

УТВЕРЖДЕНА

Приказом Ректора АНО ВО
«Центральный университет»
Е.В. Ивашкевич
от «26» июня 2025 г. № 0626.32

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Методы выпуклой оптимизации»
дополнительной профессиональной программы – программы
профессиональной переподготовки «Академия data science»**

Траектория: Машинное обучение

**Москва
2025**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Тематический план	4
3. Содержание дисциплины (модуля)	4
4. Учебно-методическое обеспечение	5
5. Материально-техническое обеспечение	5
6. Методические и оценочные материалы	7

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Изучение дисциплины (модуля) «Методы выпуклой оптимизации» позволяет развить навыки системного решения прикладных задач и повысить эффективность использования ресурсов. Эти знания являются основой для понимания алгоритмов и моделей, применяемых в инженерии, экономике и информационных технологиях.

Цель изучения дисциплины (модуля): освоение теоретических основ и практических методов выпуклой оптимизации для эффективного решения задач минимизации функционалов с ограничениями, включая анализ свойств функций, построение двойственных задач и подбор оптимальных параметров алгоритмов.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- изучить свойства выпуклых множеств и функций для определения применимости оптимизационных подходов к различным задачам;
- освоить концепции субградиентов и сопряженных функций для расширения градиентных методов на негладкие случаи;
- понять принципы двойственности и условий оптимальности для преобразования и анализа ограниченных задач минимизации;
- ознакомиться с разнообразными численными алгоритмами оптимизации, их скоростью сходимости и влиянием настроек на результаты;
- разработать навыки экспериментального подбора параметров методов и оценки свойств функционалов в процессе решения оптимизационных проблем.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- матрично-векторное дифференцирование;
- выпуклые множества;
- выпуклые функции;
- субградиент;
- сопряженные функции;
- двойственность;
- условия Каруша-Куна-Таккера;
- различные методы численной оптимизации и их сходимость;
- влияние гиперпараметров на методы.

уметь:

- определять задана ли задача на выпуклом множестве;
- обобщать градиент выпуклых функций на негладкие функции;
- строить двойственные задачи, а также строить двойственные задачи через сопряженные функции;
- аналитически искать минимум функционала с ограничениями;
- искать минимум функционала на непрерывном множестве.

владеть:

- навыками вычисления обратного распространения ошибки;
- навыками определения свойств функционала;
- навыками проведения экспериментов;
- навыками подбора гиперпараметров в методах.

2. Тематический план

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоя тельная работа	
Лекции	Семинары (практичес кие занятия)					
1	Основы: анализ, дифференцирование и выпуклость, условия оптимальности	2	7		37	Домашние задания
2	Детерминированные методы оптимизации	2	7		37	Домашние задания, Контрольная работа
3	Оптимизация с ограничениями и негладкими функциями	2	7		37	Домашние задания
4	Стохастические и современные методы	3	8		37	Домашние задания
	<i>Экзамен</i>			4		
	Итого:	9	29	4	148	
	Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)	190				

3. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Основы: анализ, дифференцирование и выпуклость, условия оптимальности	Линейная алгебра и сходимость последовательностей Матричное дифференцирование и одномерная оптимизация Автоматическое дифференцирование Выпуклость и условия роста Условия оптимальности и условия Каруша–Куна–Таккера
2	Детерминированные методы оптимизации	Линейное программирование Градиентный спуск и его сходимость Ускоренные градиентные методы Метод сопряжённых градиентов Методы второго порядка
3	Оптимизация с ограничениями и негладкими функциями	Проекционные методы и Frank–Wolfe Субградиенты и проксимальные методы
4	Стохастические и современные методы	Стохастический градиентный спуск и адаптивные оптимизаторы Методы снижения дисперсии Современные практики оптимизации

4. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый слушатель в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Слушателям обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Токарев, В. В. Методы оптимизации : учебник для вузов / В. В. Токарев. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 440 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04712-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563479>.

2. Методы оптимизации : учебник и практикум для вузов / Ф. П. Васильев, М. М. Потапов, Б. А. Будаков, Л. А. Артемьева ; под редакцией Ф. П. Васильева. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 375 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-6157-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560070>.

Дополнительная литература:

1. Сухарев, А. Г. Методы оптимизации : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 367 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3859-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/507818>.

5. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и

обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		

Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

6. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Методы выпуклой оптимизации» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания, контрольная работа, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где слушателям активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за

ограниченное время.

Цель контрольной работы – получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Бонусные баллы — это оценки, которые слушатели могут получить за выполнение дополнительных заданий.

Формат бонусных баллов позволяет слушателям улучшить общую оценку по дисциплине (модулю) и стимулирует углубленное изучение материала.

Самостоятельная работа – работа слушателей, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы слушатели взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи слушателя включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Оценивание уровня учебных достижений обучающихся по дисциплине (модулю) осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме *экзамена*.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Слушатель полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину (модуль). Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Слушатель хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	
8	Отлично	
7	Хорошо	Слушатель обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать
6	Хорошо	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Слушатель хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Слушатель обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Слушатель способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Слушатель не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Методы выпуклой оптимизации» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	25%	12	Набор задач по темам недели
Контрольная работа	40%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Экзамен	35%	1	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по дисциплине (модулю)

В рамках изучения дисциплины (модуля) возможно получение бонусных баллов.

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Методы выпуклой оптимизации»: « $0,25 \times$ среднее за домашние задания + $0,4 \times$ контрольная работа + $0,35 \times$ экзамен».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1.

Задание 1.

Пусть $g(x)=x^T A x$, где A — симметричная матрица.

- Найдите градиент функции $g(x)$ по вектору x .
- Объясните, как результат зависит от свойств матрицы A .

Задание 2.

Рассмотрите функцию $h(x)=b^T Cx$, где b — фиксированный вектор, а C — фиксированная матрица.

- Найдите градиент функции $h(x)$ по вектору x .
- Примените правило произведения для векторной функции и найдите производную функции $k(x)=x^T Cx \cdot b^T x$.

Задание 3.

Рассмотрим функцию $f(x)=A^{-1}x$, где A — невырожденная матрица.

Найдите градиент функции $f(x)$ по вектору x .

Объясните, как вы можете использовать это знание для нахождения градиента функции $g(x)=x^T A^{-1}x$.

Задание 4.

Рассмотрите функцию $k(x)=\sin(b^T x)$, где b — фиксированный вектор.

- Найдите градиент функции $k(x)$.

Задание 5.

Для функции $f(x)=x^T Ax + b^T x$ найдите условия для минимума, используя градиент.

Домашнее задание 2.

Задание 1.

Реализуйте метод градиентного спуска для функции $f(x)=x^2-4x+4$.

- Найдите минимум функции и проанализируйте сходимость при различных значениях шага.

Задание 2.

Для функции $f(x)=x^4-3x^3+2$:

- Исследуйте, как изменение размера шага влияет на сходимость алгоритма градиентного спуска.
- Постройте график зависимости значения функции от числа итераций.

Задание 3.

Выведите формулу для метода Ньютона для функции $f(x)=e^x-x^2$.

- Проанализируйте сходимость метода на примере, используя начальное приближение $x_0=0$.

Задание 4.

Объясните принцип работы стохастического градиентного спуска.

- Реализуйте SGD для задачи линейной регрессии и проанализируйте его сходимость.

Задание 5.

Опишите метод Adam и его преимущества по сравнению с другими методами оптимизации.

- Реализуйте Adam для задачи минимизации функции потерь в регрессии и проанализируйте результаты.

Домашнее задание 3.

Задание 1.

Изучите классическую задачу о рюкзаке (0/1).

- Опишите алгоритм динамического программирования для её решения.
- Реализуйте алгоритм на примере, где у вас есть 5 предметов с заданными весами и ценами. Найдите максимальную ценность, которую можно унести в рюкзак с ограниченной вместимостью.

Задание 2.

Рассмотрите задачу о нахождении наименьшего остовного дерева в графе.

- Опишите алгоритм Краскала и алгоритм Прима.
- Реализуйте оба алгоритма на произвольном графе и сравните их эффективность по времени выполнения.

Задание 3.

Исследуйте задачу нахождения кратчайшего пути в графе.

- Опишите алгоритм Дейкстры и алгоритм Флойда-Уоршелла.
- Реализуйте оба алгоритма на графе, представленном в виде матрицы смежности, и проанализируйте время выполнения для различных размеров графа.

Задание 4.

Изучите задачу о максимальном потоке в сети.

- Опишите алгоритм Форда-Фалкерсона.
- Реализуйте алгоритм на примере сети с заданными узлами и потоками, и найдите максимальный поток из источника в сток.

Задание 5.

Рассмотрите задачу о раскраске графа.

- Опишите жадный алгоритм для раскраски графа и его сложность.
- Реализуйте алгоритм на графе с заданными вершинами и рёбрами, и найдите минимальное количество цветов, необходимых для раскраски.

Примерные задания для контрольной работы

Контрольная работа.

Задание 1.

Найдите производную функции $f(x)=Ax+b$ по вектору x , где A — матрица, а b — вектор.

Задание 2.

Дайте определение выпуклого множества и приведите пример, который не является выпуклым. Обоснуйте свой ответ.

Задание 3.

Докажите, что функция $f(x)=x^2$ является выпуклой на всей вещественной оси. Используйте определение выпуклой функции через вторую производную.

Задание 4.

Найдите субградиент функции $f(x)=|x|$ в точке $x=0$. Объясните, почему в этой точке существует более одного субградиента.

Задание 5.

Определите сопряженную функцию для функции $f(x)=\max_{i=1,\dots,n}(x_i)$. Найдите явное выражение для этой сопряженной функции и объясните, как она связана с выпуклыми функциями.

Задание 6.

Объясните концепцию двойственности в оптимизации. Приведите пример задачи оптимизации и её двойственной задачи, а также укажите условия, при которых выполняется двойственность.

Задание 7.

Приведите условия ККТ для задачи минимизации функции $f(x)$ при наличии ограничений $g_i(x)\leq 0$, $h_j(x)=0$. Объясните, что означает каждое из условий.

Задание 8

Опишите алгоритм обратного распространения ошибки для нейронной сети с одним скрытым слоем. Как вычисляются градиенты для обновления весов?

Задание 9.

Сравните методы градиентного спуска и метода Ньютона с точки зрения их сходимости. В каких случаях каждый из методов может быть предпочтительным?

Задание 10.

Рассмотрите задачу коммивояжера. Опишите алгоритм ветвей и границ для решения этой задачи. Приведите пример, показывающий, как этот алгоритм может быть применен для нахождения оптимального маршрута, и обсудите его сложность.