

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета  
АНО ВО «Центральный университет»  
«07» марта 2024 г.  
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
«Теория стохастического оптимального управления»**

**Направление подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**Направленность (профиль) подготовки:** Разработка

**Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Срок освоения программы:** 4 года

**Год набора:** 2024

**Москва  
2024**

## Содержание

<b>1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Перечень планируемых результатов обучения</b> .....	<b>5</b>
<b>3. Тематический план</b> .....	<b>7</b>
<b>4. Содержание дисциплины (модуля)</b> .....	<b>8</b>
<b>5. Учебно-методическое обеспечение</b> .....	<b>9</b>
<b>6. Материально-техническое обеспечение</b> .....	<b>9</b>
<b>7. Методические и оценочные материалы</b> .....	<b>11</b>

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория стохастического оптимального управления» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Разработка, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Теория стохастического оптимального управления» обеспечивает глубокое понимание стохастических процессов, которые лежат в основе современных математических моделей, используемых для анализа неопределённости и случайности в сложных системах. Эта дисциплина способствует развитию навыков компьютерного моделирования и симуляции случайных явлений, что критично для применения в областях, таких как финансовый анализ, машинное обучение, оптимизация алгоритмов и обеспечение информационной безопасности, где точные предсказания и управление рисками невозможны без учёта стохастических факторов.

### Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Разработка и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 5, 6, 7, 8 семестрах на выбор.

**Цель изучения дисциплины (модуля):** формирование у студентов фундаментальных знаний о математических моделях стохастических процессов, включая методы анализа и решения стохастических дифференциальных уравнений, для применения в задачах компьютерного моделирования.

### Задачи изучения дисциплины (модуля):

- ознакомить студентов с основными понятиями и методами стохастического анализа, включая Теория стохастического оптимального управления и их свойства;
- развить умения формулировать и решать задачи моделирования случайных процессов в различных прикладных областях, таких как финансовая математика и машинное обучение;
- обучить применению численных методов и компьютерных технологий для симуляции и анализа стохастических систем;
- сформировать навыки критической оценки и интерпретации результатов стохастического моделирования с учётом особенностей стохастических процессов.

### В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

#### **знать:**

- основные принципы оптимального управления в стохастических системах;
- уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (НJB);
- методы динамического программирования;
- приложения в финансах (управление портфелем);
- связь с теорией марковских процессов;

#### **уметь:**

- формулировать задачу стохастического ОПУ;
- решать уравнение НJB для простых случаев;
- применять принцип максимума Понтрягина;
- строить оптимальные стратегии управления;
- анализировать устойчивость решений;

***владеть:***

- навыками работы с уравнениями НЖВ;
- методами стохастической оптимизации;
- терминологией теории управления;
- основами программирования для численных решений (Python/MATLAB);
- принципами моделирования в экономике и финансах.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области разработки, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
УК-2.	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1.	Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач
		УК-2.2.	Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения
		УК-2.3.	Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области
		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и

			доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен определять общие формы и закономерности области машинного обучения	ПК-1.1.	Знает основные теоретические концепции и принципы, относящиеся к области машинного обучения, а также ключевые закономерности и модели, которые помогают в анализе и интерпретации данных
		ПК-1.2.	Умеет проводить систематический анализ области разработки, выявлять и формулировать общие закономерности и тенденции, а также применять методы исследования для получения новых знаний и понимания
		ПК-1.3.	Имеет практический опыт работы в области машинного обучения, включая участие в научных проектах, исследованиях или практических заданиях, где были выявлены и описаны общие формы и закономерности
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области разработки, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области разработки, включая соблюдение норм информационной безопасности

### 3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
Лекции	Семинары					
1	Введение в стохастическое управление	2	4		7	Домашнее задание Подготовка к семинару
2	Динамическое программирование	2	4		7	Домашнее задание
3	Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (НЖВ)	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
4	Принцип максимума Понтрягина	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
5	Линейно-квадратичное управление	2	4		7	Домашнее задание Подготовка к семинару
6	Модель Мертона	2	4		7	Подготовка к семинару
7	Стохастические дифференциальные игры	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
8	Управление с неполной информацией	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
9	Эргодическое управление	2	4		7	Домашнее задание Подготовка к семинару
10	Численные методы	2	4		7	Подготовка к семинару
11	Устойчивость стохастических систем	2	4		6	Домашнее задание Контрольная работа
12	Оптимальная остановка	2	4	2	6	Домашнее задание Контрольная работа
13	Обратные СДУ (Парду–Пенга)	2	4		6	Домашнее задание Подготовка к семинару
14	Практикум	4	8		6	Подготовка к семинару
	<i>Зачет с оценкой</i>			4		
	<b>Итого:</b>	<b>30</b>	<b>60</b>	<b>6</b>	<b>94</b>	
	<b>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</b>	<b>190</b>				
	<b>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</b>	<b>5</b>				

#### 4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Введение в стохастическое управление	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Основные понятия: стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), управляемые процессы.</li> <li>– Связь СДУ с уравнениями в частных производных (УрЧП).</li> <li>– Примеры задач: управление портфелем, ресурсами.</li> </ul>
2	Динамическое программирование	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Управляемые диффузионные процессы на конечном интервале времени.</li> <li>– Параболическое уравнение Беллмана: вывод и интерпретация.</li> <li>– Практика: решение задачи управления инвестициями.</li> </ul>
3	Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (НJB)	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Алгоритм Беллмана-Ховарда для параболических уравнений.</li> <li>– Примеры: управление с квадратичной функцией затрат.</li> <li>– Численная реализация на Python (библиотека <code>scipy</code>).</li> </ul>
4	Принцип максимума Понтрягина	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Сравнение с методом НJB.</li> <li>– Условия оптимальности. Пример: задача быстрогодействия.</li> <li>– Связь с детерминированным случаем.</li> </ul>
5	Линейно-квадратичное управление	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Постановка задачи. Решение через НJB.</li> <li>– Управление с обратной связью.</li> <li>– Приложения: робототехника, финансы.</li> </ul>
6	Модель Мертона	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Оптимальное управление портфелем (риск vs доходность).</li> <li>– Решение с дисконтированием на бесконечном горизонте.</li> <li>– Эллиптическое уравнение Беллмана.</li> </ul>
7	Стохастические дифференциальные игры	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Постановка задачи для двух игроков.</li> <li>– Равновесие Нэша в стохастических системах.</li> <li>– Пример: конкуренция фирм на рынке.</li> </ul>
8	Управление с неполной информацией	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Фильтр Калмана и его применение.</li> <li>– Частично наблюдаемые марковские процессы (POMDP).</li> <li>– Практика: задача слежения за движущимся объектом.</li> </ul>
9	Эргодическое управление	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Эргодические свойства СДУ.</li> <li>– Управление «в среднем» для равномерно эргодических систем.</li> <li>– Эргодическое уравнение Беллмана.</li> </ul>
10	Численные методы	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Алгоритм Беллмана-Ховарда для эллиптических уравнений.</li> <li>– Метод конечных разностей для НJB.</li> <li>– Реализация на Python (сравнение методов).</li> </ul>
11	Устойчивость стохастических систем	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Критерии устойчивости по Ляпунову.</li> <li>– Управление при «почти-монотонной» функции цены.</li> <li>– Примеры из экономики.</li> </ul>
12	Оптимальная остановка	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Уравнение Беллмана для задачи остановки.</li> <li>– Приложения: продажа актива, остановка эксперимента.</li> <li>– Связь с обратными СДУ (часть 1).</li> </ul>
13	Обратные СДУ (Парду-Пенга)	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Постановка и основные свойства.</li> <li>– Связь с прямыми задачами ОПУ.</li> <li>– Пример: управление в условиях неопределённости (часть 2).</li> </ul>
14	Практикум	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Кейсы:</li> <li>- Калибровка модели Хестона по рыночным данным.</li> <li>- Оптимальное распределение капитала.</li> <li>– Обсуждение связи тем курса с современными исследованиями.</li> </ul>

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

### *Основная литература:*

1. Аверина, Т. А. Алгоритмы статистического моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой : учебное пособие / Т. А. Аверина. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. - 288 с. – ISBN 978-5-9729-2443-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2226612>.

2. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 276 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01748-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/536889>.

3. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02086-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/537767>.

4. Кожевникова, И. А. Стохастическое моделирование процессов : учебник для вузов / И. А. Кожевникова, И. Г. Журбенко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 148 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09989-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563642>.

5. Муратова, Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для вузов / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 524 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19174-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560212>.

### *Дополнительная литература:*

Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1 : Факты, модели: В 2 т.: Сборник научных трудов / Ширяев А.Н. - Москва :МЦНМО, 2016. - 440 с.: ISBN 978-5-4439-2391-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/970044>

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М. : Вильямс, 2009. — 784 с.

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	<a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp">https://elibrary.ru/defaultx.asp</a>
2.	База данных для IT-специалистов	<a href="https://habr.com">https://habr.com</a>
3.	База данных ScienceDirect	<a href="https://www.sciencedirect.com">https://www.sciencedirect.com</a>
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	<a href="https://minobrnauki.gov.ru/">https://minobrnauki.gov.ru/</a>
5.	Федеральный портал «Российское образование»	<a href="https://www.edu.ru/">https://www.edu.ru/</a>
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	<a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	<a href="http://school-collection.edu.ru/">http://school-collection.edu.ru/</a>
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	<a href="http://fcior.edu.ru/">http://fcior.edu.ru/</a>

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
<b>Операционные системы:</b>		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Браузеры:</b>		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Офисные приложения:</b>		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое

Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Программное обеспечение для планирования и учета времени:</b>		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления проектами:</b>		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы управления базами данных:</b>		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы резервного копирования (backup):</b>		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
<b>Справочно-правовые системы:</b>		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
<b>Средства антивирусной защиты:</b>		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
<b>Среды разработки:</b>		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Пакеты программных средств и библиотек:</b>		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления библиографической информацией:</b>		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Сервисы и службы:</b>		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Теория стохастического оптимального управления» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Семинар* — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

*Аудиторная работа* – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

### **Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

**Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Теория стохастического оптимального управления»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме **зачета с оценкой**, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысливает дисциплину. Он
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным
5	Удовлетворительно	Зачтено	
4	Удовлетворительно	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			набором методов исследования.
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Теория стохастического оптимального управления» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	13	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	30%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Аудиторная работа	15%	1	Ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Зачет с оценкой	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время, возможен дополнительный устный экзамен

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Теория стохастического оптимального управления»:** « $0,2 \times$  среднее за домашние задания +  $0,3 \times$  среднее за контрольные работы +  $0,15 \times$  за аудиторную работу +  $0,35 \times$  зачет с оценкой».

**Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)**

### Примерные вопросы для семинаров

#### Введение в стохастическое управление

1. Что такое стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) и как оно отличается от обычного дифференциального уравнения?
2. Приведите пример управляемого процесса, связанного с управлением портфелем инвестиций.
3. Как связаны СДУ с уравнениями в частных производных (УрЧП) в контексте задач оптимизации?
4. Опишите основные компоненты задачи стохастического управления: состояние, управление и целевую функцию.
5. Приведите пример задачи управления ресурсами, где используется СДУ.
6. Что такое марковское свойство в контексте управляемых стохастических процессов?
7. Как броуновское движение используется в моделях стохастического управления?
8. Объясните понятие "оптимального управления" в стохастической среде.
9. Приведите пример, где неполная информация влияет на выбор управления в СДУ.
10. Как связаны принципы стохастического управления с задачами из финансовой математики?

#### Динамическое программирование

1. Что такое управляемый диффузионный процесс на конечном интервале времени?
2. Как выводится параболическое уравнение Беллмана и что оно описывает?

3. Приведите пример решения задачи управления инвестициями с помощью динамического программирования.
4. Что такое функция стоимости в уравнении Беллмана и как она интерпретируется?
5. Как дисконтирование влияет на решение уравнения Беллмана?
6. Опишите шаги алгоритма динамического программирования для СДУ.
7. Приведите численный пример расчета оптимального управления на конечном горизонте.
8. Как связаны уравнение Беллмана и принцип оптимальности Беллмана?
9. Что такое "граница" в задаче динамического программирования для диффузионных процессов?
10. Приведите пример, где динамическое программирование применяется в управлении запасами.

### **Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (НJB)**

1. Что такое алгоритм Беллмана–Ховарда для параболических уравнений?
2. Приведите пример задачи с квадратичной функцией затрат, решаемой через НJB.
3. Как реализовать численное решение НJB на Python с использованием библиотеки `scipy`?
4. Что такое функция стоимости в уравнении НJB и как она связана с оптимальным управлением?
5. Опишите разницу между параболическим и эллиптическим уравнением Беллмана.
6. Приведите пример, где НJB используется для управления в робототехнике.
7. Как проверяется сходимость численного решения НJB?
8. Что такое "управление с обратной связью" в контексте НJB?
9. Приведите пример, где НJB применяется для задачи с ограничениями на управление.
10. Как связаны НJB и стохастические игры?

### **Принцип максимума Понтрягина**

1. В чём основное отличие принципа максимума Понтрягина от метода НJB?
2. Какие условия оптимальности задаёт принцип максимума для стохастических систем?
3. Приведите пример задачи быстродействия, решаемой с помощью принципа Понтрягина.
4. Как связан принцип максимума с детерминированным случаем управления?
5. Что такое сопряжённая система в принципе максимума Понтрягина?
6. Приведите численный пример применения принципа максимума к линейной СДУ.
7. Когда предпочтительно использовать принцип Понтрягина вместо НJB?
8. Опишите, как принцип максимума применяется в задачах с неполной информацией.
9. Приведите пример из экономики, где используется принцип Понтрягина.
10. Как принцип максимума связан с обратными СДУ?

### **Линейно-квадратичное управление**

1. Что такое постановка задачи линейно-квадратичного управления (LQG)?
2. Как решается LQG через уравнение НJB?
3. Приведите пример управления с обратной связью в LQG.
4. Как применяется LQG в робототехнике?
5. Что такое разделение в LQG и почему оно важно?
6. Приведите пример из финансов, где используется LQG.
7. Как численно реализовать LQG на Python?
8. Что такое "линейная обратная связь" в LQG?
9. Приведите пример, где LQG используется для управления с шумом.

10. Как LQG связано с фильтром Калмана?

### **Модель Мертона**

1. Что описывает модель Мертона для оптимального управления портфелем?
2. Как решается задача Мертона с дисконтированием на бесконечном горизонте?
3. Что такое эллиптическое уравнение Беллмана в модели Мертона?
4. Приведите пример расчета оптимального распределения активов по Мертону.
5. Как риск и доходность балансируются в модели Мертона?
6. Что такое "граница эффективности" в портфельной теории Мертона?
7. Приведите численный пример решения уравнения Беллмана для Мертона.
8. Как модель Мертона применяется в практике инвестиций?
9. Что такое "стохастическое управление портфелем" в контексте Мертона?
10. Как связана модель Мертона с эргодическим управлением?

### **Стохастические дифференциальные игры**

1. Что такое постановка задачи в стохастических дифференциальных играх?
2. Как определяется равновесие Нэша в стохастических системах?
3. Приведите пример конкуренции фирм на рынке как стохастической игры.
4. Что такое "игрок" в контексте стохастических дифференциальных игр?
5. Как выводится уравнение Беллмана для игр?
6. Приведите пример, где равновесие Нэша приводит к оптимальному управлению.
7. Как численно моделировать стохастические игры на Python?
8. Что такое "смешанная стратегия" в стохастических играх?
9. Приведите пример из экологии, где применяются стохастические игры.
10. Как стохастические игры связаны с управлением с неполной информацией?

### **Управление с неполной информацией**

1. Что такое фильтр Калмана и как он применяется в управлении?
2. Что такое частично наблюдаемые марковские процессы (POMDP)?
3. Приведите пример задачи слежения за движущимся объектом с неполной информацией.
4. Как фильтр Калмана обновляет оценки состояния?
5. Что такое "шум наблюдения" в POMDP?
6. Приведите численный пример применения фильтра Калмана.
7. Как POMDP связаны с принципом максимума Понтрягина?
8. Что такое "оптимальная политика" в управлении с неполной информацией?
9. Приведите пример из навигации, где используется неполная информация.
10. Как численно реализовать POMDP на Python?

### **Эргодическое управление**

1. Что такое эргодические свойства СДУ?
2. Что описывает управление "в среднем" для равномерно эргодических систем?
3. Как выводится эргодическое уравнение Беллмана?
4. Приведите пример эргодического управления в экономике.
5. Что такое "средняя стоимость" в эргодическом управлении?
6. Как связаны эргодические свойства с бесконечным горизонтом?
7. Приведите численный пример решения эргодического уравнения.
8. Что такое "стационарная политика" в эргодическом управлении?
9. Приведите пример из физики, где применяется эргодическое управление.
10. Как эргодическое управление связано с устойчивостью систем?

### **Численные методы**

1. Что такое алгоритм Беллмана–Ховарда для эллиптических уравнений?

2. Как применяется метод конечных разностей для решения НДВ?
3. Приведите пример реализации численных методов на Python.
4. Что такое "сетка" в методе конечных разностей для НДВ?
5. Как сравниваются алгоритм Беллмана–Ховарда и метод конечных разностей?
6. Приведите численный пример для параболического НДВ.
7. Что такое "итеративный подход" в алгоритме Беллмана–Ховарда?
8. Как проверяется точность численных решений НДВ?
9. Приведите пример применения численных методов в финансах.
10. Как численные методы связаны с практическим моделированием?

### **Устойчивость стохастических систем**

1. Какие критерии устойчивости по Ляпунову используются для СДУ?
2. Что такое управление при "почти-монотонной" функции цены?
3. Приведите пример из экономики, где применяется устойчивость СДУ.
4. Как определяется асимптотическая устойчивость в стохастических системах?
5. Что такое "лиapunov функция" для СДУ?
6. Приведите численный пример оценки устойчивости.
7. Как устойчивость связана с эргодическим управлением?
8. Что такое "стохастическая устойчивость" в управлении?
9. Приведите пример из физики, где применяется устойчивость.
10. Как критерии Ляпунова применяются в задачах управления?

### **Оптимальная остановка**

1. Как выводится уравнение Беллмана для задачи оптимальной остановки?
2. Приведите пример приложения оптимальной остановки в продаже актива.
3. Что такое "время остановки" в задаче оптимальной остановки?
4. Как связана оптимальная остановка с обратными СДУ?
5. Приведите пример остановки эксперимента как задачи управления.
6. Что такое "граница остановки" в уравнении Беллмана?
7. Приведите численный пример решения задачи остановки.
8. Как оптимальная остановка применяется в финансах?
9. Что такое "непрерывная остановка" в стохастических процессах?
10. Как оптимальная остановка связана с принципом максимума?

### **Обратные СДУ (Парду–Пенга)**

1. Что такое постановка обратной задачи СДУ по Парду–Пенга?
2. Какие основные свойства имеют обратные СДУ?
3. Как связаны обратные СДУ с прямыми задачами оптимального управления?
4. Приведите пример управления в условиях неопределённости через обратные СДУ.
5. Что такое "обратная задача" в контексте СДУ?
6. Приведите численный пример решения обратной СДУ.
7. Как обратные СДУ применяются в калибровке моделей?
8. Что такое "неопределённость параметров" в обратных СДУ?
9. Приведите пример из машинного обучения, где используются обратные СДУ.
10. Как обратные СДУ связаны с фильтром Калмана?

### **Примерные задания по контрольной работе**

#### **Контрольная работа №1**

1. **Введение в стохастическое управление.** Определите стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) и объясните его ключевые компоненты. Приведите

пример управляемого процесса для задачи управления ресурсами, записав СДУ в явном виде и обосновав его связь с уравнениями в частных производных.

2. **Введение в стохастическое управление.** Рассмотрите задачу управления портфелем: рисковый актив  $dSt = \mu St dt + \sigma St dWt$ , безрисковый с доходностью  $r$ . Запишите СДУ для капитала  $dXt = (rXt + ut(\mu - r))dt + ut\sigma dWt$ . Объясните, как марковское свойство влияет на выбор управления.

3. **Динамическое программирование.** Для управляемого диффузионного процесса на интервале  $[0, T]$  выведите параболическое уравнение Беллмана. Интерпретируйте функцию стоимости и принцип оптимальности. Приведите численный пример решения простой задачи с квадратичной функцией затрат.

4. **Динамическое программирование.** Решите задачу управления инвестициями: целевая функция  $E[\int_0^T ut^2 dt + XT^2]$ , где  $dXt = (rXt + ut(\mu - r))dt + ut\sigma dWt$ . Выведите уравнение Беллмана и опишите шаги нахождения оптимального управления.

5. **Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана.** Для задачи с квадратичной функцией затрат (линейно-квадратичное управление) выведите НЖВ-уравнение. Объясните алгоритм Беллмана-Ховарда и реализуйте численное решение на Python с использованием `scipy` (предоставьте ключевые фрагменты кода).

6. **Принцип максимума Понтрягина.** Сравните принцип максимума Понтрягина с методом НЖВ. Для детерминированного случая управления выведите условия оптимальности и объясните их перенос на стохастические системы. Приведите пример задачи быстрогодействия и решите ее.

7. **Принцип максимума Понтрягина.** Для системы  $dXt = ut dt + dWt$ , целевой функции  $E[\int_0^T (Xt^2 + ut^2) dt]$ , выведите сопряженную систему и условия оптимальности. Приведите численный расчет для  $T=1$ .

8. **Линейно-квадратичное управление.** Постановьте задачу LQG: линейная система  $dXt = (AXt + But) dt + CdWt$ , квадратичная целевая функция. Решите через НЖВ и объясните разделение. Приведите пример из робототехники.

9. **Численные методы.** Сравните алгоритм Беллмана-Ховарда для эллиптических уравнений и метод конечных разностей для НЖВ. Реализуйте простое численное решение на Python для задачи из темы 5 (предоставьте код и анализ сходимости).

## Контрольная работа №2

1. **Модель Мертона.** В модели Мертона для оптимального управления портфелем выведите эллиптическое уравнение Беллмана на бесконечном горизонте. Рассчитайте оптимальное распределение активов для параметров ( $\mu=0.1, \sigma=0.2, r=0.05$ , коэффициент риска Аверса 2). Объясните границу эффективности.

2. **Стохастические дифференциальные игры.** Постановьте задачу для двух игроков: система  $dXt = (ut - vt) dt + dWt$ , целевые функции  $E[\int_0^T (Xt^2 + ut^2 - vt^2) dt]$ . Определите равновесие Нэша и выведите уравнение Беллмана для игр. Приведите пример конкуренции фирм.

3. **Стохастические дифференциальные игры.** Решите задачу из предыдущего вопроса численно, моделируя равновесие Нэша. Объясните связь с управлением с неполной информацией и реализуйте простую симуляцию на Python.

4. **Управление с неполной информацией.** Опишите фильтр Калмана для линейной системы с шумом наблюдения. Примените к задаче слежения:  $dXt = ut dt + dWt, dYt = Xt dt + dVt$ . Выведите уравнения фильтра и приведите численный пример.

5. **Управление с неполной информацией.** Для POMDP объясните оптимальную политику. Приведите пример из навигации и обсудите связь с принципом максимума Понтрягина. Реализуйте простое численное решение.

6. **Эргодическое управление.** Для равномерно эргодической системы  $dXt = (ut - Xt) dt + dWt$  выведите эргодическое уравнение Беллмана для управления "в

среднем". Приведите пример из экономики (управление запасами) и рассчитайте среднюю стоимость.

7. **Устойчивость стохастических систем.** Опишите критерии устойчивости по Ляпунову для стохастических систем. Приведите пример управления при "почти-монотонной" функции цены и объясните приложения в экономике.

8. **Оптимальная остановка.** Выведите уравнение Беллмана для задачи остановки. Приведите приложение: продажа актива. Объясните связь с обратными СДУ (часть 1).

9. **Обратные СДУ (Парду–Пенга) и Практикум.** Опишите постановку и свойства обратных СДУ. Приведите пример управления в условиях неопределённости. Обсудите кейс из практикума: калибровка модели Хестона по рыночным данным и связь с современными исследованиями. Реализуйте простую калибровку на Python.

## Примерные домашние задания

### Домашнее задание 1

1. **Принцип максимума Понтрягина.** Сравните принцип максимума Понтрягина с методом НЖВ. Для детерминированного случая управления выведите условия оптимальности и объясните, как они переносятся на стохастические системы. Приведите пример задачи быстродействия и решите ее с помощью принципа максимума.

2. **Принцип максимума Понтрягина.** Для стохастической системы  $dX_t = ut dt + dW_t$ , целевой функции  $E[\int_0^T (X_t^2 + ut^2) dt]$ , выведите сопряженную систему и условия оптимальности. Приведите численный пример решения на конечном интервале.

3. **Линейно-квадратичное управление.** Постановьте задачу LQG: линейная система  $dX_t = (AX_t + But) dt + CdW_t$ , квадратичная целевая функция. Решите через НЖВ, объяснив разделение. Приведите пример из робототехники и реализуйте управление с обратной связью.

4. **Линейно-квадратичное управление.** Для финансового примера (управление портфелем) с шумом наблюдения решите LQG. Объясните связь с фильтром Калмана и реализуйте численное решение на Python (предоставьте код и анализ результатов).

5. **Модель Мертона.** В модели Мертона для оптимального управления портфелем (риск vs доходность) выведите эллиптическое уравнение Беллмана на бесконечном горизонте. Рассчитайте оптимальное распределение активов для простых параметров ( $\mu=0.1$ ,  $\sigma=0.2$ ,  $r=0.05$ , коэффициент риска Аверса 2). Приведите численный пример и обсудите границу эффективности.

### Домашнее задание 3

1. **Стохастические дифференциальные игры.** Постановьте задачу для двух игроков в стохастической игре: система  $dX_t = (ut - vt) dt + dW_t$ , целевые функции  $E[\int_0^T (X_t^2 + ut^2 - vt^2) dt]$ . Определите равновесие Нэша и выведите уравнение Беллмана для игр. Приведите пример конкуренции фирм на рынке.

2. **Стохастические дифференциальные игры.** Для примера с двумя игроками решите задачу численно, моделируя равновесие Нэша. Объясните, как стохастические игры связаны с управлением с неполной информацией, и реализуйте простую симуляцию на Python.

3. **Управление с неполной информацией.** Опишите фильтр Калмана для линейной системы с шумом наблюдения. Примените к задаче слежения за движущимся объектом: система  $dX_t = ut dt + dW_t$ , наблюдение  $dY_t = X_t dt + dV_t$ . Выведите уравнения фильтра и приведите численный пример.

4. **Управление с неполной информацией.** Для POMDP (частично наблюдаемые марковские процессы) объясните оптимальную политику. Приведите пример из навигации

и обсудите связь с принципом максимума Понтрягина. Реализуйте простое численное решение на Python.

5. **Эргодическое управление.** Для равномерно эргодической системы  $dX_t=(ut-X_t)dt+dW_t$  выведите эргодическое уравнение Беллмана для управления "в среднем". Приведите пример из экономики (управление запасами) и рассчитайте среднюю стоимость для стационарной политики. Объясните связь с бесконечным горизонтом.

#### Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Укажите основное понятие, связанное со стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) в теме введения в стохастическое управление.	Стохастическое дифференциальное уравнение	УК-1
2	Найдите количество основных компонентов в управляемом процессе из темы введения в стохастическое управление.	Три	УК-1
3	Укажите тип связи между СДУ и уравнениями в частных производных (УрЧП) из темы введения в стохастическое управление.	Ито	УК-1
4	Назовите пример задачи управления ресурсами из темы введения в стохастическое управление.	Управление портфелем	УК-1
5	Укажите временной интервал для управляемых диффузионных процессов в теме динамического программирования.	Конечный	УК-2
6	Найдите тип уравнения Беллмана в теме динамического программирования.	Параболическое	УК-2
7	Укажите принцип, используемый в выводе уравнения Беллмана из темы динамического программирования.	Оптимальности	УК-2
8	Назовите задачу, решаемую в практике темы динамического программирования.	Управление инвестициями	УК-2
9	Укажите алгоритм для параболических уравнений из темы уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB).	Беллмана-Ховарда	ОПК-1
10	Найдите тип функции затрат в примерах темы HJB.	Квадратичная	ОПК-1
11	Укажите инструмент для численной реализации из темы HJB.	Python	ОПК-1
12	Назовите метод сравнения в теме принципа максимума Понтрягина.	HJB	ОПК-1
13	Укажите количество условий оптимальности в теме принципа максимума Понтрягина.	Два	ПК-1
14	Найдите пример задачи в теме принципа максимума Понтрягина.	Быстродействия	ПК-1
15	Укажите связь с детерминированным случаем из темы принципа максимума Понтрягина.	Перенос	ПК-1
16	Назовите постановку задачи в теме линейно-квадратичного управления.	LQG	ПК-2
17	Укажите метод решения в теме линейно-квадратичного управления.	HJB	ПК-2
18	Найдите приложение из темы линейно-квадратичного управления.	Робототехника	ПК-2
19	Укажите модель в теме модели Мертона.	Мертон	ПК-1
20	Найдите тип горизонта в теме модели Мертона.	Бесконечный	ПК-1