
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«25» мая 2026 г.
Протокол № 2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Прикладная математика для машинного обучения»**

Направление подготовки: 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Прикладное машинное обучение

Квалификация (степень) выпускника: магистр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 2 года

Год набора: 2026

**Москва
2026**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения.....	5
3. Тематический план.....	7
4. Содержание дисциплины (модуля).....	7
5. Учебно-методическое обеспечение	8
6. Материально-техническое обеспечение	8
7. Методические и оценочные материалы	10

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Прикладная математика для машинного обучения» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – магистратура по направлению 02.04.01 Математика и компьютерные науки, профиль Прикладное машинное обучение, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 810 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Прикладная математика для машинного обучения» позволяет заложить прочный математический фундамент, необходимый для понимания, разработки и критической оценки современных алгоритмов машинного обучения. Дисциплина (модуль) формирует способность формулировать прикладные задачи на строгом математическом языке, что критически важно для исследовательской и инженерной деятельности в области искусственного интеллекта.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки магистратуры по направлению 02.04.01 Математика и компьютерные науки, профиль Прикладное машинное обучение и входит в обязательную часть Блока 1.

Дисциплина (модуль) доступна к изучению на 1 курсе в 1 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у обучающихся глубокого понимания математических основ машинного обучения и развитие навыков применения аппарата линейной алгебры, анализа, оптимизации и теории вероятностей для постановки, анализа и обоснования алгоритмов машинного обучения.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- изучить ключевые концепции линейной алгебры, включая матричные разложения и спектральный анализ, и их применение в анализе данных;
- освоить методы многомерного анализа и построение градиентов сложных функций с использованием графов вычислений;
- научиться исследовать функции потерь на выпуклость и решать задачи оптимизации с ограничениями с помощью условий ККТ и метода Лагранжа;
- овладеть базовыми и стохастическими алгоритмами оптимизации, используемыми при обучении моделей;
- развить навыки применения теории вероятностей для вывода функций потерь и интерпретации моделей в байесовском контексте.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- ключевые концепции линейной алгебры: матричную алгебру, системы уравнений и основные матричные и спектральные разложения;
- основы многомерного анализа и оптимизации: градиент, дифференциал, граф вычислений, условия выпуклости, условия ККТ для условной оптимизации;
- базовые и продвинутые алгоритмы оптимизации: методы оптимизации первого порядка, методы оптимизации второго порядка, стохастические методы оптимизации;
- основы теории вероятностей: случайные величины, основные законы

распределения, математическое ожидание, дисперсию, формула Байеса.

уметь:

- выполнять матрично-тензорные вычисления и применять матричные разложения для решения задач анализа данных;
- вычислять производные сложных векторно-матричных функций с помощью аппарата дифференциалов и строить прямое и обратное распространение ошибки по графу вычислений;
- исследовать функции потерь на выпуклость и решать задачи оптимизации (безусловной и условной, включая формализм Лагранжа), обоснованно выбирая численные методы;
- применять теорию вероятностей: вычислять матожидания и ковариации, а также выводить стандартные функции потерь из вероятностных предположений.

владеть:

- навыками «векторизации» и тензорного дифференцирования для перевода алгоритмов в эффективные матричные операции и быстрого расчета градиентов;
- навыком математической постановки задач машинного обучения: способностью формулировать прикладные задачи как задачи математической оптимизации (с ограничениями или без) и интерпретировать их в вероятностных терминах;
- навыком аналитического обоснования алгоритмов машинного обучения с опорой на фундаментальные теоремы линейной алгебры, матанализа и теории вероятностей.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-2.	Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, совершенствовать и разрабатывать концепции, теории и методы	ОПК-2.1.	Знает основные математические модели и методы, используемые в естественных науках, включая статистическое моделирование, дифференциальные уравнения и численные методы, а также современные подходы к исследованию и анализу данных
		ОПК-2.2.	Умеет разрабатывать и адаптировать математические модели для решения конкретных проблем в естественных науках, проводить их анализ и верификацию, а также интерпретировать полученные результаты в контексте научных исследований
		ОПК-2.3.	Имеет практический опыт создания и исследования математических моделей в рамках научных проектов или исследований, включая участие в публикациях, конференциях или коллаборациях, где были разработаны и апробированы новые концепции и методы
ПК-2.	Способен математически корректно ставить естественнонаучные и прикладные задачи	ПК-2.1.	Знает основные методы и подходы к математическому моделированию, а также теоретические основы естественных и прикладных наук, необходимые для корректной формулировки задач
		ПК-2.2.	Умеет анализировать практические ситуации и формулировать на их основе

			математические модели, включая выбор адекватных методов решения и формулировку условий задачи
		ПК-2.3.	Имеет практический опыт в разработке и решении математических задач в рамках проектов или научных исследований, где были успешно поставлены и решены естественнонаучные и прикладные задачи
ПК-3.	Способен решать задачи профессиональной деятельности, формулировать результат, увидеть следствия полученного результата	ПК-3.1.	Знает основные принципы и методы решения задач профессиональной деятельности, а также способы формулирования и представления результатов, включая анализ последствий и их значимость в контексте проекта
		ПК-3.2.	Умеет применять математические и компьютерные методы для решения конкретных задач, формулировать четкие и обоснованные результаты, а также анализировать их последствия для дальнейших действий и решений
		ПК-3.3.	Имеет практический опыт в решении профессиональных задач, включая участие в проектах, где были получены результаты и проанализированы их следствия, что способствовало принятию обоснованных решений

3. Тематический план

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостояте льная работа	
		Лекции	Семинары (практичес кие занятия)			
1	Линейная алгебра	8	8		35	Домашнее задание
2	Математический анализ	15	15		56	Домашнее задание
3	Теория вероятностей	7	7		35	Домашнее задание
	Зачет с оценкой			4		
Итого:		30	30	4	126	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		190				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Линейная алгебра	Матрицы и вектора Решение системы линейных уравнений Матричные разложения
2	Математический анализ	Производная и градиент Выпуклый анализ Дифференциал Методы выпуклой оптимизации Продвинутые методы выпуклой оптимизации Граф вычислений Тензорные вычисления с помощью дифференциалов Адаптивные методы оптимизации Условная оптимизация
3	Теория вероятностей	Основы теории вероятностей Теория вероятностей в машинном обучении

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Математический анализ : учебное пособие / О.И. Воронин, В. А. Жулего, С. М. Демидов [и др.]. ; под ред. А. М. Попова. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. - 224 с. - ISBN 978-5-9729-1720-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2171787>.

2. Канарейкин, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / А. И. Канарейкин. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. - 136 с. - ISBN 978-5-9729-1976-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2171810>.

Дополнительная литература:

1. Линейная алгебра : учебное пособие / О. И. Воронин, В. А. Жулего, С. М. Демидов [и др.]. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2023. - 176 с. - ISBN 978-5-9729-1556-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2094434>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья,

Электронный документ

оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		

Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Прикладная математика для машинного обучения» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар – это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой

Электронный документ

занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал, использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Бонусные баллы — это оценки, которые студенты могут получить за выполнение дополнительных заданий.

Формат бонусных баллов позволяет студентам улучшить общую оценку по дисциплине (модулю) и стимулирует углубленное изучение материала.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Прикладная математика для машинного обучения»

Оценивание уровня учебных достижений обучающихся по дисциплине (модулю) осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме *зачета с оценкой*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину (модуль). Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи.
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Прикладная математика для машинного обучения» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	90%	15	Набор задач по темам недели
Зачет с оценкой	10%	1	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по дисциплине (модулю)

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Прикладная математика для машинного обучения»: $\langle 0,9 \times \text{Среднее за домашние задания} + 0,1 \times \text{Зачет с оценкой} \rangle$.

В рамках изучения дисциплины (модуля) возможно получение бонусных баллов.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1.

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ :

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

3. Пусть матрица $A \in M_{5,6}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных для каждого значения $x \in \mathbb{R}$.

4. Вычислить выражение:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \right)^{10}$$

(Указание: попробуйте посчитать вторую степень и выполнять умножение не слева направо, а в каком-нибудь другом порядке, чтобы заметить интересные закономерности).

5. Пусть матрица $J(\lambda) \in M_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид¹

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Доказать, что для любого k верна формула

$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1} \lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2} \lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1 \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

где $C_k^m = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. (Указание: тут можно либо воспользоваться свойствами биномиальных коэффициентов и индукцией по k , либо подумать в сторону бинома Ньютона).

6. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^m = 0$ для некоторого m . Показать, что $E + A$ и $E - A$ обратимы, где $E \in M_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица. (Указание: воспользуйтесь 6 эквивалентными свойствами невырожденности).²

¹Такая матрица называется Жордановой клеткой.

²Для этих матриц можно явно указать выражения для обратных матриц, для этого попробуйте подумать в сторону геометрической прогрессии, это может вам угадать ответ.

Домашнее задание 2.

1. Даны векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки и выразить все оставшиеся вектора через базисные.

2. Найдите базис векторного пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid Ay = 0\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Определите можно ли из системы векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

выбрать ФСР для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 & = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = 0 \end{cases}$$

4. Являются ли функции $1, \sin(x), \sin^2(x), \dots, \sin^n(x)$ линейно зависимыми?
5. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n . Показать, что системы

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\} \text{ и } \{1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n\}, \text{ где } a \in \mathbb{R}$$

являются базисами в $\mathbb{R}[x]_n$ и найти матрицы перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.

6. Найти ранг следующей матрицы при различных значениях параметра λ :

$$\begin{pmatrix} 7 - \lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19 - \lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13 - \lambda \end{pmatrix}$$

7. Пусть A и B – квадратные матрицы одного размера. Доказать, что

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & AB \\ B & B + B^2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

Домашнее задание 3.

Общая информация:

- Напомню, что стандартным скалярным произведением на $\mathbb{R}^n$ называется $(x, y) = x^t y$.
- Через $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ обозначается пространство многочленов степени не более n , то есть $\mathbb{R}[x]_{\leq n} = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.

Задачи:

1. В пространстве $\mathbb{R}^4$ задана билинейная форма

$$\beta(x, y) = 2x_2 y_1 + x_4 y_4$$

По ней построили квадратичную форму $Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. После этого Q ограничили на подпространство $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\}$. Найдите сигнатуру Q и сигнатуру ограничения Q на V .

2. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализируйте базис $1, x, x^2, x^3$.

3. Найти длины сторон, внутренние углы и площадь треугольника ABC в пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^4$ – векторное подпространство заданное следующим образом $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, где

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Задайте это подпространство в виде $U = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid Ay = 0\}$ для некоторой матрицы $A \in M_{m,4}(\mathbb{R})$. (Подумайте с чего эта задача дается на тему про скалярные произведения).

5. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ ($n > 1$), относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице? (Указание: билинейные формы можно задавать в разных базисах.)

Домашнее задание 4.

1. Найти предел

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(\cos x - 1)}$

2. Даны два семейства кривых на плоскости

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0) \quad \text{и} \quad y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$$

Покажите, что в любой точке пересечения любой кривой из первого семейства с любой кривой из второго семейства касательные этих кривых перпендикулярны.

3. Исследовать на экстремумы (то есть на локальные минимумы и максимумы) $y = (x + 1)^{10} e^{-x}$.

4. Посчитайте неопределенный интеграл

(a) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$

(b) $\int \sin^3 x dx$

5. Посчитайте определенный интеграл $\int_1^2 x \ln x dx$

6. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Домашнее задание 5.

1. Найти методом функции Лагранж условные критические точки функции $z = xy + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$ с областью определения $x > 0$ и $y > 0$,

(a) при условии, что $xy = 1$.

(b) при условии, что $xy \leq 1$.

(c) при условии, что $xy \geq 1$.

2. Найти методом функции Лагранж условные критические точки функции $z = \frac{1}{1+(x+y)^2}$ при условии $xy = 0$.

3. Пусть $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ задана по правилу $f(x) = x$. Будем рассматривать f как элемент $L_2[-\pi, \pi]$, со скалярным произведением $(g, h) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x) dx$.

(a) Покажите, что f ортогонально функциям $\cos(kx)$ при $k \in \mathbb{Z}$ и $k \geq 0$.

(b) Найдите разложение $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ посчитав коэффициенты Фурье a_k .

(c) Найдите длины векторов $\|f\|_2$ и $\|a_k\|_2$. Зная эти длины, найдите сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Домашнее задание 6.

1. Пусть ξ – случайная величина такая, что $P(\xi = -1) = \frac{1}{4}$ и $P(\xi = 2) = \frac{1}{4}$ и для любых точек $a, b \in [0, 1]$ с условием $a < b$ верно $P(\xi \in [a, b]) = \frac{b-a}{2}$. Нарисуйте график функции распределения $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ .
2. В лотерее на 1% билетов выпадет выигрыш в 200 рублей, на 0.01% билетов выпадает выигрыш в 1000 рублей, а остальные билеты без выигрыша. Найдите средний выигрыш в этой лотерее (в расчете на один билет), то есть среднее арифметическое выигрышей всех билетов. Подумайте, как это сформулировать в терминах случайных величин и математического ожидания.
3. В ряд расположены m предметов. Случайно выбираются k предметов, $k < m$. Случайная величина X равна количеству таких предметов i , что i выбран, а все его соседи не выбраны. Найдите математическое ожидание X .
4. В равностороннем треугольнике ABC площади 1 выбираем точку M . Найти математическое ожидание площади ABM .
5. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ с плотностью $p(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$.
6. Пусть $P_\xi(x) = P(\xi = x)$ и $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$.
 - (a) Показать, что для $a > 0$ и $-\infty < b < \infty$

$$P_{a\xi+b}(x) = P_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \text{и} \quad F_{a\xi+b}(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

- (b) Найдите функцию распределения $F_{\xi^2}(y)$ (выразите ее через F_ξ и P_ξ).

Домашнее задание 7.

1. Пусть ξ, η – независимые случайные величины имеющие показательное распределение, то есть

$$p_\xi(x) = p_\eta(x) = \lambda e^{-\lambda x} \theta(x)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Найти следующие плотности

$$p_{\xi, \xi+\eta}(x, y) \quad \text{и} \quad p_{\xi|\xi+\eta=z}(x)$$

Важно: для совместной плотности укажите область в которой она равна нулю.

2. Используя характеристические функции и их свойства, найти распределение суммы двух независимых нормальных случайных величин с параметрами (a_1, σ_1^2) и (a_2, σ_2^2) .
3. Пусть ξ и η независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Найти плотность величины $\chi = \xi^2 + \eta^2$.
4. Случайные величины X и Y независимы. X имеет распределение Лапласа с плотностью $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, а Y – равномерное на отрезке $[1, 2]$.
 - (a) Найдите плотность распределения случайной величины $-2Y$.
 - (b) Найдите плотность распределения случайной величины $X - 2Y$.
5. Игрок приходит в казино с k монетами. Каждый кон он выигрывает с вероятностью p и получает одну монету и проигрывает с вероятностью $q = 1 - p$ и отдает одну монету. Игра заканчивается если игрок потеряет все монеты или если он наберет предельную сумму выигрыша N . Найдите среднюю продолжительность игры в зависимости от k .

Домашнее задание для получения бонусных баллов

Линейная алгебра

1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^T y$ заданы векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Для семейства v_1, v_2, v_3 построили двойственное семейство w_1, w_2, w_3 удовлетворяющее свойствам

$$(w_i, v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Найдите во сколько раз объем параллелепипеда на векторах v_1, v_2, v_3 больше объема параллелепипеда на векторах w_1, w_2, w_3 .

2. Найти SVD разложение для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Математический анализ

1. Разложите в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

и пользуясь этим разложением найдите сумму ряда

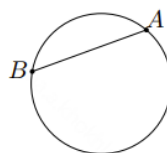
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

2. Пусть $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ – множество квадратных симметричных матриц размера n с положительными собственными значениями. Пусть $P \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ и $Q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. И пусть $X_1, \dots, X_d \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ – фиксированные матрицы. Найдите уравнения, задающие критические точки для следующей функции

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \text{tr}(X_i^T P X_i Q) - m \ln \det(P) - n \ln \det(Q)$$

Теория вероятности

1. На плоскости нарисована окружность радиуса один. На ней равномерно и независимо выбирают две точки A и B . Найдите среднее расстояние между точками A и B .



2. Игральная кость последовательно переключается с одной грани на любую другую из четырех соседних. Это делается равномерно и независимо от предыдущих действий. В начале кость находилась числом «6» вверх. Рассмотрим вероятность

$$p(t) = P(\text{«На } t\text{-ом шаге кость находится гранью «6» вверх»})$$

Найдите предел $p(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Линейная алгебра

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

2. Для матрицы

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Найдите ее ранг при всех возможных значениях $x \in \mathbb{R}$.

3. Посчитайте характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Найдите обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Даны векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки и выразить все оставшиеся вектора через базисные.

6. Найдите базис векторного пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid Ay = 0\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Пусть $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$

Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2 .

8. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами: (а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (б) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Можно ли эти матрицы диагонализировать в каком-нибудь базисе?

9. Найдите сигнатуру следующей квадратичной формы:

$$Q(x, y, z) = 5x^2 - 6xy - 10xz - 8y^2 + 6yz + 5z^2$$

10. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализируйте базис $1, x, x^2, x^3$.

11. «Решите» систему методом наименьших квадратов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -9 \end{array} \right)$$

12. Найти сингулярное разложение следующих матриц

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Вычислите определитель матрицы.	12	ПК-2
2.	Функция $f(x) = \sin(\ln(x))$. Чему равна её первая производная в точке $x = 1$?	1	ПК-2
3.	Вектор $\mathbf{u} = (7, 24)$. Чему равна его L_2 -норма (евклидова)?	25	ПК-2
4.	Случайная величина X имеет распределение Бернулли с $p = 0.3$. Чему равна вероятность $P(X = 1)$? Введите ответ в виде число от 0 до 1.	0.3/0,3	ПК-2
5.	Даны точки $(1, 2)$ и $(4, 6)$. Вычислите Манхэттенское расстояние между ними (L_1 -метрику).	7	ПК-2
6.	Найдите косинус угла между векторами $\mathbf{a} = (2, 1)$ и $\mathbf{b} = (1, -2)$.	0	ПК-3

7.	Случайная величина Y равномерно распределена на $[0, 10]$. Чему равна $P(Y < 5)$? Введите ответ в виде число от 0 до 1.	0.5/0,5	ПК-3
8.	Матрица $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Чему равен след матрицы?	5	ПК-3
9.	Найдите ранг матрицы $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.	2	ПК-3
10.	Найдите частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ для $f(x, y) = x^2y + \sin(y)$ в точке $(x, y) = (-5, 2)$	-20	ПК-3
11.	Дана функция: $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x$ Найдите вторую производную $f''(x)$ и вычислите её значение в точке $x = 1$.	32	ПК-3
12.	Для функции: $f(x, y) = 2x^3 + 3y^2$ Найдите матрицу Гессе и запишите получившуюся диагональ в точке $(x, y) = (1, 1)$.	(12, 6)	ПК-3
13.	Дана матрица: $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ Найдите все собственные значения матрицы A . Запишите ответ через запятую по возрастанию собственных значений.	-1, 2, 7/ -1,2,7	ПК-2
14.	Дана система уравнений: $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - 2y + 4z = -2 \\ -x + 0.5y - z = 0 \end{cases}$ Решите систему уравнений методом Гаусса. Ответ выведите в форме значения вектора (x, y, z)	(1,-2,2)	ПК-3
15.	Вычислите произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. В качестве ответа запишите вектор-главную диагональ получившейся матрицы.	(19, 50)	ПК-3
16.	Найдите обратную матрицу для $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$. В качестве ответа запишите вектор-главную диагональ получившейся матрицы.	(0.5, 0.1)/(0.5, 0.1)/(0.5, 0.1)/(0.5, 0.1)	ПК-3
17.	Честная (равновероятная) монета подбрасывается 3 раза. Пусть I – индикатор события A : «выпало ровно два орла». Найдите математическое ожидание $E[I]$.	0.375/0,375	ПК-3
18.	Для функции $f: R^2 \rightarrow R$ заданной по формуле $f(x, y) = \sin(xy) + x^2 \cos(y)$ найдите градиент в точке $(x, y) = (0, 1)$.	(1, 0)	ПК-2

19.	Какая из матриц является вырожденной? А) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Б	ПК-2
20.	Расположите этапы вычисления градиента функции $f(x, y)$: А. Найти частные производные по x и y. Б. Записать функцию $f(x, y)$ в аналитическом виде. В. Объединить частные производные в вектор. Ответ запишите в виде последовательности букв без пробелов и знаков препинания, пример - ВБА	БАВ	ОПК-2
21.	Пусть V — вещественное линейное пространство. Отображение $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если $\forall x, y, z \in V$ выполнено (выберите все верные аксиомы): А) $(x + y, x + y) = (x, y)$ Б) $(x, y) \geq 0$ $(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = -y$ В) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ Г) $(x, y) = (y, x)$ Д) $(x + y, z) = x + (y, z)$ Е) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ Ж) $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ З) $(x, x) \geq 0$ $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$	ВГЕЗ/ВГЗЕ/В ЕГЗ/ВЕЗГ/ВЗ ГЕ/ВЗЕГ/ГВЕ З/ГВЗЕ/ГЕВЗ/ ГЕЗВ/ГЗВЕ/Г ЗЕВ/ЕВГЗ/ЕВ ЗГ/ЕГВЗ/ЕГЗ В/ЕЗВГ/ЕЗГВ /ЗВГЕ/ЗВЕГ/З ГВЕ/ЗГЕВ/ЗЕ ВГ/ЗЕГВ	ОПК-2
22.	Для задачи оптимизации функции $z = xy + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$ с областью определения $x > 0$ и $y > 0$ при условии $xy = 1$, функция Лагранжа имеет вид А) $\mathcal{L} = xy + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$ Б) $\mathcal{L} = xy - 1 - \lambda \left(xy + \frac{4}{x} + \frac{9}{y} \right)$ В) $\mathcal{L} = xy + \frac{4}{x} + \frac{9}{y} + \lambda(xy - 1) - \alpha x - \beta y$ Г) $\mathcal{L} = \alpha \left(xy + \frac{4}{x} + \frac{9}{y} \right) - \lambda(xy - 1)$	Г	ОПК-2