ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол № 1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**
**«Анализ на многообразиях»**

**Направление подготовки:** *38.03.05 Бизнес-информатика*

**Направленность (профиль) подготовки:** *Бизнес-аналитика*

**Квалификация (степень) выпускника:** *бакалавр*

**Форма обучения:** *очная*

**Срок освоения программы:** *4 года*

**Год набора:** *2024*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

**Москва**
**2024**

**Содержание**

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** ..... 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** ..... 5
3. **Тематический план** ..... 6
4. **Содержание дисциплины (модуля)** ..... 7
5. **Учебно-методическое обеспечение** ..... 7
6. **Материально-техническое обеспечение** ..... 8
7. **Методические и оценочные материалы** ..... 10

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Анализ на многообразиях» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика, профиль Бизнес-аналитика, утвержденным приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 838 от 29.07.2020 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Анализ на многообразиях» предоставляет фундаментальные инструменты для описания и исследования сложных геометрических структур, которые лежат в основе современной теоретической физики (общая теория относительности, квантовая гравитация), топологии, геометрических методов в машинном обучении и компьютерной графике. Без глубоких представлений о топологии, дифференциальной геометрии и тензорном исчислении невозможно корректно формулировать и решать задачи, связанные с кривизной пространства-времени, оптимизацией на нелинейных поверхностях или построением invariant-моделей в информатике.

**Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 38.03.05 Бизнес-информатика, профиль Бизнес-аналитика и входит в часть, формируемую участниками образовательных отношений, Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин «Основы математического анализа и линейной алгебры» или «Математический анализ» и «Линейная алгебра и геометрия» или «Математический анализ. Продвинутый уровень» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень».

**Цель изучения дисциплины (модуля):** формирование у студентов целостного представления о топологическом и дифференциальном анализе многообразий, а также научить их применять полученный математический аппарат для построения и исследования гладких геометрических моделей в теории относительности, физических приложениях и современных вычислительных методах.

**Задачи изучения дисциплины (модуля)**:

— изучить основные понятия общей топологии (топологические пространства, непрерывность, компактность, связность) и их специализацию для гладких многообразий, включая диффеоморфизмы, теорему Сарда и свойства гладких отображений;

— научиться вычислять касательные пространства, работать с векторными полями и скобкой Ли, а также с тензорными полями, ковариантными производными иными типами связностей;

— уметь задавать метрику на многообразии, находить символы Кристоффеля, решать уравнения геодезических и вычислять тензоры кривизны (Римана, Риччи, скалярную);

— использовать математический аппарат в задачах теоретической физики (модель пространства-времени, уравнения Эйнштейна), геометрической оптимизации (оптимальное размещение на нелинейных поверхностях) и современных вычислительных областях (геометрическое машинное обучение, графика, обучение представлениям на многообразиях).

**В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:**

***знать:***

— основные понятия общей топологии (топологические пространства, непрерывность, компактность, связность) и их применение к многообразиям;

— определения гладких многообразий, гладких отображений, диффеоморфизмов и их ключевые свойства;

— теорию касательных пространств, векторных полей, скобки Ли и их роль в дифференциальной геометрии;

— основы тензорного исчисления: типы тензоров, операции с ними, ковариантная производная и связности;

— основные объекты римановой геометрии: метрику, геодезические, кривизну (тензоры Римана, Риччи, скалярную кривизну);

***уметь:***

— анализировать топологические свойства пространств и многообразий (хаусдорфовость, компактность, наличие гладкой структуры);

— работать с гладкими отображениями, строить диффеоморфизмы, применять теорему Сарда;

— вычислять касательные векторы, исследовать векторные поля, работать со скобкой Ли;

— оперировать тензорными полями, вычислять ковариантные производные, проверять свойства связностей;

— решать уравнения геодезических, вычислять символы Кристоффеля и тензоры кривизны для заданных метрик;

***владеть:***

— математическим аппаратом общей и дифференциальной топологии для анализа геометрических структур;

— методами дифференциальной геометрии, включая координатные и бескоординатные вычисления;

— навыками работы с тензорами и римановыми метриками в физических и геометрических приложениях;

— способностью применять полученные знания для решения задач в теории многообразий, общей теории относительности и смежных областях.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

| Компетенция | Содержание компетенции | Индикатор компетенции | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| УК-1 | Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1. | Знает методы поиска и анализа информации в области аналитики, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности. |
| | | УК-1.2. | Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем |
| | | УК-1.3. | Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации |
| ОПК-4 | Способен понимать принципы работы информационных технологий; использовать информацию, методы и программные средства ее сбора, обработки и анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений | ОПК-4.1. | Знает основные принципы работы информационных технологий и их влияние на бизнес-процессы |
| | | ОПК-4.2. | Умеет использовать методы и программные средства для сбора, обработки и анализа информации, обеспечивая качественную информационно-аналитическую поддержку |
| | | ОПК-4.3. | Имеет практический опыт в применении аналитических инструментов для поддержки принятия управленческих решений в организациях |
| ПК-2 | Способен использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования для решения задач профессиональной деятельности | ПК-2.1. | Знает основные математические методы и инструментальные средства, применяемые для обработки и анализа информации |
| | | ПК-2.2. | Умеет эффективно использовать математический аппарат для систематизации данных и решения профессиональных задач |
| | | ПК-2.3. | Имеет практический опыт работы с инструментами анализа информации в рамках исследовательских проектов |

## 3. Тематический план

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Трудоемкость, академические часы | | | | ТКУ (текущий контроль успеваемости) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Очная форма* | | | | |
| | | Аудиторная работа | | Контроль | Самостоятельная работа | |
| | | Лекции | Семинары | | | |
| 1 | Топология | 5 | 5 | | 18 | Домашнее задание Аудиторная работа |
| 2 | Гладкая структура | 5 | 5 | | 18 | Домашнее задание Аудиторная работа |
| 3 | Касательное пространство | 5 | 5 | 2 | 18 | Домашнее задание Контрольная работа Аудиторная работа |
| 4 | Векторные поля | 5 | 5 | | 18 | Домашнее задание Аудиторная работа |
| 5 | Дифференцирование | 5 | 5 | | 18 | Домашнее задание Аудиторная работа |
| 6 | Римановы многообразия | 2 | 2 | | 18 | Домашнее задание Лабораторная работа |
| 7 | Интегрирование | 3 | 3 | | 16 | Домашнее задание |
| | ***Зачет с оценкой*** | | | 4 | | Итоговая работа |
| | ***Итого:*** | ***30*** | ***30*** | ***6*** | ***124*** | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)*** | | ***190*** | | | | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)*** | | ***5*** | | | | |

## 4. Содержание дисциплины (модуля)

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Содержание дисциплины (модуля) по темам |
|---|---|---|
| 1. | Топология | Топологическое пространство и топологические многообразия. Гомеморфизмы и непрерывные отображения. Операции над топологическими пространствами |
| 2. | Гладкая структура | Понятие карты и атласа. Гладкие многообразия. Примеры многообразий.<br>Морфизмы многооразий, диффеоморфизм. Ранг отображения. Отображения постоянного ранга и подмногообразия<br>Лемма Сарда и теоремы об аппроксимации. |
| 3. | Касательное пространство | Три определения касательного вектора. Производная Ли. Дифференциал отображения. |
| 4. | Векторные поля | Векторные и ковекторные поля, операторные поля, поля билинейных и квадратичных форм. Первая и вторая квадратичные формы.<br>Понятие дифференциальной формы. Операции над дифференциальными формами. Дифференцирование.<br>Примеры тензорных полей и операции над ними. |
| 5. | Дифференцирование | Ковариантное дифференцирование. Символы Кристофеля и их вычисления |
| 6. | Римановы многообразия | Метрика и Риманова многообразие. Риманова связноть.<br>Контрольная работа<br>Параллельный перенос и гоедезические |
| 7. | Интегрирование | Плотности и интегрирование плотностей<br>Ориентация на многообразии. Многообразие с краем и индуцированая ориентация<br>Интегрирование дифференциальных форм.<br>Интегрирование дифференциальных форм. |

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

***Основная литература:***

1. Мусин, Ю. Р. Тензорный анализ. Вводный курс с приложениями к анализу и геометрии : учебник для вузов / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 184 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06198-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/585823

2. Сандракова, Е. В. Дифференциальные формы на гладких многообразиях : учебник для вузов / Е. В. Сандракова, Е. В. Сумин. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 138 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10988-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/565616

***Дополнительная литература:***

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 416 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18887-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/583462

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья,

оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

| № | Наименование портала (издания, курса, документа) | Ссылка |
|---|---|---|
| 1. | Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека | https://elibrary.ru/defaultx.asp |
| 2. | База данных для IT-специалистов | https://habr.com |
| 3. | База данных ScienceDirect | https://www.sciencedirect.com |
| 4. | Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации | https://minobrnauki.gov.ru/ |
| 5. | Федеральный портал «Российское образование" | https://www.edu.ru/ |
| 6. | Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" | http://window.edu.ru/ |
| 7. | Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов | http://school-collection.edu.ru/ |
| 8. | Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов | http://fcior.edu.ru/ |

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

| Наименование ПО | Производство | Лицензионное / свободно распространяемое |
|---|---|---|
| **Операционные системы:** | | |
| Microsoft Imagine (Windows Client, Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Браузеры:** | | |
| Яндекс.Браузер | отечественное | свободно распространяемое |
| Google Chrome | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Офисные приложения:** | | |
| Microsoft Imagine (Visio, OneNote) | зарубежное | лицензионное |
| TeXstudio | зарубежное | свободно распространяемое |
| Adobe Acrobat Reader | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Программное обеспечение для планирования и учета времени:** | | |
| Toggle app | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления проектами:** | | |
| Microsoft Imagine (Project) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы управления базами данных:** | | |
| Microsoft Imagine (SQL Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы резервного копирования (backup):** | | |
| Acronis Backup Advanced for HyperV | зарубежное | лицензионное |
| **Справочно-правовые системы:** | | |
| КонсультантПлюс: справочно-правовая система | отечественное | лицензионное |
| **Средства антивирусной защиты:** | | |
| Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition | отечественное | лицензионное |

| | | |
|---|---|---|
| **Среды разработки:** | | |
| Visual Studio Code | зарубежное | свободно распространяемое |
| Bash (Unix shell) | зарубежное | свободно распространяемое |
| Anaconda | зарубежное | свободно распространяемое |
| Robotic Operating System | зарубежное | свободно распространяемое |
| CopelliaSim | зарубежное | свободно распространяемое |
| Google Colaboratory | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Пакеты программных средств и библиотек:** | | |
| AutoPsy | зарубежное | свободно распространяемое |
| Interactive Disassembler (IDA) | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления библиографической информацией:** | | |
| Zotero | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Сервисы и службы:** | | |
| Bind | зарубежное | свободно распространяемое |
| Docker | зарубежное | свободно распространяемое |

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Анализ на многообразиях» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, аудиторная работа, контрольные работы, лабораторные работы, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Семинар* — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

*Аудиторная работа* – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал, использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Лабораторная работа* — это форма учебной деятельности, где студенты выполняют практические задания под руководством преподавателя для закрепления теоретических знаний и развития навыков.

Для успешной подготовки к лабораторной работе рекомендуется заранее изучить теоретический материал, подготовить необходимые инструменты (например, программное обеспечение или данные) и активно экспериментировать с задачами, чтобы эффективно решать проблемы и демонстрировать понимание дисциплины.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

## Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Анализ на многообразиях»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

| **Десятибалльная оценка** | **Пятибалльная оценка** | **Оценка за зачет** | **Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)** |
|---|---|---|---|
| 10 | Отлично | Зачтено | Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые |
| 9 | Отлично | Зачтено | |
| 8 | Отлично | Зачтено | |

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| | | | моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами. |
| 7 | Хорошо | Зачтено | Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами. |
| 6 | Хорошо | Зачтено | |
| 5 | Удовлетворительно | Зачтено | Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования. |
| 4 | Удовлетворительно | Зачтено | |
| 3 | Не сдан | Не зачтено | Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы. |
| 2 | Не сдан | Не зачтено | |
| 1 | Не сдан | Не зачтено | |

Дисциплина (модуль) «Анализ на многообразиях» оценивается следующим образом:

| Активность | Вес | Количество | Описание |
|---|---|---|---|
| Домашнее задание | 15% | 14 | Форма проверки знаний, при которой студент отвечает на вопросы преподавателя в устной форме, демонстрируя свои знания и понимание темы |
| Аудиторная работа | 15% | 1 | Активная работа студента на занятии |
| Контрольная работа | 30% | 1 | Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время |
| Лабораторная работа | 10% | 1 | Практическое задание, направленное на применение теоретических знаний при решении конкретных задач, выполняемое под руководством преподавателя |
| Зачет с оценкой | 30% | 1 | Итоговая работа - письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время, возможен дополнительный устный экзамен |

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Анализ на многообразиях»:** «0,15× среднее за домашнее задание + 0,15 × аудиторная работа + 0,3 × контрольные работы + 0,1 × лабораторная работа + 0,3 × зачет с оценкой».

**Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)**

**Примерные домашние задания**

1. Дайте формальное определение топологического пространства, перечислите три основных свойства, которыми оно должно обладать, и объясните, почему из этих свойств следует хаусдорфовость, если к любой паре точек можно подобрать отделяющие открытые множества.
*Ожидаемый результат* : небольшая письменная выдержка (≈150 сл.); проверяется полнота определения и логика доказательства.

2. Покажите, что любой гладкий компактный многообразие без границы обладает конечным атласом. Укажите, где в доказательстве используется компактность. *Ожидаемый результат* : формальное доказательство (≈10 строк) с ссылкой на теорему о конечном подпокрытии.

3. Возьмите сферу $S2 \subset R3$ в стандартных сферических координатах $(\theta,\varphi)$. Выведите формулы для метрического тензора $g$, символов Кристоффеля $\Gamma ijk$ и тензора Риччи $Rij$. *Ожидаемый результат* : набор формул, проверенных в SymPy (файл-ноутбук Jupyter).

4. С помощью библиотеки **Manifold** (или собственного кода) реализуйте функцию, принимающую точку $p$ на двумерном торе и возвращающую базис векторных полей $\{\partial\theta,\partial\varphi\}$ в координатах $(\theta,\varphi)$. Продемонстрируйте работу функции на пяти случайных точках. *Ожидаемый результат* : Jupyter-ноутбук с объявлением функции, выводом базисов и коротким пояснением.

5. В нескольких предложениях опишите, как тензор Римана появляется в уравнениях общей теории относительности и какую физическую величину описывает его скалярная кривизна $R$.
*Ожидаемый результат* : текст (≈200 сл.) с указанием уравнений Эйнштейна.

**Примерные задания для семинаров**

1. Заданы параметры поверхности Мёбиуса. Каждая группа должна найти касательное пространство в произвольной точке, построить векторное поле «по направлению полоски», построить векторное поле, перпендикулярное полоске, и

вычислить скобку Ли между ними. Группа представляет решение на доске и делает короткий (≈5-минутный) доклад.

2. Обсудите, как теорема Сарда может быть использована при доказательстве существования решений уравнений Эйлера–Лагранжа на гладком многообразии. Студенты формируют список тезисов (≤ 6 пунктов) и аргументируют каждый из них.

3. Постройте геодезическую на гиперболической плоскости (модель Пуанкаре) с начальными условиями $(x0,y0)=(0,0), \dot{x}0=1, \dot{y}0=0$. Сравните полученное численное решение (Runge-Kutta) с аналитической формой и представьте график и таблицу ошибок.

4. «Почему совместимость метрики $\nabla g=0$ важна для физики?». Студенты приводят примеры, в том числе нелинейную связность в общей теории относительности, и фиксируют свои выводы в протоколе семинара (≈150 сл.).

5. Дано пространство конфигураций манипулятора-робота $SO(3)\times R3$. Требуется сформулировать задачу планирования траекторий в терминах геодезических. Группы готовят схематический план решения (псевдокод + короткое объяснение).

## Примерные задания для контрольной работы

1. **Определение карты** – дайте определение мягкой карты (chart) и перечислите два обязательных свойства её обратного отображения.
2. **Метрика тора** – в координатах $(\theta,\varphi)$ на торе $T2=S1\times S1$ запишите метрический тензор $g$, если радиусы обеих окружностей равны 1.
3. **Символ Кристоффеля** – вычислите $\Gamma\varphi\varphi\theta$ для указанной метрики тора.
4. **Теорема Сарда** – сформулируйте её в одном предложении.
5. **Инвариантность скалярной кривизны** – докажите, что скалярная кривизна $R$ остаётся неизменной при переходе к другим координатам на произвольном двумерном римановом многообразии.
6. **Уравнение геодезических на сфере** – запишите систему ОДУ для $(\theta(t),\varphi(t))$ на сфере $S2$.

## Примерные задания для лабораторной работы

1. **Создание класса многообразия** – реализуйте класс **Manifold** с полями **dim**, **charts** (список функций-карт) и **transition_maps**. Встроите проверку совместимости атласа (гладкость переходных функций).
2. **Тензорный модуль** – напишите функции для задания метрики **metric(g_ij)**, её обратной метрики и вычисления символов Кристоффеля первого рода $\Gamma ijk$ по формуле Кристоффеля-II.
3. **Кривизна** – на основе полученных символов реализуйте вычисление тензора Римана $Rijkl$, тензора Риччи $Rij$ и скалярной кривизны $R=gijRij$. Выведите полученные массивы.
4. **Геодезические** – сформулируйте систему ОДУ геодезических, решите её с помощью **scipy.integrate.solve_ivp** для выбранной метрики (например, гиперболическая плоскость в модели Пуанкаре).
5. **Визуализация** – постройте графики полученных геодезических при разных начальных условиях, используя **matplotlib** или **plotly**. Для сравнения отобразите геодезические на сфере и на торе.
6. **Отчёт** – оформите PDF-документ, включающий:

— Краткое теоретическое описание реализуемых формул;

— Основные блоки кода с комментариями;

— Таблицы значений символов Кристоффеля, тензоров кривизны и графики геодезических;

— Анализ полученных численных результатов (сравнение со известными аналитическими значениями, например, скалярная кривизна сферы = 1).

**Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

| № п/п | Задание | Ответ | Компетенция |
|---|---|---|---|
| 1 | Укажите два свойства, которыми должна обладать карта (chart) в определении гладкого многообразия (перечислите через запятую). | Биективность, гладкость обратного отображения | УК-1 |
| 2 | Как называется условие, при котором семейство карт образует атлас (одно слово). | Совместимость | УК-1 |
| 3 | Назовите пример топологического пространства, которое НЕ является хаусдорфовым. | Кольцо с «склеенной» точкой (Sierpiński space) | УК-1 |
| 4 | Укажите, какое свойство гарантирует, что каждый открытый набор в компактном многообразии покрывается конечным числом открытых множеств из любой открытой покровности (одно слово). | Коверность | ОПК-4 |
| 5 | Приведите формулировку теоремы Сарда (коротко). | Образ гладкого отображения между многообразиями имеет ноль-мера, если ранг дифференциала меньше размерности цели в каждой точке. | ОПК-4 |
| 6 | Как называется касательных векторов в точке p ∈ M (одно слово). | Касательное | ОПК-4 |
| 7 | Запишите дефиницию векторного поля на гладком многообразии (одно предложение). | Отображение, присваивающее каждой точке p ∈ M вектор из её касательного пространства $T_pM$, гладко зависящее от p. | ОПК-4 |
| 8 | В какой конструкции определяется скобка Ли двух векторных полей (одно слово). | Коммутатор | ОПК-4 |
| 9 | Укажите, как называется линейное отображение $\nabla_x Y$, где ∇ – коникулярное (affine) соединение (одно слово). | Ко-дериватив | ОПК-4 |
| 10 | Какой тензор измеряет неконтролируемость коммутатора коникулятивных производных (одно слово). | Кривизна | ОПК-4 |
| 11 | Приведите формулу для символов Кристоффеля первого рода в локальных координатах (коротко). | Γ^k_{ij}=½ g^{kl}(∂i g{jl}+∂j g{il}−∂l g{ij}) | ОПК-4 |
| 12 | Как называется уравнение, определяющее геодезические линии на римановом многообразии (одно слово). | Геодезика | ПК-2 |
| 13 | Напишите условие (в виде равенства), которое должна удовлетворять метрическая (Riemannian) метрика в каждой точке (одно предложение). | g_p — симметричная положительно-определённая | ПК-2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | билинейная форма на $T_pM$. | |
| 14 | Что вычисляют симметричные части символов Кристоффеля (одно слово). | Связность | ПК-2 |
| 15 | Укажите, какой тензор получаем по полному сокращению тензора Римана (одно слово). | Скалярная | ПК-2 |
| 16 | Как называется теорема, утверждающая, что любой компактный ориентируемый 2-мерный многообразий без границы топологически эквивалентен сфере или тору (одно слово). | Классификация | ПК-2 |
| 17 | В какой категории находятся тензоры типа (0,2) (одно слово). | Ковариантные | ПК-2 |
| 18 | Напишите формулу для ковариантного производного метрики (одно предложение). | $\nabla_k g_{ij}=0$ (метрика совместима с соединением). | ПК-2 |
| 19 | Как называется оператор, действующий на гладкие функции $f \in C^\infty(M)$ и задаваемый $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ (одно слово). | Лапласиан | ПК-2 |
| 20 | Укажите, какой физический закон часто формулируется через тензор Риччи в общей теории относительности (одно слово). | Эйнштейн | УК-1 |