ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Анализ на многообразиях»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Искусственный интеллект*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2024*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2024

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 5
3. **Тематический план** 7
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** 8
6. **Материально-техническое обеспечение** 9
7. **Методические и оценочные материалы** 11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Анализ на многообразиях» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Искусственный интеллект», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Анализ на многообразиях» предоставляет фундаментальные инструменты для описания и исследования сложных геометрических структур, которые лежат в основе современной теоретической физики (общая теория относительности, квантовая гравитация), топологии, геометрических методов в машинном обучении и компьютерной графике. Без глубоких представлений о топологии, дифференциальной геометрии и тензорном исчислении невозможно корректно формулировать и решать задачи, связанные с кривизной пространства-времени, оптимизацией на нелинейных поверхностях или построением invariant-моделей в информатике.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Искусственный интеллект» и входит в вариативную часть Блока 1 формируемую участниками образовательных отношений как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 5, 6, 7, 8 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин (модулей): «Математический анализ. Часть 1», «Математический анализ. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» или «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 1», «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2».

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у студентов целостного представления о топологическом и дифференциальном анализе многообразий, а также научить их применять полученный математический аппарат для построения и исследования гладких геометрических моделей в теории относительности, физических приложениях и современных вычислительных методах.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— изучить основные понятия общей топологии (топологические пространства, непрерывность, компактность, связность) и их специализацию для гладких многообразий, включая диффеоморфизмы, теорему Сарда и свойства гладких отображений;

— научиться вычислять касательные пространства, работать с векторными полями и скобкой Ли, а также с тензорными полями, ковариантными производными иными типами связностей;

— уметь задавать метрику на многообразии, находить символы Кристоффеля, решать уравнения геодезических и вычислять тензоры кривизны (Римана, Риччи, скалярную);

— использовать математический аппарат в задачах теоретической физики (модель пространства-времени, уравнения Эйнштейна), геометрической оптимизации (оптимальное размещение на нелинейных поверхностях) и современных вычислительных областях (геометрическое машинное обучение, графика, обучение представлениям на многообразиях).

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основные понятия общей топологии (топологические пространства, непрерывность, компактность, связность) и их применение к многообразиям;

— определения гладких многообразий, гладких отображений, диффеоморфизмов и их ключевые свойства;

— теорию касательных пространств, векторных полей, скобки Ли и их роль в дифференциальной геометрии;

— основы тензорного исчисления: типы тензоров, операции с ними, ковариантная производная и связности;

— основные объекты римановой геометрии: метрику, геодезические, кривизну (тензоры Римана, Риччи, скалярную кривизну);

уметь:

— анализировать топологические свойства пространств и многообразий (хаусдорфовость, компактность, наличие гладкой структуры);

— работать с гладкими отображениями, строить диффеоморфизмы, применять теорему Сарда;

— вычислять касательные векторы, исследовать векторные поля, работать со скобкой Ли;

— оперировать тензорными полями, вычислять ковариантные производные, проверять свойства связностей;

— решать уравнения геодезических, вычислять символы Кристоффеля и тензоры кривизны для заданных метрик;

владеть:

— математическим аппаратом общей и дифференциальной топологии для анализа геометрических структур;

— методами дифференциальной геометрии, включая координатные и бескоординатные вычисления;

— навыками работы с тензорами и римановыми метриками в физических и геометрических приложениях;

— способностью применять полученные знания для решения задач в теории многообразий, общей теории относительности и смежных областях.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности.
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной

	интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности		деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта, включая соблюдение норм информационной безопасности

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары			
1	Топология	5	5		18	Домашнее задание Аудиторная работа
2	Гладкая структура	5	5		18	Домашнее задание Аудиторная работа
3	Касательное пространство	5	5	2	18	Домашнее задание Контрольная работа Аудиторная работа
4	Векторные поля	5	5		18	Домашнее задание Аудиторная работа
5	Дифференцирование	5	5		18	Домашнее задание Аудиторная работа
6	Римановы многообразия	2	2		18	Домашнее задание Лабораторная работа
7	Интегрирование	3	3		16	Домашнее задание
	Зачет с оценкой			4		Итоговая работа
	Итого:	***30***	***30***	***6***	***124***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1.	Топология	Топологическое пространство и топологические многообразия. Гомеморфизмы и непрерывные отображения. Операции над топологическими пространствами
2.	Гладкая структура	Понятие карты и атласа. Гладкие многообразия. Примеры многообразий. Морфизмы многооразий, диффеоморфизм. Ранг отображения. Отображения постоянного ранга и подмногообразия Лемма Сарда и теоремы об аппроксимации.
3.	Касательное пространство	Три определения касательного вектора. Производная Ли. Дифференциал отображения.
4.	Векторные поля	Векторные и ковекторные поля, операторные поля, поля билинейных и квадратичных форм. Первая и вторая квадратичные формы. Понятие дифференциальной формы. Операции над дифференциальными формами. Дифференцирование. Примеры тензорных полей и операции над ними.
5.	Дифференцирование	Ковариантное дифференцирование. Символы Кристофеля и их вычисления
6.	Римановы многообразия	Метрика и Риманова многообразие. Риманова связноть. Контрольная работа Параллельный перенос и гоедезические
7.	Интегрирование	Плотности и интегрирование плотностей Ориентация на многообразии. Многообразие с краем и индуцированая ориентация Интегрирование дифференциальных форм. Интегрирование дифференциальных форм.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Мусин, Ю. Р. Тензорный анализ. Вводный курс с приложениями к анализу и геометрии : учебник для вузов / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 184 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06198-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/585823

2. Сандракова, Е. В. Дифференциальные формы на гладких многообразиях : учебник для вузов / Е. В. Сандракова, Е. В. Сумин. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 138 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10988-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/565616

Дополнительная литература:

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 416 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18887-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/583462

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья,

оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное

Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Анализ на многообразиях» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, аудиторная работа, контрольные работы, лабораторные работы, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал, использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Лабораторная работа — это форма учебной деятельности, где студенты выполняют практические задания под руководством преподавателя для закрепления теоретических знаний и развития навыков.

Для успешной подготовки к лабораторной работе рекомендуется заранее изучить теоретический материал, подготовить необходимые инструменты (например, программное обеспечение или данные) и активно экспериментировать с задачами, чтобы эффективно решать проблемы и демонстрировать понимание дисциплины.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Анализ на многообразиях»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Оценка за зачет**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Анализ на многообразиях» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашнее задание	15%	14	Форма проверки знаний, при которой студент отвечает на вопросы преподавателя в устной форме, демонстрируя свои знания и понимание темы
Аудиторная работа	15%	1	Активная работа студента на занятии
Контрольная работа	30%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Лабораторная работа	10%	1	Практическое задание, направленное на применение теоретических знаний при решении конкретных задач, выполняемое под руководством преподавателя
Зачет с оценкой	30%	1	Итоговая работа - письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время, возможен дополнительный устный экзамен

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Анализ на многообразиях»: «0,15× среднее за домашнее задание + 0,15 × аудиторная работа + 0,3 × контрольные работы + 0,1 × лабораторная работа + 0,3 × зачет с оценкой».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)

Примерные домашние задания

1. Дайте формальное определение топологического пространства, перечислите три основных свойства, которыми оно должно обладать, и объясните, почему из этих свойств следует хаусдорфовость, если к любой паре точек можно подобрать отделяющие открытые множества.
Ожидаемый результат : небольшая письменная выдержка (≈150 сл.); проверяется полнота определения и логика доказательства.

2. Покажите, что любой гладкий компактный многообразие без границы обладает конечным атласом. Укажите, где в доказательстве используется компактность. *Ожидаемый результат* : формальное доказательство (≈10 строк) с ссылкой на теорему о конечном подпокрытии.

3. Возьмите сферу $S2 \subset R3$ в стандартных сферических координатах (θ,φ). Выведите формулы для метрического тензора g, символов Кристоффеля Γijk и тензора Риччи Rij. *Ожидаемый результат* : набор формул, проверенных в SymPy (файл-ноутбук Jupyter).

4. С помощью библиотеки **Manifold** (или собственного кода) реализуйте функцию, принимающую точку p на двумерном торе и возвращающую базис векторных полей $\{\partial\theta,\partial\varphi\}$ в координатах (θ,φ). Продемонстрируйте работу функции на пяти случайных точках. *Ожидаемый результат* : Jupyter-ноутбук с объявлением функции, выводом базисов и коротким пояснением.

5. В нескольких предложениях опишите, как тензор Римана появляется в уравнениях общей теории относительности и какую физическую величину описывает его скалярная кривизна R.
Ожидаемый результат : текст (≈200 сл.) с указанием уравнений Эйнштейна.

Примерные задания для семинаров

1. Заданы параметры поверхности Мёбиуса. Каждая группа должна найти касательное пространство в произвольной точке, построить векторное поле «по направлению полоски», построить векторное поле, перпендикулярное полоске, и

вычислить скобку Ли между ними. Группа представляет решение на доске и делает короткий (≈5-минутный) доклад.

2. Обсудите, как теорема Сарда может быть использована при доказательстве существования решений уравнений Эйлера–Лагранжа на гладком многообразии. Студенты формируют список тезисов (≤ 6 пунктов) и аргументируют каждый из них.

3. Постройте геодезическую на гиперболической плоскости (модель Пуанкаре) с начальными условиями $(x0,y0)=(0,0), \dot{x}0=1, \dot{y}0=0$. Сравните полученное численное решение (Runge-Kutta) с аналитической формой и представьте график и таблицу ошибок.

4. «Почему совместимость метрики $\nabla g=0$ важна для физики?». Студенты приводят примеры, в том числе нелинейную связность в общей теории относительности, и фиксируют свои выводы в протоколе семинара (≈150 сл.).

5. Дано пространство конфигураций манипулятора-робота $SO(3)\times R3$. Требуется сформулировать задачу планирования траекторий в терминах геодезических. Группы готовят схематический план решения (псевдокод + короткое объяснение).

Примерные задания для контрольной работы

1. **Определение карты** – дайте определение мягкой карты (chart) и перечислите два обязательных свойства её обратного отображения.
2. **Метрика тора** – в координатах (θ,φ) на торе $T2=S1\times S1$ запишите метрический тензор g, если радиусы обеих окружностей равны 1.
3. **Символ Кристоффеля** – вычислите $\Gamma\varphi\varphi\theta$ для указанной метрики тора.
4. **Теорема Сарда** – сформулируйте её в одном предложении.
5. **Инвариантность скалярной кривизны** – докажите, что скалярная кривизна R остаётся неизменной при переходе к другим координатам на произвольном двумерном римановом многообразии.
6. **Уравнение геодезических на сфере** – запишите систему ОДУ для $(\theta(t),\varphi(t))$ на сфере $S2$.

Примерные задания для лабораторной работы

1. **Создание класса многообразия** – реализуйте класс **Manifold** с полями **dim**, **charts** (список функций-карт) и **transition_maps**. Встроите проверку совместимости атласа (гладкость переходных функций).
2. **Тензорный модуль** – напишите функции для задания метрики **metric(g_ij)**, её обратной метрики и вычисления символов Кристоффеля первого рода Γijk по формуле Кристоффеля-II.
3. **Кривизна** – на основе полученных символов реализуйте вычисление тензора Римана $Rijkl$, тензора Риччи Rij и скалярной кривизны $R=gijRij$. Выведите полученные массивы.
4. **Геодезические** – сформулируйте систему ОДУ геодезических, решите её с помощью **scipy.integrate.solve_ivp** для выбранной метрики (например, гиперболическая плоскость в модели Пуанкаре).
5. **Визуализация** – постройте графики полученных геодезических при разных начальных условиях, используя **matplotlib** или **plotly**. Для сравнения отобразите геодезические на сфере и на торе.
6. **Отчёт** – оформите PDF-документ, включающий:

— Краткое теоретическое описание реализуемых формул;

— Основные блоки кода с комментариями;

— Таблицы значений символов Кристоффеля, тензоров кривизны и графики геодезических;

— Анализ полученных численных результатов (сравнение со известными аналитическими значениями, например, скалярная кривизна сферы = 1).

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Что определяет набор открытых множеств в топологическом пространстве?	Топология / Аксиомы топологии	УК-1
2	Какое свойство отображения сохраняет топологическую структуру при преобразовании?	Гомеоморфизм / Непрерывность с непрерывным обратным	УК-1
3	Какое условие необходимо для совместимости двух карт в атласе?	Гладкость переходных функций / C^∞-согласованность	УК-1
4	Что утверждает теорема Сарда о критических значениях гладкого отображения?	Мера нуль / Образ критических точек имеет меру нуль	УК-1
5	Какое ограничение накладывает хаусдорфовость на выбор топологии многообразия?	Отделимость точек / Существование непересекающихся окрестностей	УК-1
6	Как интерпретируется касательный вектор через дифференцирование функций?	Оператор дифференцирования / Выводная в точке	УК-1
7	Какой объект представляет собой дифференциал гладкого отображения в точке?	Линейное отображение касательных пространств / df_p	УК-1
8	Какая операция характеризует некоммутативность потока векторных полей?	Скобка Ли / Коммутатор [X, Y]	УК-1
9	Какой аналог векторного поля используется в градиентных методах оптимизации?	Градиент векторного поля / Антиградиентный поток	ОПК-4
10	Что является результатом внешнего дифференцирования дифференциальной формы?	Дифференциальная форма высшей степени / dω	ОПК-4
11	Для чего вводятся символы Кристоффеля в ковариантной производной?	Учёт кривизны пространства / Коэффициенты связности	ОПК-4
12	Какое свойство связности называется метрической совместимостью?	Ковариантная производная метрики равна нулю / ∇g = 0	ОПК-4
13	Какой тензор задаёт геометрию риманова многообразия в каждой точке?	Метрический тензор / Положительно определённая форма	ПК-2
14	Какое уравнение описывает кривые наименьшей длины на поверхности?	Уравнение геодезических / ∇_γ' γ' = 0	ПК-2

15	Как кривизна многообразия влияет на сходимость алгоритмов машинного обучения?	Влияет на ландшафт функции потерь / Условие числа	ПК-2
16	Какая теорема связывает интеграл по многообразию с интегралом по его границе?	Теорема Стокса / Обобщённая формула Ньютона-Лейбница	ПК-2
17	Какое условие необходимо для существования глобальной ориентации на многообразии?	Тривиальность расслоения ориентаций / Отсутствие листов Мёбиуса	ПК-2
18	Какие программные пакеты применяются для символического интегрирования форм?	SymPy / SageMath / Mathematica	ПК-2
19	Как соотносятся локальные карты и глобальная структура многообразия?	Через склейку локальных данных / Принцип локальности	ПК-2
20	Какой метод выбирается для вычисления интеграла в зависимости от размерности пространства?	Численное или аналитическое интегрирование / Выбор метода квадратур	ПК-2