
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«25» мая 2026 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Линейная алгебра и геометрия. Часть 2»**

Направление подготовки: 38.03.05 Бизнес-информатика

Направленность (профиль) подготовки: Бизнес и аналитика

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2026

**Москва
2026**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	6
4. Содержание дисциплины (модуля)	6
5. Учебно-методическое обеспечение	8
6. Материально-техническое обеспечение	8
7. Методические и оценочные материалы	10

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика, профиль Бизнес и аналитика, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 838 от 29.07.2020 года.

Изучение дисциплины (модуля) дает развитие аналитического мышления, навыков работы с математическими моделями и понимания пространственных структур, что является основой для дальнейшего изучения более сложных математических и компьютерных дисциплин.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 38.03.05 Бизнес-информатика, профиль Бизнес и аналитика и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе во 2 семестре. Доступна для изучения после успешного освоения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1».

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия» имеет два уровня подготовки: основной и продвинутый поток. Обучающиеся распределяются на соответствующие уровни по итогам входного тестирования по дисциплине (модулю).

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- освоение фундаментальных понятий и геометрических интерпретаций линейной алгебры;
- применение алгоритмов и методов для решения вычислительных задач;
- интеграция теории с доказательствами и прикладными моделями.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- основные алгебраические структуры линейной алгебры: векторные пространства, билинейные и квадратичные формы, линейные операторы и их инварианты.
- ключевые теоремы и классификационные результаты: о диагонализации, спектральном разложении, жордановой и сингулярной формах, ортогональных и самосопряжённых операторах.
- взаимосвязь геометрических и алгебраических понятий: длина, угол, проекция, объём, ориентация — и их выражение через скалярное произведение, матрицу Грама, определитель.
- принципы инвариантности: какие характеристики сохраняются при замене базиса, и как они используются для классификации объектов.
- иерархию линейных моделей: от общих (произвольные операторы) к структурированным (диагонализируемые, нормальные, ортогональные, симметричные);

уметь:

- приводить билинейные и квадратичные формы к каноническому (диагональному) виду и определять их тип по сигнатуре или рангу.
- находить собственные значения и векторы, строить жордановы и спектральные разложения линейных операторов.
- выполнять ортогонализацию, строить ортопроекторы и решать задачи наилучшего приближения (в т.ч. методом наименьших квадратов).

— вычислять и интерпретировать геометрические величины (объёмы, расстояния, углы) с помощью алгебраических инструментов (матрица Грама, определитель, SVD).

— применять сингулярное разложение для анализа и приближения матриц, включая задачи понижения размерности и устойчивого обращения;

владеть:

— языком инвариантного описания: умением отделять сущность объекта от его координатного представления.

— алгоритмической культурой линейной алгебры: чётким следованием процедурам диагонализации, ЖНФ, QR/SVD-разложений с пониманием их условий применимости.

— геометрической интуицией в многомерных пространствах: способностью интерпретировать алгебраические конструкции (ядро, образ, инвариантное подпространство) как геометрические объекты.

— навыками строгого доказательства: построения логических цепочек, использующих двойственность, ортогональные дополнения, индукцию по размерности, разложение пространства.

— подходом к моделированию линейных систем: умением выбирать адекватную алгебраическую модель (оператор, форма, разложение) под задачу — от классификации до оптимизации и аппроксимации.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-4.	Способен понимать принципы работы информационных технологий; использовать информацию, методы и программные средства ее сбора, обработки и анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений	ОПК-4.1.	Знает основные принципы работы информационных технологий и их влияние на бизнес-процессы
		ОПК-4.2.	Умеет использовать методы и программные средства для сбора, обработки и анализа информации, обеспечивая качественную информационно-аналитическую поддержку
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт в применении аналитических инструментов для поддержки принятия управленческих решений в организациях
ПК-2.	Способен использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования для решения задач профессиональной деятельности	ПК-2.1.	Знает основные математические методы и инструментальные средства, применяемые для обработки и анализа информации
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать математический аппарат для систематизации данных и решения профессиональных задач
		ПК-2.3.	Имеет практический опыт работы с инструментами анализа информации в рамках исследовательских проектов

3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятель ная работа	
		Лекции	Семинары (практичес кие занятия)			
1	Билинейные и квадратичные формы	6	12		18	Домашнее задание
2	Евклидовы пространства	6	12	2	18	Домашнее задание Контрольная работа
3	Операторы в евклиловых пространствах	4	8		12	Домашнее задание
4	SVD	4	8		12	Домашнее задание
5	ЖНФ (жорданова нормальная форма)	4	8	2	12	Домашнее задание Коллоквиум
6	Эрмитовы пространства	4	8	2	12	Домашнее задание Контрольная работа
7	Тензорные произведения	2	4		8	Домашнее задание
	Экзамен			2		
Итого за 2 семестр:		30	60	8	92	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		190				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Билинейные и квадратичные формы	Билинейные формы, ортогональные дополнения и невырожденность. Теорема о двойственности на подпространствах. Билинейные формы на одном пространстве. Ограничение билинейной формы на подпространство. Невырожденность ограничения. Диагонализуемость симметрических форм. Симметричный Гаусс. Метод Якоби. Алгоритм диагонализации на основе метода Якоби. Классификация симметрических билинейных форм. Квадратичные формы. Связь квадратичных и билинейных форм. Геометрический смысл сигнатуры. Графики квадратичных форм. Анализ поверхности.
2	Евклидовы пространства	Евклидовы пространства. Понятие длины вектора. Неравенство Коши-Буняковского. Понятие угла в евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. Замечание о сведении к школьной геометрии. Ортогонализация Грама-Шмидта. Проекция и ортопроекция. Расстояние между двумя векторами, между вектором и подпространством, угол между вектором и подпространством. Метод наименьших квадратов. Матрица Грама и ее свойства. k-мерные объемы через матрицу Грама и рекуррентная формула. Расстояние от вектора до подпространства через объемы. Изменение объема под действием линейного отображения и при смене образующих

3	Операторы в евклидовых пространствах	Сопряжённый и самосопряжённый операторы. Симметрические матрицы. Ортогональность собственных векторов. Спектральная теорема для самосопряжённых операторов. Ортогональные операторы и матрицы. Повороты и отражения. Канонический вид ортогонального оператора. Классификация ортогональных операторов
4	SVD	Сингулярные числа и сингулярные векторы. Существование SVD. Геометрический смысл сингулярного разложения. Приложения SVD. Матричные нормы. Псевдообратная матрица. Низкоранговые приближения. Теорема Эккарта — Янга. Связь с PCA
5	ЖНФ (жорданова нормальная форма)	Нильпотентные операторы. Жордановы клетки. Канонический вид нильпотентного оператора. Жорданова нормальная форма. Корневые подпространства. Алгоритм построения жордановой формы
6	Эрмитовы пространства	Эрмитова геометрия. Унитарные базисы. Матрица Грама. Комплексное сопряжение в матричной записи. Эрмитовы, унитарные и нормальные операторы. Унитарные матрицы. Спектральная теорема над комплексными числами
7	Тензорные произведения	Тензорные произведения векторных пространств. Билинейные отображения и тензоры. Базис тензорного произведения. Примеры и приложения

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Заболотский, В. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия (учебный комплекс) : учебное пособие / В.С. Заболотский. — 2-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 309 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-110519-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1872461>.

2. Литаврин, А. В. Линейная алгебра : учебное пособие / А. В. Литаврин, Т. В. Моисеенкова. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2022. - 244 с. - ISBN 978-5-7638-4604-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2092907>.

3. Шевцов, Г. С. Численные методы линейной алгебры : учебное пособие / Г. С. Шевцов, О. Г. Крюкова, Б. И. Мызникова. — 3-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2026. — 528 с. - ISBN 978-5-16-016796-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2211865>.

Дополнительная литература:

1. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15839-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560017>.

2. Сабитов, И. Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для вузов / И. Х. Сабитов, А. А. Михалев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 258 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08941-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/539950>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное

Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, коллоквиумы, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные

конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
Основной уровень		
Домашние задания	15%	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	20%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	30%	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Экзамен	35%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2»:

Основной уровень: $0,15 \times \text{среднее за домашние задания} + 0,2 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,3 \times \text{коллоквиум} + 0,35 \times \text{экзамен}$.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные вопросы к коллоквиуму

Тема «Системы линейных уравнений»

- Совместная и несовместная система
- Определённая и неопределённая система
- Однородная и неоднородная система
- Матрица
- Главная и побочная диагонали
- Элементарные преобразования строк
- Ступенчатый вид матрицы
- Главные и свободные переменные
- Как по ступенчатому виду понять, что система определена?
- Сколько может быть решений у системы линейных уравнений?
- Прямой ход алгоритма Гаусса
- Обратный ход алгоритма Гаусса

Тема «Операции над матрицами»

- Сумма матриц
- Нулевая матрица
- Произведение матрицы на число
- Произведение матриц
- Пример некоммутативности матричного умножения
- Коммутирующие матрицы
- Делители нуля
- Нильпотентные матрицы
- Транспонирование матриц
- Симметричная матрица
- След матрицы
- Блочное умножение матриц
- Умножение на диагональную матрицу
- Транспонирование от произведения матриц
- След от произведения матриц

Тема «Обратные матрицы. Матричные уравнения»

- Единичная матрица
- Обратная матрица
- Матрицы элементарных преобразований *I*, *II*, *III* типов и их обратные
- Подстановка матрицы в многочлен
- Матрицы, коммутирующие с диагональной матрицей с разными числами на диагонали
- Классификация систем линейных уравнений
- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Эквивалентные условия обратимости матрицы
- Подстановка в многочлен матрицы $C^{-1}AC$
- Алгоритм поиска обратной и проверки обратимости
- Алгоритм решения уравнений $AX = B$
- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Только квадратные матрицы обратимы

Тема «LU-разложение»

- LU-разложение

Тема «Векторные пространства»

- Векторное пространство
- Пример векторного пространства отличный от R^n или матриц
- Подпространство векторного пространства
- Линейная комбинация векторов
- Линейно независимый набор векторов

- Коллинеарные векторы
- Компланарные векторы
- Линейная оболочка системы векторов
- Порождающая система векторов
- Базис
- Размерность векторного пространства
- Координаты вектора в базисе
- Матрица перехода между базисами
- Критерий подпространства
- Достаточное условие линейной зависимости в n -мерном пространстве
- Три эквивалентных условия для базиса в n -мерном пространстве
- Критерий подпространства
- Совпадение размеров базисов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм дополнения линейно независимой системы до базиса

Тема «Определители матриц»

- Определители матрицы 2 на 2 и 3 на 3
- $i j$ -ый минор матрицы
- $i j$ -ое алгебраическое дополнение матрицы
- Невырожденная матрица
- Присоединённая матрица
- Формула разложения определителя по строке
- Изменение определителя при элементарных преобразованиях
- Определитель транспонированной матрицы
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц
- Связь линейной зависимости и определителя
- Линейность определителя по строке
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы (через алгебраические дополнения)
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы
- Определитель Вандермонда

Тема «Фундаментальная система решений»

- Строчный ранг матрицы
- Базисный минор
- Фундаментальная система решений
- Тривиальная оценка на ранг матрицы
- Теорема о базисном миноре
- Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
- Размерность пространства решений однородной системы
- Связь решений однородной и неоднородной системы
- Теорема Кронекера-Капелли
- Размерность ФСР
- Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
- Теорема Кронекера-Капелли

Тема «Сумма и пересечение подпространств»

- Пересечение подпространств
- Пример, когда объединение подпространств — не подпространство
- Сумма подпространств
- Прямая сумма двух подпространств
- Теорема о неполном базисе
- Связь размерности суммы и пересечения подпространств (Формула Грассмана)
- Алгоритм поиска ФСР
- Алгоритм поиска скелетного разложения

Примерные задания для контрольной работы

1. Реши систему $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Выпиши базис решений (ФСР) соответствующей однородной системы $Ax = 0$;
Найди решения неоднородной системы линейных уравнений $Ax = b$.
Запиши решения неоднородной СЛУ через ФСР, через базис, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Дана матрица $A \in M_3(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Найди LU -разложение для A .
2. Найди разложение A в произведение элементарных матриц.
3. Найди определитель матрицы A .
4. Запиши матрицу линейного оператора поворота на 30 градусов в $\mathbb{R}^2$.
5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы векторы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Проверь, что f_1, f_2, f_3 формируют базис в $\mathbb{R}^3$.
2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{f_1, f_2, f_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.
3. Найди координаты векторов v_1 и v_2 в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$.
6. Проверь, является ли отображение линейным. $\varphi: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, где
 $\varphi(f) = f' + f(2) - fg + (fh)'$
 $g = 2 + x + x^4, h = x + x^2$
7. Посчитай определитель матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1

1. Реши системы, используя метод Гаусса (и прямой, и обратный ход).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 7x_4 = -2. \end{cases}$$

2. Найди многочлен с вещественными коэффициентами $f \in \mathbb{R}[x]$ второй степени такой, что $f(1) = 8, f(-1) = 2, f(2) = 14$.

3.

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

вычисли следующее выражение:

$$\text{tr}(AB - B^T A^T + I_2)I_3 + BA.$$

4. Для матриц $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ определим операцию $[A, B] = AB - BA$. Проверь, что для любых матриц $A, B, C \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ верно, что $[A, [B, C]^2] = 0$. (Указание: сначала найди $[B, C]$, затем посчитай $[B, C]^2$, а потом вычисли уже итоговое выражение).

Домашнее задание 2

1. Даны векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Среди этих векторов найди базис их линейной оболочки и вырази оставшиеся вектора через базисные.

Указание: постарайся ответить на оба вопроса, используя один и тот же процесс приведения к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса.

2. Проверь, являются ли следующие векторы линейно независимыми. Если являются, то дополни их до базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

3. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы векторы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Проверь, что f_1, f_2, f_3 формируют базис в $\mathbb{R}^3$.

2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.

3. Найди координаты векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$.

4. Рассмотрим в качестве векторного пространства $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Проверь, лежит ли заданный вектор в указанной линейной оболочке. Найди его координаты в указанном базисе.

1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ в базисе $\{\sin(x), \cos(x)\}$.

2. $\frac{1}{x^3 - 7x^2 + 12x}$ в базисе $\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x-3}, \frac{1}{x-4}\right\}$.

5. Дополни систему многочленов $\{x^5 + x^4, x^5 - 3x^3, x^5 + 2x^2, x^5 - x\}$ до базиса пространства $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$.

Домашнее задание 3

1. Найди базис векторного пространства $U = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^5 \mid A\mathbf{y} = \mathbf{0}\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Определи, можно ли из системы векторов

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

выбрать ФСР для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Найди скелетное разложение матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Найди решения неоднородной системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ через базис решений (ФСР) соответствующей однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5. Найди ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 9 \\ 8 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Домашнее задание 4

1. Найди собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad 2. \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Являются ли операторы в $\mathbb{R}^4$ со следующими матрицами диагонализруемыми?

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & -1 & \\ 2 & 1 & 4 \\ & & -1 \end{pmatrix}; \quad 2. B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & -1 & -2 \\ & & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Если нет, то объясни почему. Если да, то найди:

а) базис, в котором оператор имеет диагональный вид;

б) сам диагональный вид.

Здесь пропуски в матрицах – это нули.

3. Какие из следующих матриц подобны? В случаях подобия укажи, с помощью какой матрицы можно из одной получить другую:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Для каждого из следующих линейных операторов в $\mathbb{R}^3$ найди его матрицу в стандартном базисе, собственные значения и собственные подпространства для вычисленных собственных значений.

1. Отражение относительно плоскости x_1x_2 .

2. Ортогональная проекция на плоскость x_1x_2 .

3. Поворот против часовой стрелки вокруг положительной оси x на угол 90° .

5. Для диагонализруемой матрицы A найди $\sin(A)$ и $\cos(A)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверь, выполняется ли равенство $\sin^2(A) + \cos^2(A) = I$.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Укажите ранг билинейной формы, заданной матрицей 3×3 с тремя ненулевыми собственными значениями.	3	ОПК-4
2	Назовите свойство билинейной формы, если её матрица равна транспонированной матрице.	симметричность	ОПК-4
3	Как называется сумма симметрической и кососимметрической частей билинейной формы?	билинейная форма	ОПК-4
4	Сколько собственных значений у симметрической билинейной формы размерности 4 над $\mathbb{C}$?	4	ОПК-4
5	Назовите признак квадратичной формы, если её матрица положительно определённа.	положительная определённость	ОПК-4
6	Сколько положительных слагаемых в сигнатуре квадратичной формы с индексом положительности 2 и отрицательности 1?	2	ОПК-4
7	Как называется метод приведения симметрической матрицы к диагональному виду?	метод Якоби	ОПК-4
8	Укажите число векторов в ортонормированном базисе евклидова пространства размерности 5.	5	ОПК-4
9	Чему равна длина единичного вектора в евклидовом пространстве?	1	ОПК-4
10	Как называется неравенство, связывающее скалярное произведение и нормы векторов?	Коши-Буняковского	ОПК-4
11	Сколько векторов содержит ортогональная система в $\mathbb{R}^3$?	3	ОПК-4

12	Назовите формулу, которая выражает ортопроекцию вектора на подпространство через матрицу оператора.	формула Атата	ОПК-4
13	Как называется процесс построения ортонормированного базиса из линейно независимых векторов?	ортогонализация Грама-Шмидта	ОПК-4
14	Укажите число измерений пространства, если параллелепипед, построенный на трёх векторах, имеет объём 0.	3	ПК-2
15	Как называется линейный оператор, заданный матрицей, обратной к данной?	обратный оператор	ПК-2
16	Сколько собственных значений у диагонализуемого оператора размерности 4 над $\mathbb{C}$?	4	ПК-2
17	Назовите минимальный многочлен оператора, если его характеристический многочлен равен $(\lambda-2)^3(\lambda+1)$.	$(\lambda-2)^a(\lambda+1)^b$, где $a, b \leq 3$ и $a, b \geq 1$	ПК-2
18	Как называется оператор, равный своему сопряжённому в евклидовом пространстве?	самосопряжённый (симметрический) оператор	ПК-2
19	Сколько клеток в жордановой нормальной форме нильпотентного оператора размерности 4 с индексом нильпотентности 3?	2	ПК-2
20	Как называется базис, в котором матрица оператора имеет жорданову нормальную форму?	жорданов базис	ПК-2