
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«25» мая 2026 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Математическая логика и теория вычислимости»**

Направление подготовки: 38.03.05 Бизнес-информатика

Направленность (профиль) подготовки: Бизнес и аналитика

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2026

**Москва
2026**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	3
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	8
5. Учебно-методическое обеспечение	9
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математическая логика и теория вычислимости» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 38.03.05 Бизнес-информатика, профиль Бизнес и аналитика, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 838 от 29.07.2020 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Математическая логика и теория вычислимости» развивает строгое логическое мышление, необходимое при проектировании алгоритмов и систем безопасности, позволяет понять, какие задачи можно решить алгоритмически, а какие – нет, что критично при выборе методов решения в исследованиях и индустрии; prepares specialists, capable of formulating and checking the correctness of program and cryptographic protocols, and also participating in the development of new formal systems.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 38.03.05 Бизнес-информатика, профиль Бизнес и аналитика и входит в часть, формируемую участниками образовательных отношений, Блока 1.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин «Основы математического анализа и линейной алгебры» или «Математический анализ» и «Линейная алгебра и геометрия» или «Математический анализ. Продвинутый уровень» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень».

Цель изучения дисциплины (модуля): сформировать у студентов фундаментальное понимание формальных логических систем и границ вычислимости, что является базой для любой теоретической и практической работы в информатике.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- овладеть синтаксисом и семантикой propositional- и predicate-логики, понять теоремы о полноте и компактности.
- изучить модели вычислений (машина Тьюринга, λ -исчисление, регистровые машины) и доказать их эквивалентность.
- понять и применять основные результаты теории вычислимости: рекурсивные и перечислимые множества, неразрешимость задачи останова, редукции.
- развить навыки построения формальных доказательств (Hilbert-style, sequent calculus) и их автоматизации (простейшие SAT/SMT-подсказки).
- оценивать вычислительные ограничения (полуразрешимость, иерархия Σ_n/Π_n) и использовать полученные знания в верификации программ и протоколов.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- основные понятия логики высказываний: формула, истинность, тавтология, противоречие, выполнимость и логическое следование;
- основные понятия логики предикатов: терм, предикат, квантор, свободная и связанная переменная, структура и интерпретация;
- базовые принципы формальных доказательств, аксиоматических систем, корректности и полноты;
- основные модели вычислений: машины Тьюринга, вычислимые функции и универсальные вычисления;
- ключевые понятия теории вычислимости: разрешимость, полуразрешимость, проблема останова, сводимость и неразрешимость;

уметь:

- формализовывать утверждения естественного языка средствами логики высказываний и логики предикатов;
- проверять формулы на истинность, выполнимость, общезначимость и логическое следование;
- строить простые формальные доказательства и находить ошибки в некорректных рассуждениях;
- описывать простые алгоритмы в терминах формальных моделей вычислений;
- доказывать разрешимость или неразрешимость базовых алгоритмических задач с помощью диагонального аргумента и сводимостей;

владеть:

- навыками строгого формального рассуждения и анализа логической структуры утверждений;
- приёмами преобразования логических формул и работы с кванторами;
- навыками построения моделей, контрмоделей и простых формальных выводов;
- базовыми методами описания вычислений с помощью машин Тьюринга и других формальных моделей;
- навыками анализа принципиальных ограничений алгоритмов и распознавания неразрешимых задач.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области аналитики, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
ОПК-4.	Способен понимать принципы работы информационных технологий; использовать информацию, методы и программные средства ее сбора, обработки и анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений	ОПК-4.1.	Знает основные принципы работы информационных технологий и их влияние на бизнес-процессы
		ОПК-4.2.	Умеет использовать методы и программные средства для сбора, обработки и анализа информации, обеспечивая качественную информационно-аналитическую поддержку
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт в применении аналитических инструментов для поддержки принятия управленческих решений в организациях
ПК-2.	Способен использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации	ПК-2.1.	Знает основные математические методы и инструментальные средства, применяемые для обработки и анализа информации
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать математический аппарат для систематизации данных и решения профессиональных задач

	информации по теме исследования для решения задач профессиональной деятельности	ПК-2.3.	Имеет практический опыт работы с инструментами анализа информации в рамках исследовательских проектов
--	---	---------	---

3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары			
1	Логика высказываний	6	6		24	Домашнее задание, аудиторная работа
2	Доказательства и логика предикатов	6	6	2	24	Домашнее задание, аудиторная работа, контрольная работа
3	Формальные системы и разрешимость логических теорий	6	6		24	Домашнее задание, аудиторная работа
4	Модели вычислений	6	6	2	24	Домашнее задание, аудиторная работа
5	Неразрешимость и сводимости	6	6	2	24	Домашнее задание, аудиторная работа, контрольная работа
	Зачет с оценкой			4		Коллоквиум
Итого:		30	30	10	120	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		190				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Логика высказываний	Введение в математическую логику Логика высказываний: формулы и истинность Эквивалентные преобразования и нормальные формы
2	Доказательства и логика предикатов	Формальные доказательства в логике высказываний Логика предикатов: язык и интерпретации. Контрольная работа 1 Семантика логики предикатов Кванторы и преобразование формул
3	Формальные системы и разрешимость логических теорий	Исчисление предикатов и формальные теории Разрешимость и полуразрешимость в логике. Коллоквиум
4	Модели вычислений	Алгоритмы и формальные модели вычислений Машины Тьюринга Универсальные вычисления
5	Неразрешимость и сводимости	Проблема остановки Сводимость задач. Использование сводимости для доказательства неразрешимости Доказательства неразрешимости через сведение. Построение редукций между простыми алгоритмическими задачами. Контрольная работа 2

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Перемитина, Т. О. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие / Т. О. Перемитина. - Томск : ФДО, ТУСУР, 2016. - 132 с. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1845832>

2. Гурова, Л. М. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие / Гурова Л.М., Зайцева Е.В. - Москва : МГГУ, 2006. - 262 с.: ISBN 5-7418-0451-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/996351>

Дополнительная литература:

1. Вайнштейн, Ю. В. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие / Ю. В. Вайнштейн, Т. Г. Пенькова, В. И. Вайнштейн. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2019. - 110 с. - ISBN 978-5-7638-4076-6. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1816597>

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том

числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое

Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математическая логика и теория вычислимости» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания, аудиторная работа, контрольная работа, коллоквиум, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар – это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре или лекции, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в аудиторной работе студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения,

аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы – получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины и продемонстрировать навыки их практического применения.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуются создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Математическая логика и теория вычислимости»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме *зачета с оценкой*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Математическая логика и теория вычислимости» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	25%	10	Набор задач по темам недели
Аудиторная работа	15%	15	Активная работа студента на семинаре или лекции
Контрольная работа	35%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Зачет с оценкой	25%	1	Коллоквиум - устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Математическая логика и теория вычислимости»: « $0,25 \times$ среднее за домашние задания + $0,15 \times$ среднее за аудиторную работу + $0,35 \times$ контрольная работа + $0,25 \times$ зачет с оценкой».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

1. Таблицы истинности – построить таблицы истинности для формул
 - 1.1. $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow r)$
 - 1.2. $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$Указать, является ли каждая формула тавтологией, противоречием или выполнимой.
2. Эквивалентные преобразования – привести формулу $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) и к конъюнктивной нормальной форме (КНФ), используя только тождества (де Моргана, идемпотентность, двойное отрицание).
3. Кванторы – преобразовать формулу предикатов $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x, y)))$ в пренексную форму (перенести все кванторы в начало).
4. Свободные/связанные переменные – указать свободные и связанные переменные в формуле $\exists x(P(x, y) \wedge \forall y R(x, y) \wedge S(z))$.
5. Доказательство в естественном выводе – в системе натурального вывода доказать вывод $\{p \wedge q\} \vdash q \wedge p$.
Переписать доказательство, указав применённые правила ($\wedge$ введение, ($\wedge$) устранение и т.п.).
6. SAT разрешимость – описать алгоритм перебора всех истинностных оценок для формулы $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$.
Сколько оценок нужно проверить и какое значение получит формула?
7. Теория вычислимости – доказать, что множество всех программ Тьюринга, которые останавливаются на пустом входе, полу разрешимо, но неразрешимо.
Кратко изложить аргументы (перебор доказательств, редукция из задачи остановки).

Примерные задания для контрольной работы

1. Теория. Сформулировать и доказать малую теорему Ферма: если p – простое и a не делится на p , тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Привести пример проверки для $a=5, p=13$.
2. Логика высказываний. Привести КНФ формулы $(p \rightarrow q) \vee (\neg r \wedge s)$. Затем решить полученную КНФ методом резолюций, указав, существует ли разрешённая пустая клауза.
3. Предикатная логика. Дана формула $\forall x(\exists y P(x, y) \rightarrow \exists z Q(z))$. Перевести её в пренексную форму, а затем в скопико-кванторную нормальную форму (привести к эквивалентному набору кванторов без вложений).
4. Модели вычислений. Написать на Python (не более 30 строк) симуляцию однолентной машины Тьюринга, которая принимает язык $L = \{0^n 1^n | n \geq 1\}$. Описать в комментариях набор состояний и правила переходов; продемонстрировать работу на входе 0011.

Примерные задания для семинаров

1. **Кванторные трансформации** – в небольших группах преобразовать по 3 формулы первого порядка в пренексную форму и обсудить, какие переменные становятся связанными/свободными после переноса кванторов.

2. **Контр-модели** – построить контр-модель, в которой **отрицается** формула $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$. Обсудить, почему в классической логике такой модели не существует, а в **интуиционистской** (или трёхзначной) логике – возможна.

3. **Редукции** – совместно составить таблицу редукций **из задачи остановки** к:

— задаче **Post Correspondence Problem (PCP)**,

— задаче **Hilbert's 10-th** (диофантова бесконечность).

Описать, какие части машины Тьюринга кодируются в пары строк PCP, а какие – в полиномы.

4. **Автоматическое доказательство** – в паре написать **простейший SAT-решатель** (перебор всех оценок) и применить его к формуле $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$. Сравнить полученный результат с ручным резолюционным выводом.

Примерные задания для коллоквиума

1. Дайте определение «формулы в конъюнктивной нормальной форме» (КНФ).

2. Назовите правило $(\wedge)$ -введения в естественном выводе и покажите, как оно применяется к формуле $p, q \vdash p \wedge q$.

3. Перечислите два свойства отношения эквивалентности формул (рефлексивность, симметричность, транзитивность).

4. Укажите свободные переменные в формуле $\forall x(P(x, y) \rightarrow \exists y R(x, y, z))$.

5. Сформулируйте задачу HALT (проблема остановки) и кратко объясните, почему она неразрешима.

6. Определите понятие рекурсивно перечислимого множества и назовите один пример.

7. Опишите в нескольких предложениях, как универсальная машина Тьюринга кодирует другую машину (пример формата $\langle \text{код} \rangle \# \langle \text{ввод} \rangle$).

8. Сократите задачу построения модели для $\exists x \forall y P(x, y)$ к задаче SAT, указав ключевую идею редукции.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Составьте таблицу истинности для формулы $((p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow r))$. Определите, является ли формула тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой.	Выполняется в строках 1,4,5,7 → выполнима, не-тавтология, не-противоречие	УК-1
2	Приведите формулу $((p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q))$ к конъюнктивной нормальной форме (КНФ).	$((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q))$	ПК-2
3	Докажите (в системе естественного вывода) вывод $((p \wedge q) \vdash q \wedge p)$. Укажите используемые правила вывода.	Доказано: 1) $p \wedge q$ — предп., 2) p ($(\wedge E)$), 3) q ($(\wedge E)$), 4) $q \wedge p$ ($(\wedge I)$).	УК-1
4	Трансформируйте формулу предикатов $(\forall x, (P(x) \rightarrow \exists y, Q(y, x)))$ в пренексную форму (перенести кванторы в начало).	$(\forall x, \exists y, (P(x) \rightarrow Q(y, x)))$	ПК-2
5	Укажите свободные и связанные переменные в формуле $(\exists x, (P(x, y) \wedge \forall y, R(x, y)))$.	Свободные: y (внутри (P) -части); связанные: x, y (во второй части)	УК-1
6	Постройте контр-модель (структуру), в которой формула $(\forall x, (P(x) \vee \neg P(x)))$ не выполняется. Укажите домен и интерпретацию P .	Домен = $\{a\}$, $P(a) =$ «не определено» (выбираем трехзначную	ОПК-4

		семантику, где истинность-не-определена $\rightarrow$ формула не удовлетворяется). В классической логике такой модели невозможна $\rightarrow$ ответ: нет контр-модели (формула – тавтология).	
7	Определите, разрешима ли теория истинности всех формул пропозициональной логики (т.е. SAT-проблема).	Разрешима (алгоритм перебора всех 2^n присваиваний).	УК-1
8	Покажите, что задача выводимости в предикатной логике полурешима (перечислима). Кратко опишите алгоритм.	Перебор всех возможных доказательств в фиксированной формальной системе (например, системы Гильберта). Если доказательство существует, будет найдено – полурешима .	ПК-2
9	Сформулируйте и докажите лемму о переключении кванторов: $\neg(\neg \forall x, \exists y, \varphi(x,y)) \equiv \exists x, \forall y, \neg \varphi(x,y)$.	Доказательство: применяем правила де-Моргана к кванторам, получаем эквивалентность.	УК-1
10	Приведите пример формулы первого порядка, которая неразрешима (не существует алгоритма, определяющего её истинность во всех структурах).	Формула, выражающая проблему остановки : $\neg(\exists e, \exists x, \text{Halt}(e,x))$.	ОПК-4
11	Опишите машину Тьюринга, вычисляющую функцию удвоения двоичного числа (каждый ввод – последовательность 0/1, вывод – удвоенный). Укажите количество состояний и лент.	3 состояния (q_0 – чтение, q_1 – перенос, q_f – финал); одна бесконечная лента, переходы: при чтении 1 пишем 0, переходим в q_1 ; при чтении 0 пишем 0, остаёмся в q_0 ; в q_1 пишем 1 и переходим к концу строки.	ПК-2
12	Покажите, что универсальная машина Тьюринга может симулировать любую машину Тьюринга. Опишите основной принцип кодирования.	Принцип: ввести схему «код машины» # «вход», где код машины –	УК-1

		таблица переходов, а универсальная машина интерпретирует её шаг за шагом.	
13	Дайте формальное определение рекурсивно перечислимого множества и приведите пример.	Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется рекурсивно перечислимым, если существует ТМ, принимающая ровно элементы A . Пример – множество всех простых чисел.	ПК-2
14	Приведите доказательство неразрешимости проблемы остановки с использованием диагонального аргумента.	Предположим существование решателя $H(e, x)$. Сконструировать программу $D(e) = \text{if } H(e, e) = 1 \text{ then loop else halt.}$ Противоречие при запуске D на её же коде.	ОПК-4
15	Сократите задачу « тильда (Т) » (выводимость в пропозициональной логике) к задаче SAT , указав соответствующее преобразование.	Ввести переменную r , добавить формулу $\neg r \wedge \varphi$; φ выводимо $\Leftrightarrow \neg r \wedge \varphi$ несогласуемо $\Leftrightarrow$ SAT-формула $\neg(\neg r \wedge \varphi) = r \vee \neg \varphi$ выполнима.	ПК-2
16	Сформулируйте редукцию задачи остановки к задаче поста-корреспонденции (PCP) и объясните, почему из этого следует неразрешимость PCP.	Для каждой инструкции машины Тьюринга построить пары строк так, чтобы существование решения PCP $\leftrightarrow$ машина останавливается. Поскольку проблема остановки неразрешима, PCP тоже неразрешима.	ОПК-4
17	Преобразуйте формулу предикатов $\neg(\exists x, (P(x) \wedge \forall y, Q(y)))$ в эквивалентную формулу без квантора $\neg$ (т.е. в пренексную форму).	$\neg(\forall x, (\neg P(x) \vee \exists y, \neg Q(y)))$ $\rightarrow$ далее в пренексную форму: $\neg(\forall x, \exists y, (\neg P(x) \vee \neg Q(y)))$	ПК-2
18	Вычислите мощность множества всех истинных формул предикатной логики над конечным алфавитом (счётное множество символов).	Счётное ($\aleph_0$) – множество формул сопоставимо	УК-1

		натуральным числам.	
19	Укажите главную причину , по которой теория пресоновых (первая-порядковая) логики не обладает полностью решаемым набором аксиом (отсутствие полного доказательства).	Тезис Гёделя о неполноте: любая рекурсивно перечислимая, достаточно мощная теория не может быть как полной, так и консистентной.	ОПК-4
20	Дайте короткое (≤ 2 -строковое) определение термина «полуразрешим» в контексте теории вычислимости.	Полуразрешим — множество, характеристическая функция которого вычислима частично: алгоритм останавливается и принимает ровно элементы множества, для остальных может не останавливаться.	УК-1