ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Многомерная теория вероятности и статистика»

Направление подготовки: *38.03.05 Бизнес-информатика*

Направленность (профиль) подготовки: *Бизнес-аналитика*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2024*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2024

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 5
3. **Тематический план** 6
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 7
5. **Учебно-методическое обеспечение** 9
6. **Материально-техническое обеспечение** 9
7. **Методические и оценочные материалы** 11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Многомерная теория вероятности и статистика» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 38.03.05 Бизнес-информатика, профиль Бизнес-аналитика, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 838 от 29.07.2020 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Многомерная теория вероятности и статистика» предоставляет фундаментальные инструменты для моделирования многомерных случайных процессов, анализа больших данных и решения задач оптимизации, что востребовано в машинном обучении, статистическом моделировании и разработке алгоритмов. Кроме того, освоение данной дисциплины способствует развитию навыков интерпретации многомерных зависимостей и неопределённостей, что повышает эффективность применения математических методов в прикладных проектах, включая искусственный интеллект и анализ данных.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 38.03.05 Бизнес-информатика, профиль Бизнес-аналитика и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 5, 6, 7, 8 семестрах на выбор.

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у студентов глубокого понимания многомерных вероятностных моделей и статистических методов, необходимых для анализа сложных данных в области математики и компьютерных наук.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— изучить основные понятия многомерных распределений вероятностей, такие как совместные плотности, ковариационные матрицы и условные распределения, для моделирования зависимостей между случайными величинами;

— научиться применять статистические методы многомерного анализа, включая оценку параметров, проверку гипотез и регрессионный анализ, для обработки и интерпретации эмпирических данных в контексте компьютерных наук;

— развить навыки использования программных инструментов для симуляции многомерных случайных процессов и анализа реальных данных, что способствует интеграции теоретических знаний с практическими задачами в области машинного обучения и оптимизации;

— освоить методы визуализации и интерпретации результатов многомерного статистического анализа, чтобы эффективно решать проблемы в прикладной математике, таких как кластерный анализ и прогнозирование.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— ключевые неравенства: Хёфдинга, Чернова, Бернштейна, Хэнсона-Райта, матричный Бернштейн (принципы, области применения);

— распределения в высоких размерностях: субгауссовость/субэкспоненциальность (одномерные/многомерные), связь с тяжёлыми хвостами;

— спектральные свойства (сингулярные числа, собственные значения), методы оценок через ε-покрытия;

— концентрация для липшицевых функций, неравенства Гауссовых процессов (Слепяна, Гордона);

— приложения: Лемма Джонсона-Линденштрауса, PCA, оценка ковариаций, разреженное восстановление, задачи на графах;

уметь:

— доказывать неравенства: для сумм независимых/слабозависимых величин;

— анализировать высокоразмерные объекты: Нормы векторов/матриц, гауссова ширина множеств;

— выбирать методы: Субгауссовость, цепи, случайные матрицы — для конкретных задач (суммы, квадратичные формы, проекции);

— строить оценки: Робастные оценки (медиана средних), ковариации, линейные модели высокой размерности;

— применять лемму JL для снижения размерности;

владеть:

— техниками: Симметризация, декуплинг, контракции — для анализа сложных выражений;

— методами цепей: Универсальный chaining (Таллагран) для контроля супремумов процессов;

— геометрической интуицией: Интерпретация норм, проекций, теорем (Дворецкого-Милмана);

— анализом зависимых данных: Матричный Бернштейн, Хэнсон-Райт;

— интеграцией методов: Комбинация неравенств, случайных матриц и геометрии для задач ML/статистики.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области аналитики, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
ОПК-4.	Способен понимать принципы работы информационных технологий; использовать информацию, методы и программные средства ее сбора, обработки и анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений	ОПК-4.1.	Знает основные принципы работы информационных технологий и их влияние на бизнес-процессы
		ОПК-4.2.	Умеет использовать методы и программные средства для сбора, обработки и анализа информации, обеспечивая качественную информационно-аналитическую поддержку
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт в применении аналитических инструментов для поддержки принятия управленческих решений в организациях
ПК-2.	Способен использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования для решения задач профессиональной деятельности	ПК-2.1.	Знает основные математические методы и инструментальные средства, применяемые для обработки и анализа информации
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать математический аппарат для систематизации данных и решения профессиональных задач
		ПК-2.3.	Имеет практический опыт работы с инструментами анализа информации в рамках исследовательских проектов

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары			
1	Введение и основы анализа и вероятностей	2	4		7	Домашнее задание Подготовка к семинару
2	Концентрация сумм независимых случайных величин	2	4		7	Домашнее задание
3	Субгауссовы и субэкспоненциальные распределения	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
4	Случайные векторы в высоких размерностях	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
5	Основы теории случайных матриц	2	4		6	Домашнее задание Подготовка к семинару
6	Спектральные свойства случайных матриц	2	4		6	Подготовка к семинару
7	Концентрация без независимости	2	4		6	Домашнее задание Контрольная работа
8	Квадратичные формы, симметризация и контракции	2	4		6	Домашнее задание Контрольная работа
9	Гауссовские процессы и их применение	2	4		6	Домашнее задание Подготовка к семинару
10	Методы цепей (Chaining)	2	4		6	Подготовка к семинару
11	Отклонения случайных матриц на множествах	2	4		6	Домашнее задание Контрольная работа
12	Двусторонние оценки и теоремы геометрии	2	4	2	6	Домашнее задание Контрольная работа
13	Анализ зависимых данных	2	4		6	Домашнее задание Подготовка к семинару
14	Интеграция методов и приложения	2	4		6	Подготовка к семинару
15	Заключение	2	4		6	Подготовка к семинару
	Зачет с оценкой			4		
	Итого:	***30***	***60***	***6***	***94***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Введение и основы анализа и вероятностей	Выпуклые множества и функции. Нормы и скалярные произведения Случайные величины и случайные векторы. Объединение событий и вероятностные неравенства. Условные вероятности. Основные предельные теоремы
2	Концентрация сумм независимых случайных величин	Зачем нужны неравенства концентрации? Неравенство Хёфдинга. Неравенство Чернова. Применение: медиана средних. Применение: степени случайных графов. Субгауссовы распределения. Субгауссовы неравенства Хёфдинга и Хинчина. Субэкспоненциальные распределения. Неравенство Бернштейна
3	Субгауссовы и субэкспоненциальные распределения	Свойства субгауссовых и субэкспоненциальных распределений. Применение: оценка ковариационных матриц. Примеры распределений в высоких размерностях. Связь с тяжёлыми хвостами
4	Случайные векторы в высоких размерностях	Концентрация нормы случайных векторов. Ковариационные матрицы и метод главных компонент (PCA). Примеры распределений в высоких размерностях. Субгауссовы распределения в многомерном случае. Применение: неравенство. Гротендика и полуопределённое программирование. Применение: задача о максимальном разрезе графа
5	Основы теории случайных матриц	Основы линейной алгебры для случайных матриц. Сетки, покрытия и упаковки. Применение: коды с исправлением ошибок. Верхние оценки для субгауссовых случайных матриц. Применение: обнаружение сообществ в сетях
6	Спектральные свойства случайных матриц	Двусторонние оценки для субгауссовых матриц. Применение: оценка ковариационных матриц. Применение: кластеризация данных. Сингулярные числа и собственные значения
7	Концентрация без независимости	Концентрация липшицевых функций на сфере. Концентрация в других метрических пространствах. Применение: лемма Джонсона-Линденштрауса. Матричное неравенство Бернштейна. Применение: обнаружение сообществ в разреженных сетях. Применение: оценка ковариации для общих распределений
8	Квадратичные формы, симметризация и контракции	Декуплинг. Неравенство Хэнсона-Райта. Симметризация. Случайные матрицы с не-i.i.d. элементами. Применение: завершение матриц. Принцип контракции
9	Гауссовские процессы и их применение	Основные понятия и примеры. Неравенства Слепяна, Судакова-Ферника и Гордона. Применение: точные оценки для гауссовых матриц. Неравенство Судакова. Гауссова ширина множеств. Применение: случайные проекции множеств
10	Методы цепей (Chaining)	Неравенство Дадли. Применение: эмпирические процессы. VC-размерность. Применение: теория статистического обучения. Универсальный chaining (Таллагран). Неравенство Шева
11	Отклонения случайных матриц на множествах	Матричное неравенство отклонения. Случайные матрицы, оценка ковариации и лемма Джонсона-Линденштрауса. Случайные сечения: оценка M* и теорема escape. Применение: высокоразмерные линейные модели. Применение: точное разреженное восстановление

12	Двусторонние оценки и теоремы геометрии	Двустороннее неравенство Шева. Теорема Дворецкого-Милмана. Применение: геометрическая интерпретация норм и проекций
13	Анализ зависимых данных	Матричное неравенство Бернштейна для зависимых данных. Неравенство Хэнсона-Райта для зависимых величин. Применение: задачи машинного обучения и статистики
14	Интеграция методов и приложения	Комбинация неравенств концентрации, случайных матриц и геометрии. Применение: задачи машинного обучения (PCA, кластеризация, восстановление). Применение: статистические задачи (оценка параметров, проверка гипотез).
15	Заключение и подготовка к итоговой аттестации	Повторение ключевых тем курса. Разбор практических задач. Подготовка к зачёту

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Осокин, А. Н. Теория информации : учебник для вузов / А. Н. Осокин, А. Н. Мальчуков. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 208 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-16333-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561389.

2. Попов, А. М. Теория вероятностей : учебник для вузов / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 179 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18266-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561153.

3. Энатская, Н. Ю. Теория вероятностей : учебник для вузов / Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 204 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01338-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561149.

4. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей : учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 259 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-17131-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561038.

5. Малугин, В. А. Теория вероятностей : учебник для вузов / В. А. Малугин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 266 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06964-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/563987.

Дополнительная литература:

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М. : Вильямс, 2009. — 784 с.

2. Локтионов, И. К. Численные методы : учебник / И. К. Локтионов, Л. П. Мироненко, В. В. Турупалов ; под общ. ред. канд. техн. наук, проф. В. В. Турупалова. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. - 380 с. - ISBN 978-5-9729-0786-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1902598.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и

индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;
— механическими калькуляторами;
— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		

Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Многомерная теория вероятности и статистика» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в

обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Многомерная теория вероятности и статистика»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы,
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
2	Не сдан	Не зачтено	минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Многомерная теория вероятности и статистика» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	13	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	30%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Аудиторная работа	15%	1	Ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Зачет с оценкой	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время, возможен дополнительный устный экзамен

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Многомерная теория вероятности и статистика»: «0,2× среднее за домашние задания + 0,3× среднее за контрольные работы + 0,15 ×за аудиторную работу + 0,35 ×зачет с оценкой».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)

Примерные вопросы для семинаров

Введение и основы анализа и вероятностей Выпуклые множества и функции. Нормы и скалярные произведения Случайные величины и случайные векторы. Объединение событий и вероятностные неравенства. Условные вероятности. Основные предельные теоремы

1. Что такое выпуклое множество и как оно определяется в евклидовом пространстве?
2. Приведите пример выпуклой функции и объясните, почему она выпуклая.
3. Какие основные нормы используются в многомерном анализе и как они связаны со скалярным произведением?
4. Как определяется случайная величина и чем она отличается от случайного вектора?
5. Что такое объединение событий и как вычисляется его вероятность по формуле включения-исключения?
6. Объясните вероятностные неравенства Чебышёва и Маркова и их применение.
7. Как вычисляется условная вероятность и что такое независимость событий?
8. Приведите пример применения условных вероятностей в реальной задаче.
9. Что утверждает центральная предельная теорема и почему она важна для статистики?
10. Как закон больших чисел связан с сходимостью средних значений случайных величин?

Концентрация сумм независимых случайных величин Зачем нужны неравенства концентрации? Неравенство Хёфдинга. Неравенство Чернова. Применение: медиана средних. Применение: степени случайных графов. Субгауссовы распределения. Субгауссовы неравенства Хёфдинга и Хинчина. Субэкспоненциальные распределения. Неравенство Бернштейна

1. Почему неравенства концентрации важны для анализа сумм независимых случайных величин?
2. Сформулируйте неравенство Хёфдинга и укажите его условия применения.
3. Как применяется неравенство Чернова для оценки отклонений сумм биномиальных случайных величин?
4. Что такое медиана средних и как она используется в контексте неравенств концентрации?
5. Как неравенства концентрации применяются для анализа степеней в случайных графах?
6. Что такое субгауссово распределение и приведите пример такого распределения.
7. В чём разница между субгауссовыми неравенствами Хёфдинга и Хинчина?
8. Как определяются субэкспоненциальные распределения и их свойства?
9. Сформулируйте неравенство Бернштейна и его преимущества перед другими неравенствами.
10. Приведите пример применения неравенства Бернштейна в статистическом анализе.

Субгауссовы и субэкспоненциальные распределения Свойства субгауссовых и субэкспоненциальных распределений. Применение: оценка ковариационных матриц. Примеры распределений в высоких размерностях. Связь с тяжёлыми хвостами

1. Какие ключевые свойства субгауссовых распределений отличают их от обычных?
2. Как субэкспоненциальные распределения связаны с тяжёлыми хвостами?
3. Приведите пример субгауссового распределения в высоких размерностях.
4. Как субэкспоненциальные распределения используются для оценки ковариационных матриц?
5. Что такое тяжёлые хвосты и как они влияют на концентрацию вероятностей?
6. Сравните субгауссовы и субэкспоненциальные неравенства по их областям применения.
7. Приведите пример распределения с тяжёлыми хвостами и объясните его поведение.
8. Как свойства субгауссовых распределений помогают в анализе многомерных данных?
9. Какие примеры распределений в высоких размерностях иллюстрируют субэкспоненциальные свойства?
10. Как оценка ковариационных матриц связана с субгауссовыми и субэкспоненциальными неравенствами?

Случайные векторы в высоких размерностях Концентрация нормы случайных векторов. Ковариационные матрицы и метод главных компонент (PCA). Примеры распределений в высоких размерностях. Субгауссовы распределения в многомерном случае. Применение: неравенство Гротендика и полуопределённое программирование. Применение: задача о максимальном разрезе графа

1. Что такое концентрация нормы случайного вектора и как она проявляется в высоких размерностях?
2. Как определяются ковариационные матрицы и их роль в анализе случайных векторов?
3. Объясните метод главных компонент (PCA) и его применение к случайным векторам.
4. Приведите пример распределения случайного вектора в высоких размерностях.
5. Как субгауссовы распределения расширяются на многомерный случай?
6. Что утверждает неравенство Гротендика и как оно связано с полуопределённым программированием?
7. Как неравенство Гротендика применяется в задаче о максимальном разрезе графа?
8. Какие свойства субгауссовых векторов важны для концентрации в высоких размерностях?
9. Приведите пример использования PCA для анализа ковариационных матриц случайных векторов.
10. Как концентрация нормы влияет на решения задач в полуопределённом программировании?

Основы теории случайных матриц Основы линейной алгебры для случайных матриц. Сетки, покрытия и упаковки. Применение: коды с исправлением ошибок. Верхние оценки для субгауссовых случайных матриц. Применение: обнаружение сообществ в сетях

1. Какие основы линейной алгебры необходимы для анализа случайных матриц?
2. Что такое сетки, покрытия и упаковки в контексте случайных матриц?
3. Как сетки применяются в кодах с исправлением ошибок?
4. Какие верхние оценки существуют для субгауссовых случайных матриц?
5. Как верхние оценки для субгауссовых матриц используются в обнаружении сообществ в сетях?
6. Приведите пример случайной матрицы и объясните её свойства.
7. Как линейная алгебра помогает в анализе спектра случайных матриц?
8. Что такое покрытие и упаковка в геометрическом смысле для матриц?
9. Как коды с исправлением ошибок связаны с теорией случайных матриц?
10. Приведите пример применения верхних оценок в задаче обнаружения сообществ.

Спектральные свойства случайных матриц Двусторонние оценки для субгауссовых матриц. Применение: оценка ковариационных матриц. Применение: кластеризация данных. Сингулярные числа и собственные значения

1. Что такое двусторонние оценки для субгауссовых случайных матриц?
2. Как двусторонние оценки применяются для оценки ковариационных матриц?
3. Как спектральные свойства используются в кластеризации данных?

4. Что такое сингулярные числа и собственные значения случайной матрицы?
5. Приведите пример вычисления собственных значений для субгауссовой матрицы.
6. Как двусторонние оценки помогают в анализе спектра?
7. Что такое ковариационная матрица и как её оценивают через спектр?
8. Как кластеризация данных связана с сингулярными числами?
9. Какие свойства субгауссовых матриц влияют на их спектр?
10. Приведите пример применения спектрального анализа в машинном обучении.

Концентрация без независимости Концентрация липшицевых функций на сфере. Концентрация в других метрических пространствах. Применение: лемма Джонсона-Линденштрауса. Матричное неравенство Бернштейна. Применение: обнаружение сообществ в разреженных сетях. Применение: оценка ковариации для общих распределений

1. Что такое концентрация липшицевых функций на сфере?
2. Как концентрация проявляется в других метрических пространствах?
3. Что утверждает лемма Джонсона-Линденштрауса и её применение?
4. Сформулируйте матричное неравенство Бернштейна.
5. Как матричное неравенство Бернштейна применяется в обнаружении сообществ в разреженных сетях?
6. Как оценивается ковариация для общих распределений без независимости?
7. Приведите пример липшицевой функции на сфере.
8. В чём отличие концентрации без независимости от концентрации для независимых величин?
9. Как лемма Джонсона-Линденштрауса используется в снижении размерности?
10. Приведите пример применения матричного неравенства Бернштейна в анализе сетей.

Квадратичные формы, симметризация и контракции Декуплинг. Неравенство Хэнсона-Райта. Симметризация. Случайные матрицы с не-i.i.d. элементами. Применение: завершение матриц. Принцип контракции

1. Что такое декуплинг в анализе квадратичных форм?
2. Сформулируйте неравенство Хэнсона-Райта и его применение.
3. Что такое симметризация и как она используется в вероятностном анализе?
4. Как анализируются случайные матрицы с не-i.i.d. элементами?
5. Как декуплинг применяется в завершении матриц?
6. Что такое принцип контракции и его роль?
7. Приведите пример квадратичной формы и её анализ через декуплинг.
8. Как симметризация помогает в оценках квадратичных форм?
9. Что такое завершение матриц и как оно связано с неравенством Хэнсона-Райта?
10. Приведите пример применения принципа контракции в статистике.

Гауссовские процессы и их применение Основные понятия и примеры. Неравенства Слепяна, Судакова-Ферника и Гордона. Применение: точные оценки для гауссовых матриц. Неравенство Судакова. Гауссова ширина множеств. Применение: случайные проекции множеств

1. Что такое гауссовский процесс и приведите пример?
2. Сформулируйте неравенство Слепяна для гауссовских процессов.
3. Что утверждает неравенство Судакова-Ферника?
4. Как применяется неравенство Гордона в гауссовских процессах?
5. Как гауссовские процессы используются для точных оценок гауссовых матриц?
6. Что такое неравенство Судакова и его применение?
7. Определите гауссову ширину множеств.
8. Как гауссова ширина применяется в случайных проекциях множеств?
9. Приведите пример гауссовского процесса в многомерном анализе.
10. Как неравенства для гауссовских процессов помогают в геометрии?

Методы цепей (Chaining) Неравенство Дадли. Применение: эмпирические процессы. VC-размерность. Применение: теория статистического обучения. Универсальный chaining (Таллагран). Неравенство Шева

1. Что такое метод цепей (chaining) в вероятностном анализе?
2. Сформулируйте неравенство Дадли и его применение.
3. Как неравенство Дадли используется в эмпирических процессах?
4. Что такое VC-размерность и её роль в статистическом обучении?
5. Как VC-размерность связана с теорией статистического обучения?
6. Что такое универсальный chaining по Таллагран?
7. Сформулируйте неравенство Шева.
8. Приведите пример применения chaining в эмпирических процессах.
9. Как VC-размерность влияет на обобщающую способность моделей?
10. Что такое chaining и как оно отличается от других методов концентрации?

Отклонения случайных матриц на множествах Матричное неравенство отклонения. Случайные матрицы, оценка ковариации и лемма Джонсона-Линденштрауса. Случайные сечения: оценка M* и теорема escape. Применение: высокоразмерные линейные модели. Применение: точное разреженное восстановление

1. Что такое матричное неравенство отклонения?
2. Как оно применяется к случайным матрицам?
3. Как лемма Джонсона-Линденштрауса связана с оценкой ковариации?
4. Что такое случайные сечения и оценка M*?
5. Сформулируйте теорему escape для случайных сечений.
6. Как теорема escape применяется в высокоразмерных линейных моделях?
7. Как матричное неравенство отклонения используется в точном разреженном восстановлении?
8. Приведите пример оценки ковариации через случайные матрицы.
9. Что такое M* в контексте случайных сечений?

10. Как высокоразмерные линейные модели зависят от матричных неравенств?

Двусторонние оценки и теоремы геометрии Двустороннее неравенство Шева. Теорема Дворецкого-Милмана. Применение: геометрическая интерпретация норм и проекций

1. Сформулируйте двустороннее неравенство Шева.
2. Что утверждает теорема Дворецкого-Милмана?
3. Как теорема Дворецкого-Милмана применяется в геометрии?
4. Что такое геометрическая интерпретация норм в контексте двусторонних оценок?
5. Как проекции связаны с неравенством Шева?
6. Приведите пример применения двустороннего неравенства Шева.
7. Как теорема Дворецкого-Милмана помогает в анализе выпуклых множеств?
8. Что такое норма в геометрическом смысле для случайных величин?
9. Как двусторонние оценки используются в проекциях?
10. Приведите пример геометрической интерпретации норм через теорему Дворецкого-Милмана.

Анализ зависимых данных Матричное неравенство Бернштейна для зависимых данных. Неравенство Хэнсона-Райта для зависимых величин. Применение: задачи машинного обучения и статистики

1. Как матричное неравенство Бернштейна адаптируется для зависимых данных?
2. Сформулируйте неравенство Хэнсона-Райта для зависимых величин.
3. Как неравенство Хэнсона-Райта применяется в машинном обучении?
4. Что такое зависимые данные и почему они требуют специальных неравенств?
5. Приведите пример применения матричного неравенства Бернштейна к зависимым данным.
6. Как анализ зависимых данных влияет на статистику?
7. Что такое зависимость в контексте случайных величин?
8. Как неравенства для зависимых данных используются в задачах статистики?
9. Приведите пример задачи машинного обучения с зависимыми данными.
10. Как матричное неравенство Бернштейна отличается для независимых и зависимых случаев?

Интеграция методов и приложения Комбинация неравенств концентрации, случайных матриц и геометрии. Применение: задачи машинного обучения (PCA, кластеризация, восстановление). Применение: статистические задачи (оценка параметров, проверка гипотез).

1. Как комбинируются неравенства концентрации и теория случайных матриц?
2. Как геометрия интегрируется с методами концентрации?
3. Как PCA использует комбинацию методов концентрации и матриц?
4. Как кластеризация данных связана с интеграцией методов?
5. Что такое восстановление в контексте машинного обучения и его методы?
6. Как оценка параметров использует неравенства концентрации?
7. Как проверка гипотез применяется в статистических задачах?

8. Приведите пример интеграции геометрии и случайных матриц в PCA.
9. Как комбинация методов помогает в высокоразмерных задачах?
10. Что такое интеграция методов и её преимущества в приложениях?

Заключение и подготовка к итоговой аттестации Повторение ключевых тем курса. Разбор практических задач. Подготовка к зачёту

1. Какие ключевые темы курса по многомерной теории вероятности и статистике вы бы выделили?
2. Как неравенства концентрации применяются в практических задачах?
3. Приведите пример задачи с случайными матрицами и её решение.
4. Что такое субгауссовы распределения и их роль в курсе?
5. Как гауссовские процессы используются в анализе?
6. Что такое chaining и его применение в эмпирических процессах?
7. Как анализируются отклонения случайных матриц?
8. Что такое двусторонние оценки и их геометрическая интерпретация?
9. Как анализируются зависимые данные в статистике?
10. Как подготовиться к зачёту по курсу, повторяя ключевые концепции?

Примерные задания по контрольной работе

Контрольная работа №1

1. Пусть X1,…,Xn$X1,\dots,Xn$ — независимые случайные величины с E[Xi]=0E[Xi]=0 и |Xi|≤1|Xi|≤1. Используя неравенство Хёфдинга, оцените вероятность P(|∑i=1nXi|≥t)P(|∑i=1nXi|≥t) для t>0t>0. Приведите численный пример для n=10n=10 и t=2t=2.
2. Объясните, почему субгауссовы распределения важны в анализе больших данных. Приведите пример субгауссового распределения и вычислите его субгауссовую норму.
3. Рассмотрите случайный вектор X∈Rd$\mathbf{X}$∈Rd с независимыми субгауссовыми компонентами. Как проявляется концентрация нормы X$\mathbf{X}$ в высоких размерностях? Примените это к задаче оценки ковариационной матрицы.
4. Что такое сетки и покрытия в теории случайных матриц? Как они применяются в кодах с исправлением ошибок? Приведите простой пример сетки в R2R2.
5. Для субгауссовой случайной матрицы A∈Rn×d$\mathbf{A}$∈Rn×d сформулируйте двусторонние оценки для её спектра. Объясните, как это используется в кластеризации данных.
6. Используя лемму Джонсона-Линденштрауса, объясните, как случайные проекции помогают в снижении размерности данных. Приведите оценку ошибки проекции для гауссовских векторов.
7. Докажите неравенство Хэнсона-Райта для квадратичных форм. Как оно применяется в завершении матриц? Приведите пример применения.
8. Определите гауссовский процесс и сформулируйте неравенство Слепяна. Примените его к оценке максимума гауссовской функции на множестве.
9. Что такое chaining (метод цепей) и неравенство Дадли? Как они используются в эмпирических процессах? Объясните роль VC-размерности в статистическом обучении.
10. Для зависимых случайных величин сформулируйте матричное неравенство Бернштейна. Примените его к задаче оценки параметров в высокоразмерных линейных моделях. Приведите пример отличия от независимого случая.

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1

1. Докажите неравенство Хёфдинга для суммы независимых случайных величин, ограниченных на интервале [0,1], и укажите его применение в оценке медианы средних.
2. Опишите свойства субгауссовых и субэкспоненциальных распределений, используя примеры из анализа данных в высоких размерностях, и объясните связь с тяжёлыми хвостами.
3. Рассчитайте концентрацию нормы случайного вектора в R^d для субгауссового распределения с параметром σ=1, используя неравенство Гротендика, и приведите пример применения в задаче о максимальном разрезе графа.
4. Объясните основы теории случайных матриц, включая понятия сеток и покрытий, и укажите их применение в кодах с исправлением ошибок.
5. Примените неравенство Дадли для эмпирических процессов и обсудите его роль в теории статистического обучения, включая VC-размерность.

Домашнее задание 2

1. Выведите неравенство Чернова для суммы независимых случайных величин и проиллюстрируйте его на примере степени случайного графа.
2. Опишите субгауссовы неравенства Хёфдинга и Хинчина, укажите их различия и применение в оценке ковариационных матриц.
3. Рассмотрите концентрацию липшицевых функций на сфере и примените лемму Джонсона-Линденштрауса для снижения размерности данных в машинном обучении.
4. Объясните декуплинг и неравенство Хэнсона-Райта, используя примеры из симметризации и применения в завершении матриц.
5. Опишите основные понятия гауссовских процессов, включая неравенство Судакова-Ферника, и приведите пример их применения в случайных проекциях множеств.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Укажите основное применение неравенства Хёфдинга в контексте медианы средних.	Оценка отклонений	УК-1
2	Найдите верхнюю оценку вероятности для субгауссовой случайной величины с параметром σ=1 при t=2.	2e^{-2}	ПК-2
3	Определите, что такое субэкспоненциальное распределение в одном слове.	Тяжелый хвост	УК-1
4	Укажите количество независимых величин, необходимое для применения неравенства Чернова с ε=0.1.	100	ПК-2
5	Найдите минимальное значение n для концентрации нормы случайного вектора в высоких размерностях.	1	ПК-2
6	Укажите применение PCA в анализе субгауссовых векторов.	Кластеризация	УК-1
7	Определите, что такое сетки в теории случайных матриц в одном слове.	Покрытия	УК-1
8	Найдите верхнюю оценку операторной нормы субгауссовой матрицы при t=3.	2d e^{-9/2}	ПК-2
9	Укажите неравенство, используемое для концентрации на сфере.	Липшицевых функций	ОПК-4
10	Найдите размерность после применения леммы Джонсона-Линденштрауса для ε=0.1.	100	ОПК-4
11	Определите, что такое декуплинг в одном слове.	Разделение	ОПК-4
12	Укажите применение неравенства Хэнсона-Райта.	Завершение матриц	ОПК-4
13	Найдите гауссову ширину единичного шара в R^2.	π	УК-1

14	Укажите неравенство для эмпирических процессов.	Дадли	ОПК-4
15	Определите, что такое VC-размерность в одном слове.	Сложность	ОПК-4
16	Найдите оценку отклонения случайной матрицы на множествах.	Матричное неравенство	ОПК-4
17	Укажите применение теоремы Дворецкого-Милмана.	Геометрия норм	ПК-2
18	Найдите матричное неравенство для зависимых данных.	Бернштейна	ПК-2
19	Определите, что такое принцип контракции в одном слове.	Сжатие	ПК-2
20	Укажите комбинацию методов для задач машинного обучения.	Концентрация и матрицы	ПК-2