ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Приказом ректора
АНО ВО «Центральный университет»
от «02» июня 2026 г. № 0602.21

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Прикладная математика для машинного обучения»
дополнительной профессиональной программы – программы профессиональной переподготовки «Прикладное машинное обучение»

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2026

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Тематический план** 5
3. **Содержание дисциплины (модуля)** 5
4. **Учебно-методическое обеспечение** 6
5. **Материально-техническое обеспечение** 6
6. **Методические и оценочные материалы** 8

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Изучение дисциплины (модуля) «Прикладная математика для машинного обучения» позволяет заложить прочный математический фундамент, необходимый для понимания, разработки и критической оценки современных алгоритмов машинного обучения. Дисциплина (модуль) формирует способность формулировать прикладные задачи на строгом математическом языке, что критически важно для исследовательской и инженерной деятельности в области искусственного интеллекта.

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у обучающихся глубокого понимания математических основ машинного обучения и развитие навыков применения аппарата линейной алгебры, анализа, оптимизации и теории вероятностей для постановки, анализа и обоснования алгоритмов машинного обучения.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- изучить ключевые концепции линейной алгебры, включая матричные разложения и спектральный анализ, и их применение в анализе данных;
- освоить методы многомерного анализа и построение градиентов сложных функций с использованием графов вычислений;
- научиться исследовать функции потерь на выпуклость и решать задачи оптимизации с ограничениями с помощью условий ККТ и метода Лагранжа;
- овладеть базовыми и стохастическими алгоритмами оптимизации, используемыми при обучении моделей;
- развить навыки применения теории вероятностей для вывода функций потерь и интерпретации моделей в байесовском контексте.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- ключевые концепции линейной алгебры: матричную алгебру, системы уравнений и основные матричные и спектральные разложения;
- основы многомерного анализа и оптимизации: градиент, дифференциал, граф вычислений, условия выпуклости, условия ККТ для условной оптимизации;
- базовые и продвинутые алгоритмы оптимизации: методы оптимизации первого порядка, методы оптимизации второго порядка, стохастические методы оптимизации;
- основы теории вероятностей: случайные величины, основные законы распределения, математическое ожидание, дисперсию, формула Байеса.

уметь:

- выполнять матрично-тензорные вычисления и применять матричные разложения для решения задач анализа данных;
- вычислять производные сложных векторно-матричных функций с помощью аппарата дифференциалов и строить прямое и обратное распространение ошибки по графу вычислений;
- исследовать функции потерь на выпуклость и решать задачи оптимизации (безусловной и условной, включая формализм Лагранжа), обоснованно выбирая численные методы;
- применять теорию вероятностей: вычислять матожидания и ковариации, а также выводить стандартные функции потерь из вероятностных предположений.

владеть:

— навыками «векторизации» и тензорного дифференцирования для перевода алгоритмов в эффективные матричные операции и быстрого расчета градиентов;

— навыком математической постановки задач машинного обучения: способностью формулировать прикладные задачи как задачи математической оптимизации (с ограничениями или без) и интерпретировать их в вероятностных терминах;

— навыком аналитического обоснования алгоритмов машинного обучения с опорой на фундаментальные теоремы линейной алгебры, матанализа и теории вероятностей.

2. Тематический план

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары (практические занятия)			
1	Линейная алгебра	8	8		35	Домашнее задание
2	Математический анализ	15	15		56	Домашнее задание
3	Теория вероятностей	7	7		35	Домашнее задание
	Зачет с оценкой			***4***		
	Итого:	***30***	***30***	***4***	***126***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

3. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Линейная алгебра	Матрицы и вектора Решение системы линейных уравнений Матричные разложения
2	Математический анализ	Производная и градиент Выпуклый анализ Дифференциал Методы выпуклой оптимизации Продвинутые методы выпуклой оптимизации Граф вычислений Тензорные вычисления с помощью дифференциалов Адаптивные методы оптимизации Условная оптимизация
3	Теория вероятностей	Основы теории вероятностей Теория вероятностей в машинном обучении

4. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый слушатель в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Слушателям обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Математический анализ : учебное пособие / О.И. Воронин, В. А. Жулего, С. М. Демидов [и др.]. ; под ред. А. М. Попова. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. - 224 с. - ISBN 978-5-9729-1720-4. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2171787.

2. Канарейкин, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / А. И. Канарейкин. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. - 136 с. - ISBN 978-5-9729-1976-5. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2171810.

Дополнительная литература:

1. Линейная алгебра : учебное пособие / О. И. Воронин, В. А. Жулего, С. М. Демидов [и др.]. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2023. - 176 с. - ISBN 978-5-9729-1556-9. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2094434.

5. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;

— компьютерной техникой;

— механическими калькуляторами;

— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья,

оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		

Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

6. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Прикладная математика для машинного обучения» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар – это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где слушатели активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой

занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал, использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Бонусные баллы — это оценки, которые слушатели могут получить за выполнение дополнительных заданий.

Формат бонусных баллов позволяет слушателям улучшить общую оценку по дисциплине (модулю) и стимулирует углубленное изучение материала.

Самостоятельная работа – работа слушателей, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы слушатели взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи слушателя включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Оценивание уровня учебных достижений обучающихся по дисциплине (модулю) осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Слушатель полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину (модуль). Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Слушатель хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля)
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		с практическими задачами.
7	Хорошо	Слушатель обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Слушатель хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Слушатель обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Слушатель способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Слушатель не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Прикладная математика для машинного обучения» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	90%	15	Набор задач по темам недели
Зачет с оценкой	10%	1	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по дисциплине (модулю)

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Прикладная математика для машинного обучения»: «0,9 × Среднее за домашние задания + 0,1 × Зачет с оценкой».

В рамках изучения дисциплины (модуля) возможно получение бонусных баллов.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1.

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

3. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_{56}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных для каждого значения $x \in \mathbb{R}$.

4. Вычислить выражение:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \right)^{10}$$

(Указание: попробуйте посчитать вторую степень и выполнять умножение не слева направо, а в каком-нибудь другом порядке, чтобы заметить интересные закономерности).

5. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Доказать, что для любого k верна формула

$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. (Указание: тут можно либо воспользоваться свойствами биномиальных коэффициентов и индукцией по k, либо подумать в сторону бинома Ньютона).

6. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^m = 0$ для некоторого m. Показать, что $E + A$ и $E - A$ обратимы, где $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица. (Указание: воспользуйтесь 6 эквивалентными свойствами невырожденности).[2]

[1] Такая матрица называется Жордановой клеткой.

[2] Для этих матриц можно явно указать выражения для обратных матриц, для этого попробуйте подумать в сторону геометрической прогрессии, это может вам угадать ответ.

Домашнее задание 2.

1. Даны векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}3\\8\\11\end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$

Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки и выразить все оставшиеся вектора через базисные.

2. Найдите базис векторного пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid Ay = 0\}$, где

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 0 & 7\\1 & 2 & 0 & 1 & 4\\0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

3. Определите можно ли из системы векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix}-4\\-5\\2\\3\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}5\\5\\3\\-2\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}4\\5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

выбрать ФСР для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0\\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0\\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

4. Являются ли функции $1, \sin(x), \sin^2(x), \ldots, \sin^n(x)$ линейно зависимыми?

5. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n. Показать, что системы

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \text{ и } \{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}, \text{ где } a \in \mathbb{R}$$

являются базисами в $\mathbb{R}[x]_n$ и найти матрицы перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.

6. Найти ранг следующей матрицы при различных значениях параметра λ:

$$\begin{pmatrix}7-\lambda & -12 & 6\\10 & -19-\lambda & 10\\12 & -24 & 13-\lambda\end{pmatrix}$$

7. Пусть A и B – квадратные матрицы одного размера. Доказать, что

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}A & AB\\B & B+B^2\end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

Домашнее задание 3.

Общая информация:

- Напомню, что стандартным скалярным произведением на $\mathbb{R}^n$ называется $(x, y) = x^t y$.
- Через $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ обозначается пространство многочленов степени не более n, то есть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n} = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.

Задачи:

1. В пространстве $\mathbb{R}^4$ задана билинейная форма

$$\beta(x, y) = 2x_2y_1 + x_4y_4$$

По ней построили квадратичную форму $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. После этого Q ограничили на подпространство $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\}$. Найдите сигнатуру Q и сигнатуру ограничения Q на V.

2. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализуйте базис $1, x, x^2, x^3$.

3. Найти длины сторон, внутренние углы и площадь треугольника ABC в пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^4$ – векторное подпространство заданное следующим образом $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, где

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Задайте это подпространство в виде $U = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid Ay = 0\}$ для некоторой матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,4}(\mathbb{R})$. (Подумайте с чего эта задача дается на тему про скалярные произведения).

5. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ $(n > 1)$, относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице? (Указание: билинейные формы можно задавать в разных базисах.)

Домашнее задание 4.

1. Найти предел
   (a) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin(\cos x-1)}$
2. Даны два семейства кривых на плоскости
   $$y^2 = 4a(a-x)\ (a>0)\ \text{ и }\ y^2 = 4b(b+x)\ (b>0)$$
   Покажите, что в любой точке пересечения любой кривой из первого семейства с любой кривой из второго семейства касательные этих кривых перпендикулярны.
3. Исследовать на экстремумы (то есть на локальные минимумы и максимумы) $y = (x+1)^{10}e^{-x}$.
4. Посчитайте неопределенный интеграл
   (a) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$
   (b) $\int\sin^3 x\,dx$
5. Посчитайте определенный интеграл $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx$
6. Найдите предел
   $$\lim_{x\to 0} x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

Домашнее задание 5.

1. Найти методом функции Лагранж условные критические точки функции $z = xy + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$ с областью определения $x>0$ и $y>0$,
   (a) при условии, что $xy = 1$.
   (b) при условии, что $xy \leqslant 1$.
   (c) при условии, что $xy \geqslant 1$.
2. Найти методом функции Лагранж условные критические точки функции $z = \frac{1}{1+(x+y)^2}$ при условии $xy = 0$.
3. Пусть $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ задана по правилу $f(x) = x$. Будем рассматривать f как элемент $L_2[-\pi,\pi]$, со скалярным произведением $(g,h) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)\,dx$.
   (a) Покажите, что f ортогонально функциям $\cos(kx)$ при $k\in\mathbb{Z}$ и $k\geqslant 0$.
   (b) Найдите разложение $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin(kx)$ посчитав коэффициенты Фурье a_k.
   (c) Найдите длины векторов $\|f\|_2$ и $\|a_k\|_2$. Зная эти длины, найдите сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Домашнее задание 6.

1. Пусть ξ – случайная величина такая, что $P(\xi = -1) = \frac{1}{4}$ и $P(\xi = 2) = \frac{1}{4}$ и для любых точек $a, b \in [0, 1]$ с условием $a < b$ верно $P(\xi \in [a, b]) = \frac{b-a}{2}$. Нарисуйте график функции распределения $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ.

2. В лотерее на 1% билетов выпадет выигрыш в 200 рублей, на 0.01% билетов выпадает выигрыш в 1000 рублей, а остальные билеты без выигрыша. Найдите средний выигрыш в этой лотерее (в расчете на один билет), то есть среднее арифметическое выигрышей всех билетов. Подумайте, как это сформулировать в терминах случайных величин и математического ожидания.

3. В ряд расположены m предметов. Случайно выбираются k предметов, $k < m$. Случайная величина X равна количеству таких предметов i, что i выбран, а все его соседи не выбраны. Найдите математическое ожидание X.

4. В равностороннем треугольнике ABC площади 1 выбираем точку M. Найти математическое ожидание площади ABM.

5. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ с плотностью $p(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$.

6. Пусть $P_\xi(x) = P(\xi = x)$ и $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$.

   (a) Показать, что для $a > 0$ и $-\infty < b < \infty$

   $$P_{a\xi+b}(x) = P_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \text{и} \quad F_{a\xi+b}(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

   (b) Найдите функцию распределения $F_{\xi^2}(y)$ (выразите ее через F_ξ и P_ξ).

Домашнее задание 7.

1. Пусть ξ, η – независимые случайные величины имеющие показательное распределение, то есть

   $$p_\xi(x) = p_\eta(x) = \lambda e^{-\lambda x}\theta(x)$$

   где

   $$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

   Найти следующие плотности

   $$p_{\xi,\xi+\eta}(x, y) \quad \text{и} \quad p_{\xi|\xi+\eta=z}(x)$$

   Важно: для совместной плотности укажите область в которой она равна нулю.

2. Используя характеристические функции и их свойства, найти распределение суммы двух независимых нормальных случайных величин с параметрами (a_1, σ_1^2) и (a_2, σ_2^2).

3. Пусть ξ и η независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Найти плотность величины $\chi = \xi^2 + \eta^2$.

4. Случайные величины X и Y независимы. X имеет распределение Лапласа с плотностью $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, а Y – равномерное на отрезке $[1, 2]$.

   (a) Найдите плотность распределения случайной величины $-2Y$.

   (b) Найдите плотность распределения случайной величины $X - 2Y$.

5. Игрок приходит в казино с k монетами. Каждый кон он выигрывает с вероятностью p и получает одну монету и проигрывает с вероятностью $q = 1 - p$ и отдает одну монету. Игра заканчивается если игрок потеряет все монеты или если он наберет предельную сумму выигрыша N. Найдите среднюю продолжительность игры в зависимости от k.

Домашнее задание для получения бонусных баллов

Линейная алгебра

1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^T y$ заданы векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Для семейства v_1, v_2, v_3 построили двойственное семейство w_1, w_2, w_3 удовлетворяющее свойствам

$$(w_i, v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Найдите во сколько раз объем параллелепипеда на векторах v_1, v_2, v_3 больше объема параллелепипеда на векторах w_1, w_2, w_3.

2. Найти SVD разложение для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Математический анализ

1. Разложите в ряд фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

и пользуясь этим разложением найдите сумму ряда

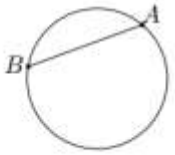
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

2. Пусть $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ – множество квадратных симметричных матриц размера n с положительными собственными значениями. Пусть $P \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ и $Q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. И пусть $X_1, \ldots, X_d \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – фиксированные матрицы. Найдите уравнения, задающие критические точки для следующей функции функции

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \mathrm{tr}(X_i^T P X_i Q) - m \ln \det(P) - n \ln \det(Q)$$

Теория вероятности

1. На плоскости нарисована окружность радиуса один. На ней равновероятно и независимо выбирают две точки A и B. Найдите среднее расстояние между точками A и B.



2. Игральная кость последовательно перекладывается с одной грани на любую другую из четырех соседних. Это делается равновероятно и независимо от предыдущих действий. В начале кость находилась числом «6» вверх. Рассмотрим вероятность

$$p(t) = P(\text{«На } t\text{-ом шаге кость находится гранью «6» вверх»})$$

Найдите предел $p(t)$ при $t \to \infty$.

Линейная алгебра

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

2. Для матрицы

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Найдите ее ранг при всех возможных значениях $x \in \mathbb{R}$.

3. Посчитайте характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Найдите обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Даны векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки и выразить все оставшиеся вектора через базисные.

6. Найдите базис векторного пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid Ay = 0\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$

Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2.

8. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами: (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Можно ли эти матрицы диагонализовать в каком-нибудь базисе?

9. Найдите сигнатуру следующей квадратичной формы:

$$Q(x, y, z) = 5\,x^2 - 6\,xy - 10\,xz - 8\,y^2 + 6\,yz + 5\,z^2$$

10. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализуйте базис $1, x, x^2, x^3$.

11. «Решите» систему методом наименьших квадратов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

12. Найти сингулярное разложение следующих матриц

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$