенный интеграл $\int\limits_{1}^{2} x \ln x\, dx$

3. Исследовать на экстремумы (то есть на локальные минимумы и максимумы)

$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad x > 0,\ y > 0$$

4. Пусть $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}^n$ – набор векторов и $U \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – множество матриц с положительным определителем. Рассмотрим функцию

$$\varphi\colon U \to \mathbb{R} \quad \text{по правилу} \quad A \mapsto \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}(Ax_i, x_i) - \ln\det A$$

где $(x, y) = x^t y$ – стандартное скалярное произведение. Найдите градиент φ в точке A. (Указание: воспользуйтесь фактом, что $x^T Ay = \mathrm{tr}(x^T Ay)$.)

5. Найти методом функции Лагранж условные критические точки функции $z = xy + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$ с областью определения $x > 0$ и $y > 0$,
   (a) при условии, что $xy = 1$.
   (b) при условии, что $xy \leqslant 1$.
   (c) при условии, что $xy \geqslant 1$.

6. Пусть $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ задана по правилу $f(x) = x$. Будем рассматривать f как элемент $L_2[-\pi, \pi]$, со скалярным произведением $(g, h) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)\,dx$.
   (a) Покажите, что f ортогонально функциям $\cos(kx)$ при $k \in \mathbb{Z}$ и $k \geqslant 0$.
   (b) Найдите разложение $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ посчитав коэффициенты Фурье a_k.
   (c) Найдите длины векторов $\|f\|_2$ и $\|a_k\|_2$. Зная эти длины, найдите сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Теория вероятности

1. В некотором прекрасном городе «Икс» население выросло аж до 10 человек. По этому прекрасному случаю в нем открылся парк аттракционов, где можно попрыгать на батуте. Оказалось, что батут обязательно рвется, если на нем находится 5 человек, в случае 4 человек он рвется с вероятностью $0,8$, в случае 3 человек с вероятностью $0,6$, в случае 2 человек с вероятностью $0,4$, в случае 1 человека с вероятностью $0,2$ и производитель гарантирует, что их надежные и качественные батуты сами по себе не рвутся. Несмотря на праздничное событие, жители города «Икс» очень заняты, каждый из них может прийти в парк с вероятностью $0,5$. Узнайте, какова вероятность того, что уже в первый день бизнес с батутом накроется.

2. В мешке лежит три шара: два черных и один белый. Мы производим следующие действия: вытаскиваем шар, записываем его цвет и обратно кладем шар другого цвета. Такие действия проделываются три раза. Рассматривая такой эксперимент как случайный, опишите вероятностное пространство (Ω, P), то есть пространство элементарных исходов Ω и вероятностную меру $P\colon 2^{\Omega} \to [0,1]$ на нем. Какова вероятность получить белый шар на третьем шаге?

3. Пусть ξ – случайная величина такая, что $P(\xi = -1) = \frac{1}{4}$ и $P(\xi = 2) = \frac{1}{4}$ и для любых точек $a, b \in [0,1]$ с условием $a < b$ верно $P(\xi \in [a,b]) = \frac{b-a}{2}$. Нарисуйте график функции распределения $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ.

4. Пусть $P_\xi(x) = P(\xi = x)$ и $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$.

   (a) Показать, что для $a > 0$ и $-\infty < b < \infty$
   $$P_{a\xi+b}(x) = P_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \text{и} \quad F_{a\xi+b}(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

   (b) Найдите функцию распределения $F_{\xi^2}(y)$ (выразите ее через F_ξ и P_ξ).

5. Пусть (ξ, η) – нормальный вектор с математическим ожиданием $0 \in \mathbb{R}^2$ и матрицей ковариации $\Sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найдите плотности для его координат ξ и η. В этой задаче надо использовать следующий факт
   $$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

6. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные непрерывные случайные величин с плотностью $p(x)$. Найдите плотность случайных величин: $\max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

7. Пусть ξ, η – независимые случайные величины имеющие показательное распределение, то есть
   $$p_\xi(x) = p_\eta(x) = \lambda e^{-\lambda x}\theta(x)$$
   где
   $$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
   Найти следующие плотности
   $$p_{\xi,\xi+\eta}(x,y) \quad \text{и} \quad p_{\xi|\xi+\eta=z}(x)$$
   Важно: для совместной плотности укажите область в которой она равна нулю.

8. Пусть ξ и η независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0,1)$. Найти плотность величины $\chi = \xi^2 + \eta^2$.

9. Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$. Покажите, что $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{P} \xi + \eta$

10. Пусть $\Omega = [0,1]$ и вероятность P – это длина. Рассмотрим последовательность случайных величин ξ_n на Ω заданную следующим образом
    $$\xi_{2k+1}(x) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k}\right)x + \frac{3}{8} + \frac{1}{2k} \quad \text{и} \quad \xi_{2k}(x) = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\right)x + \frac{5}{8} - \frac{1}{2k}$$

    (a) Покажите, что эта последовательность сходится по распределению и найдите предельное распределение.

    (b) Покажите, что эта последовательность не сходится ни в каком другом виде сходимости.