ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**
**«Стохастический анализ»**

**Направление подготовки:** *38.03.05 Бизнес-информатика*

**Направленность (профиль) подготовки:** *Бизнес-аналитика*

**Квалификация (степень) выпускника:** *бакалавр*

**Форма обучения:** *очная*

**Срок освоения программы:** *4 года*

**Год набора:** *2025*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

**Москва**
**2025**

**Содержание**

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** ..... 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** ..... 5
3. **Тематический план** ..... 6
4. **Содержание дисциплины (модуля)** ..... 7
5. **Учебно-методическое обеспечение** ..... 8
6. **Материально-техническое обеспечение** ..... 8
7. **Методические и оценочные материалы** ..... 10

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Стохастический анализ» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика», профиль «Бизнес-аналитика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 838 от 29.07.2020 года.

Дисциплина (модуль) «Стохастический анализ» является ключевым инструментом для описания и предсказания поведения систем, подверженных случайным возмущениям; он обеспечивает теоретическую основу финансовой математики (моделирование цен, оценка риска), физики (квантовая и статистическая механика), биологии (моделирование популяций, генетических процессов) и инженерных приложений (управление в условиях неопределённости, фильтрация сигналов); владение этими методами расширяет аналитический арсенал специалиста, повышает точность моделей и делает возможным разработку надёжных решений в условиях неопределённости.

**Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика», профиль «Бизнес-аналитика» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплины (модуля): «Теория вероятностей. Основной уровень».

**Цель изучения дисциплины (модуля):** получить представление о стохастических процессах, научить формулировать модели случайных явлений и применять вероятностные инструменты для анализа и прогнозирования реальных систем.

**Задачи изучения дисциплины (модуля)**:

— изучить основные понятия теории вероятностей (вероятностные пространства, случайные величины, распределения);

— освоить методы построения и исследования марковских цепей, процессов с независимыми приращениями (в частности, процесс Винера/броуновское движение);

— понять принципы и техники стохастической интеграции (интеграл Ито, формула Ито) и их применение к стохастическим дифференциальным уравнениям;

— научиться оценивать сходимость численных схем для СДУ и реализовывать их на компьютере;

— рассмотреть прикладные задачи в финансах, физике, биологии и инженерии, где используются стохастические модели.

**В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:**

***знать:***

— основные понятия случайных процессов: определение случайного блуждания, вероятность выхода на границу, среднее время выхода, критерий возвратности;

— винеровский процесс как предельный случай случайного блуждания, его свойства (непрерывные траектории, гауссовость приращений, масштабирование) и связь с уравнением теплопроводности;

— гауссовские и стационарные процессы, определение гауссовского процесса, гауссовская регрессия (априорные и апостериорные распределения);

— теория марковских моделей: классификация состояний цепи Маркова (возвратность, сообщающиеся классы, периодичность), спектральные свойства матрицы переходных вероятностей, эргодическая теорема, понятие стационарного распределения,

марковский процесс непрерывного времени, инфинитезимальный генератор, прямые и обратные уравнения Колмогорова;

— пуассоновский процесс: определение через приращения и через времена ожидания, его свойства;

— стохастические дифференциальные уравнения: определение диффузионного процесса, стохастический интеграл Ито и его свойства, формула Ито и её применение, формула Каца-Фейнмана (связь СДУ и уравнений в частных производных), уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка для плотности переходной вероятности;

***уметь:***

— анализировать случайные блуждания: вычислять вероятность выхода на границу и среднее время выхода для простых блужданий, исследовать возвратность/транзиентность на решётке;

— работать с гауссовскими процессами и временными рядами: строить гауссовскую регрессию (выбор ядра, предсказание с доверительными интервалами), вычислять спектральную плотность стационарного процесса по корреляционной функции и наоборот, решать простые задачи прогнозирования;

— применять цепи Маркова к прикладным задачам: реализовывать алгоритм PageRank, строить скрытую марковскую модель (HMM), решать прямую и обратную задачи (алгоритмы forward-backward, Витерби), оценивать параметры HMM методом EM (алгоритм Баум-Велша);

— решать прямые и обратные уравнения Колмогорова для марковских процессов конечного числа состояний, находить стационарное распределение для процессов рождения и гибели;

— работать со стохастическими дифференциальными уравнениями: вычислять простые стохастические интегралы Ито, применять формулу Ито для решения линейных СДУ (геометрическое броуновское движение, процесс Орнштейна-Уленбека), выводить уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка для заданного СДУ;

***владеть:***

— навыком строгого вероятностного рассуждения о случайных процессах: обосновать предельный переход от случайного блуждания к винеровскому процессу (принцип инвариантности Донс-Керра), доказать возвратность/транзиентность блужданий разных размерностей, понимать роль закона больших чисел и центральной предельной теоремы в построении винеровского процесса;

— методами качественного анализа марковских процессов: определять эргодичность по спектральному радиусу матрицы переходных вероятностей, оценивать скорость сходимости к стационарному распределению через второе собственное значение (спектральная щель), конструировать инфинитезимальный генератор для процессов непрерывного времени;

— техникой решения стохастических дифференциальных уравнений: выбирать подходящий метод (формула Ито, метод неопределённых коэффициентов, сведение к детерминированному уравнению) в зависимости от структуры СДУ, реализовывать численное моделирование траекторий (метод Эйлера-Маруяма, схемы более высокого порядка);

— пониманием связи между СДУ и уравнениями в частных производных: использовать формулу Каца-Фейнмана для представления решения краевых задач теплопроводности/уравнения Пуассона в виде математического ожидания функционала от диффузионного процесса, применять уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка для анализа переходных плотностей диффузий.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

| Компетенция | Содержание компетенции | Индикатор компетенции | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| УК-1. | Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1. | Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности. |
| | | УК-1.2. | Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем |
| | | УК-1.3. | Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации |
| ОПК-4. | Способен понимать принципы работы информационных технологий; использовать информацию, методы и программные средства ее сбора, обработки и анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений | ОПК-4.1. | Знает основные принципы работы информационных технологий и их влияние на бизнес-процессы |
| | | ОПК-4.2. | Умеет использовать методы и программные средства для сбора, обработки и анализа информации, обеспечивая качественную информационно-аналитическую поддержку |
| | | ОПК-4.3. | Имеет практический опыт в применении аналитических инструментов для поддержки принятия управленческих решений в организациях |
| ПК-2. | Способен использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования для решения задач профессиональной деятельности | ПК-2.1. | Знает основные математические методы и инструментальные средства, применяемые для обработки и анализа информации |
| | | ПК-2.2. | Умеет эффективно использовать математический аппарат для систематизации данных и решения профессиональных задач |
| | | ПК-2.3. | Имеет практический опыт работы с инструментами анализа информации в рамках исследовательских проектов |

## 3. Тематический план

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Трудоемкость, академические часы | | | | ТКУ (текущий контроль успеваемости) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Очная форма* | | | | |
| | | Аудиторная работа | | Контроль | Самостоятельная работа | |
| | | Лекции | Семинары | | | |
| 1 | Основные понятия теории случайных процессов | 10 | 10 | | 40 | Домашнее задание |
| 2 | Марковские модели | 10 | 10 | 2 | 40 | Домашнее задание Контрольная работа Лабораторная работа |
| 3 | Стохастические дифференциальные уравнения | 10 | 10 | 2 | 42 | Домашнее задание Контрольная работа Лабораторная работа |
| | ***Зачет с оценкой*** | | | 4 | | Контроль теоретических знаний |
| | ***Итого:*** | ***30*** | ***30*** | ***8*** | ***122*** | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)*** | | ***190*** | | | | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)*** | | ***5*** | | | | |

## 4. Содержание дисциплины (модуля)

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Содержание дисциплины (модуля) по темам |
|---|---|---|
| 1 | Основные понятия теории случайных процессов | Случайные блуждания, свойства траекторий<br>Винеровский процесс, свойства винеровского процесса<br>Гауссовские процессы. Гауссовская регрессия |
| 2 | Марковские модели | Цепь Маркова, классификация состояний, свойства матрицы переходных вероятностей<br>Эргодическая теорема, стационарное распределение.<br>Прикладные модели на основе цепей Маркова: PageRank, Hidden Markov Models (HMM).<br>Прикладные модели на основе цепей Маркова: Марковская цепь Монте-Карло<br>Пуассовновский процесс, распределение времени ожидания между скачками |
| 3 | Стохастические дифференциальные уравнения | Диффузионные процессы, прямое и обратное уравнение Колмогорова<br>Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), интеграл Ито<br>Формула Ито, методы решения СДУ<br>Формула Каца-Фейнмана, уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка<br>Примеры СДУ: процесс Орштейна-Уленбека, геометрическое броуновское движение<br>Обратимость в СДУ, теорема Андерсона<br>Приложения СДУ: диффузионные модели |

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

***Основная литература:***

1. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 276 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01748-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/536889

2. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02086-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/537767

3. Каштанов, В. А. Случайные процессы : учебник и практикум для вузов / В. А. Каштанов, Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 99 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04482-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/584979

***Дополнительная литература:***

1. Энатская, Н. Ю. Математическая статистика и случайные процессы : учебник для вузов / Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 191 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-9808-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/583925

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

| № | Наименование портала (издания, курса, документа) | Ссылка |
|---|---|---|
| 1. | Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека | https://elibrary.ru/defaultx.asp |
| 2. | База данных для IT-специалистов | https://habr.com |
| 3. | База данных ScienceDirect | https://www.sciencedirect.com |
| 4. | Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации | https://minobrnauki.gov.ru/ |
| 5. | Федеральный портал «Российское образование" | https://www.edu.ru/ |
| 6. | Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" | http://window.edu.ru/ |
| 7. | Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов | http://school-collection.edu.ru/ |
| 8. | Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов | http://fcior.edu.ru/ |

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

| Наименование ПО | Производство | Лицензионное / свободно распространяемое |
|---|---|---|
| **Операционные системы:** | | |
| Microsoft Imagine (Windows Client, Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Браузеры:** | | |
| Яндекс.Браузер | отечественное | свободно распространяемое |
| Google Chrome | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Офисные приложения:** | | |
| Microsoft Imagine (Visio, OneNote) | зарубежное | лицензионное |
| TeXstudio | зарубежное | свободно распространяемое |
| Adobe Acrobat Reader | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Программное обеспечение для планирования и учета времени:** | | |
| Toggle app | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления проектами:** | | |
| Microsoft Imagine (Project) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы управления базами данных:** | | |
| Microsoft Imagine (SQL Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы резервного копирования (backup):** | | |
| Acronis Backup Advanced for HyperV | зарубежное | лицензионное |
| **Справочно-правовые системы:** | | |

Электронный документ

| | | |
|---|---|---|
| КонсультантПлюс: справочно-правовая система | отечественное | лицензионное |
| **Средства антивирусной защиты:** | | |
| Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition | отечественное | лицензионное |
| **Среды разработки:** | | |
| Visual Studio Code | зарубежное | свободно распространяемое |
| Bash (Unix shell) | зарубежное | свободно распространяемое |
| Anaconda | зарубежное | свободно распространяемое |
| Robotic Operating System | зарубежное | свободно распространяемое |
| CopelliaSim | зарубежное | свободно распространяемое |
| Google Colaboratory | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Пакеты программных средств и библиотек:** | | |
| AutoPsy | зарубежное | свободно распространяемое |
| Interactive Disassembler (IDA) | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления библиографической информацией:** | | |
| Zotero | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Сервисы и службы:** | | |
| Bind | зарубежное | свободно распространяемое |
| Docker | зарубежное | свободно распространяемое |

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Стохастический анализ» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, лабораторные работы, контрольные работы, домашние задания, контроль теоретических знаний, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Семинар* — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы

избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Лабораторная работа* – учебное занятие, направленное на практическое закрепление теоретических знаний через выполнение экспериментальных или проектных заданий. В ходе лабораторной работы студенты проводят анализ, разработку или тестирование программного кода, изученного в рамках курса.

Перед выполнением лабораторной работы необходимо внимательно ознакомиться с теоретическим материалом и методическими указаниями. Рекомендуется изучить используемые инструменты и технологии для уверенного их применения на практике. При возникновении вопросов следует обращаться к преподавателю для получения разъяснений.

*Контроль теоретических знаний* – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки студенту необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

## Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Стохастический анализ»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

| **Десятибалльная оценка** | **Пятибалльная оценка** | **Оценка за зачет** | **Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)** |
|---|---|---|---|
| 10 | Отлично | Зачтено | Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает |
| 9 | Отлично | Зачтено | |
| 8 | Отлично | Зачтено | |

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| | | | на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами. |
| 7 | Хорошо | Зачтено | Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические |
| 6 | Хорошо | Зачтено | |

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| | | | аспекты предмета с практическими задачами. |
| 5 | Удовлетворительно | Зачтено | Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования. |
| 4 | Удовлетворительно | Зачтено | |
| 3 | Не сдан | Не зачтено | Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы. |
| 2 | Не сдан | Не зачтено | |
| 1 | Не сдан | Не зачтено | |

Дисциплина (модуль) «Стохастический анализ» оценивается следующим образом:

| Активность | Вес | Количество | Описание |
|---|---|---|---|
| Домашние задания | 40% | 14 | Набор задач по темам недели |
| Контрольные работы | 20% | 2 | Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время |
| Лабораторная работа | 20% | 2 | Практическое задание, направленное на применение теоретических знаний при решении конкретных задач, выполняемое под руководством преподавателя |
| Зачет с оценкой | 20% | 1 | Контроль теоретических знаний |

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Стохастический анализ»:** «0,4× среднее за домашние задания + 0,2× среднее за контрольные работы + 0,2 ×среднее за лабораторные работы + 0,2 × зачет с оценкой».

**Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)**

**Примерные задания для лабораторной работы**

**1.1 Броуновское (Винеровское) движение**

— **Содержание:** сгенерировать траектории одномерного и двумерного Винеровского процесса, построить гистограммы конечных состояний и оценить их дисперсию.

— **Ожидаемые результаты:** показать линейный рост дисперсии с временем, подтвердить нормальность распределения позиций при помощи Q-Q-графиков и тестов (Шапиро-Уилк).

**1.2 Процесс Пуассона**

— **Содержание:** смоделировать событийный процесс с постоянной интенсивностью $\lambda$, построить график количества событий в зависимости от времени, оценить $\lambda$ методом максимального правдоподобия.

— **Ожидаемые результаты:** сравнение эмпирического распределения интервалов между событиями с экспоненциальным, оценка среднеквадратичной ошибки оценки $\lambda$.

**1.3 AR(1) и MA(1) модели**

— **Содержание:** сгенерировать автокоррелированные (AR) и скользящие средние (MA) процессы, построить коррелограммы, оценить параметры $\rho$ и $\theta$ через МНК.

— **Ожидаемые результаты:** визуализировать характерную структуру автокорреляции: убывание в AR(1) и «прыжок» в MA(1).

## Примерные задания по контрольной работе

1. *случайное блуждание* : для простого симметричного блуждания на отрезке [0, a] найдите (a) вероятность выхода в точку a, (b) среднее время выхода, начиная из состояния i; сравните полученные формулы с результатами из теории.
2. *винеровский процесс* : покажите, что процесс $W(t)$ имеет независимые приращения и масштабирование $\sqrt{c}\,W(t)=W(ct)$; используя эти свойства, выведите связь с решением уравнения теплопроводности.
3. *марковская цепь* : дано матричное представление переходов $P$ для цепи из 4 состояний; найдите стационарное распределение, определите периодичность и вычислите скорость сходимости к стационарному вектору (оценка через второй по модулю собственный спектр).
4. *пуассоновский процесс* : используя интенсивность $\lambda=3$, найдите (a) распределение числа событий за интервал $t=2$, (b) распределение времени до первого прибытия, (c) среднее расстояние между соседними событиями.
5. *сд·у* : решите линейное стохастическое дифференциальное уравнение $dX_t=\mu X_t\,dt+\sigma X_t\,dW_t$ с $X_0=1$; запишите решение в виде $X_t=\dots$ и вычислите математическое ожидание $E[X_t]$ и дисперсию $\mathrm{Var}[X_t]$.
6. *формула Ито* : примените формулу Ито к функции $g(t,X_t)=X_t^2$; найдите дифференциальную форму $dg(t,X_t)$ и интегрируйте её, получив выражение для $X_t^2$ в терминах $\int X\,dW$.
7. *численное моделирование* : реализуйте метод Эйлера-Ито для уравнения $dX_t=0.5\,dt+X_t\,dW_t$ на $[0][1]$ с $\Delta t=0.01$; постройте 5 независимых траекторий и оцените среднеквадратичную ошибку по сравнению с аналитическим решением.

## Примерные домашние задания

1. напишите функцию **random_walk(p, n)** – симуляцию простого блуждания с вероятностью шага вправо p на n шагов; визуализируйте одну траекторию и постройте гистограмму конечных позиций.
2. реализуйте генерацию винеровского процесса с помощью метода броуновского движения (нормальные приращения) и сравните полученные дискретные траектории с теоретическим распределением $N(0,t)$.
3. постройте матрицу переходов для марковской цепи из 5 состояний, задав произвольные вероятности, убедитесь, что каждая строка суммируется до 1; найдите спектр матрицы и определите, является ли цепь эргодичной.

4. смоделируйте пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda=2$ на интервале [0][5] с помощью функции **np.random.exponential**; постройте график числа событий во времени и сравните эмпирическую интенсивность с заданной.

5. реализуйте стохастический интеграл Ито $\int_0^T W_s\, dW_s$ для заданного пути $W_s$ (используйте левый Риманский сумм); сравните результат с аналитическим ½ (W_T²-T).

6. решите задачу выхода из отрезка [0][10] для симметричного блуждания, начального состояния i=3, используя метод отражения; проверьте полученную вероятность выхода в 10 через симуляцию 10 000 траекторий.

7. проведите эксперимент с методом Эйлера-Ито для нелинейного СДУ $dX_t=-X_t^3\, dt+0.5\, dW_t$; исследуйте зависимость среднего квадратичного отклонения от шага $\Delta t$ (0.1, 0.05, 0.01) и постройте график сходимости.

8. выполните гауссовскую регрессию (RBF-ядро) для синтетических данных $y=\sin(2\pi x)+\varepsilon$, $\varepsilon\sim N(0,0.1^2)$; предскажите значение в x=0.75, постройте доверительный интервал 95 % и сравните с истинным значением.

**Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

| № п/п | Задание | Ответ | Компетенция |
|---|---|---|---|
| 1. | Чем характеризуется распределение шага в простом симметричном случайном блуждании? | Равновероятные перемещения влево/вправо | УК-1 |
| 2. | Какой непрерывный процесс возникает как предел нормированного случайного блуждания? | Винеровский процесс / Броуновское движение | ПК-2 |
| 3. | Чему равна дисперсия винеровского процесса в фиксированный момент времени t? | t (время) | ПК-2 |
| 4. | Какие две функции полностью определяют гауссовский процесс? | Математическое ожидание и ковариационная функция | ПК-2 |
| 5. | Каким образом гауссовская регрессия применяется в задачах машинного обучения? | Для байесовской оптимизации и регрессионного анализа | ПК-2 |
| 6. | В чем заключается основное свойство марковости случайного процесса? | Будущее зависит только от настоящего, а не от прошлого | УК-1 |
| 7. | При каком условии цепь Маркова обладает единственным стационарным распределением? | Эргодичность / Неприводимость и апериодичность | УК-1 |
| 8. | Какой известный алгоритм использует стационарное распределение цепи Маркова для ранжирования? | PageRank | ПК-2 |
| 9. | Какая модель подходит для описания системы с ненаблюдаемыми внутренними состояниями? | Скрытая маркавская модель (HMM) | ОПК-4 |
| 10. | Какой метод использует цепи Маркова для выборки из сложных вероятностных распределений? | Монте-Карло на цепях Маркова (MCMC) | ОПК-4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11. | Как распределены временные интервалы между событиями в процессе Пуассона? | Экспоненциальное распределение | ОПК-4 |
| 12. | Какое слагаемое отличает формулу Ито от классического правила дифференцирования функций? | Второе порядка слагаемое ($\frac{1}{2}\sigma^2 g_{xx} dt$) | УК-1 |
| 13. | Почему при построении интеграла Ито выбирается левая граница интервала разбиения? | Для сохранения свойства мартингала / независимости приращений | УК-1 |
| 14. | Какое уравнение описывает эволюцию плотности вероятности во времени для диффузионного процесса? | Уравнение Фоккера-Планка / Прямое уравнение Колмогорова | ОПК-4 |
| 15. | Какой стохастический процесс моделирует возвращение к среднему значению? | Процесс Орнштейна-Уленбека | ОПК-4 |
| 16. | Какая модель чаще всего применяется для описания динамики цен акций? | Геометрическое броуновское движение | УК-1 |
| 17. | Какой класс генеративных нейросетей основан на обращении стохастического диффузионного процесса? | Diffusion Models / Диффузионные модели | ПК-2 |
| 18. | Какая численная схема обеспечивает сильную сходимость при решении СДУ? | Схема Эйлера-Маруямы | ОПК-4 |
| 19. | Назовите программную библиотеку Python для вероятностного программирования и стохастического моделирования. | PyMC / TensorFlow Probability / NumPyro | ПК-2 |
| 20. | Как методы стохастического анализа помогают в оценке рисков технической системы? | Моделирование вероятностей отказов и непредсказуемых нагрузок | УК-1 |