

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол № 2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Методы выпуклой оптимизации»**

Направление подготовки: 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Продуктовая аналитика

Квалификация (степень) выпускника: магистр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 2 года

Год набора: 2025

**Москва
2025**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения.....	5
3. Тематический план.....	7
4. Содержание дисциплины (модуля).....	7
5. Учебно-методическое обеспечение	8
6. Материально-техническое обеспечение	8
7. Методические и оценочные материалы	10

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Методы выпуклой оптимизации» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – магистратура по специальности 02.04.01 Математика и компьютерные науки, профиль Продуктовая аналитика, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 810 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Методы выпуклой оптимизации» обеспечивает фундаментальную математическую основу для разработки и анализа алгоритмов машинного обучения, обработки данных, экономики и инженерных систем.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки магистратуры по направлению 02.04.01 Математика и компьютерные науки, профиль Продуктовая аналитика и входит в часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 или 2 курсе во 2, 3 или 4 семестре на выбор, доступна для прохождения при условии успешного завершения дисциплины (модуля) «Основы Python» и общеуниверситетского факультатива «Математика в DS».

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование системного понимания теории и методов выпуклой оптимизации, а также практических навыков формализации, анализа и численного решения прикладных оптимизационных задач.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- изучить классификацию задач математической оптимизации и освоить аппарат выпуклого анализа, включая свойства выпуклых множеств и функций, а также условия оптимальности;
- освоить основы теории двойственности (лагранжевой и конической) и научиться применять её для анализа и интерпретации решений оптимизационных задач;
- научиться корректно формализовывать прикладные задачи в виде задач выпуклой оптимизации и определять их класс для выбора адекватного метода решения;
- освоить численные методы решения задач выпуклой оптимизации, включая методы первого и второго порядка, проксимальные методы и методы решения задач с ограничениями (штрафные функции, множители Лагранжа, ADMM);
- сформировать практические навыки реализации алгоритмов оптимизации, использования современных солверов, диагностики сходимости и анализа полученных решений.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- классификацию задач математической оптимизации и критерии их выпуклости;
- аппарат выпуклого анализа: свойства выпуклых множеств и функций, условия оптимальности;
- основы теории двойственности (лагранжева и коническая);
- принципы работы и области применения основных семейств численных методов.

уметь:

- формализовать прикладные проблемы в виде корректной постановки оптимизационной задачи;

- анализировать и идентифицировать класс задачи для обоснованного выбора метода решения;
- применять современные программные решатели (солверы) для выпуклых и нелинейных задач;
- использовать методы первого порядка (включая стохастические) для задач машинного обучения.

владеть:

- навыком реализации базовых алгоритмов: градиентный спуск, метод Ньютона, проксимальные методы;
- навыками диагностики сходимости итерационных методов и настройки их параметров;
- навыком решения задач с ограничениями методами штрафов, множителей Лагранжа и ADMM;
- навыками анализа полученных решений и проверки условий оптимальности.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-6.	Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1.	Знает основные методы самооценки и анализа своей деятельности, а также принципы управления временем и целеполагания
		УК-6.2.	Умеет ставить реалистичные и достижимые цели, определять приоритеты в своей деятельности, а также разрабатывать и внедрять планы по совершенствованию своих навыков и компетенций на основе полученной самооценки
		УК-6.3.	Имеет практический опыт применения методов самооценки в своей профессиональной деятельности, включая участие в тренингах, семинарах и проектах, направленных на развитие личной эффективности и профессионального роста
ОПК-2.	Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, совершенствовать и разрабатывать концепции, теории и методы	ОПК-2.1.	Знает основные математические модели и методы, используемые в естественных науках, включая статистическое моделирование, дифференциальные уравнения и численные методы, а также современные подходы к исследованию и анализу данных
		ОПК-2.2.	Умеет разрабатывать и адаптировать математические модели для решения конкретных проблем в естественных науках, проводить их анализ и верификацию, а также интерпретировать полученные результаты в контексте научных исследований
		ОПК-2.3.	Имеет практический опыт создания и исследования математических моделей в

			рамках научных проектов или исследований, включая участие в публикациях, конференциях или коллаборациях, где были разработаны и апробированы новые концепции и методы
ПК-3.	Способен решать задачи профессиональной деятельности в области продуктовой аналитики, формулировать результаты анализа и выявлять последствия полученных данных для принятия обоснованных решений и оптимизации продуктов	ПК-3.1.	Знает методы и инструменты продуктовой аналитики
		ПК-3.2.	Умеет применять аналитические инструменты и программное обеспечение для обработки и визуализации данных, а также формулировать выводы на основе проведенного анализа
		ПК-3.3.	Имеет опыт работы над реальными проектами в области продуктовой аналитики, включая анализ пользовательского поведения и оптимизацию продуктов на основе полученных данных
ПК-4.	Способен публично представлять собственные и известные научные результаты	ПК-4.1.	Знает основные принципы эффективного публичного выступления, методы визуализации данных и основные требования к научным презентациям, включая структуру и содержание
		ПК-4.2.	Умеет четко и логично формулировать свои научные результаты, адаптируя их для различных аудиторий, а также использовать визуальные средства для улучшения восприятия информации
		ПК-4.3.	Имеет практический опыт участия в научных конференциях, семинарах или других мероприятиях, где успешно представлял свои и известные научные результаты, получая обратную связь и взаимодействуя с аудиторией

3. Тематический план

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостояте льная работа	
Лекции	Семинары (практичес кие занятия)					
1	Основы выпуклого анализа для построения методов оптимизации	14	14		54	Домашние задания
2	Численные методы оптимизации для решения прикладных задач	16	16		72	Домашние задания
	<i>Зачет</i>			4		Проект
Итого:		30	30	4	126	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		190				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Основы выпуклого анализа для построения методов оптимизации	Введение в методы оптимизации. Примеры постановок задач. Выпуклые множества. Выпуклые функции и способы их построения. Постановки задач выпуклой оптимизации. Условия оптимальности. Введение в теорию двойственности. Коническая двойственность.
2	Численные методы оптимизации для решения прикладных задач	Введение в численные методы и типизация солверов для решения оптимизационных задач. Градиентный спуск. Ускоренные методы первого порядка. Метод Ньютона и квазиньютоновские методы. Стохастические методы первого порядка и обучение нейросетей. Проксимальные методы. Методы штрафов и ADMM. Методы оптимизации и параллельные вычисления.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Выпуклая оптимизация : учебник для вузов / М. А. Горский, И. Ю. Выгодчикова, Д. А. Максимов, М. А. Халиков. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 82 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-17782-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/568662>.

2. Терсенов, А. С. Лекции по прикладному функциональному анализу : учебник для вузов / А. С. Терсенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 83 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18812-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/568927>.

3. Сухарев, А. Г. Методы оптимизации : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 367 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3859-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/507818>.

Дополнительная литература:

1. Максимова, О. Д. Основы математического анализа: неравенства и оценки : учебное пособие для вузов / О. Д. Максимова. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 185 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08224-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/541118>.

2. Кочегурова, Е. А. Теория и методы оптимизации : учебник для вузов / Е. А. Кочегурова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 133 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10090-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561181>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		

Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Методы выпуклой оптимизации» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания, проект, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Проект – исследовательская работа по дисциплине (модулю) и презентация результатов.

Для успешной подготовки к проекту рекомендуется: четко определить цели и задачи проекта; составить план работы, разбив проект на этапы с указанием сроков выполнения каждого из них; использовать разнообразные источники информации и инструменты для исследования темы; регулярно проверять прогресс и вносить коррективы в план, если это необходимо.

Бонусные баллы — это оценки, которые студенты могут получить за выполнение дополнительных заданий.

Формат бонусных баллов позволяет студентам улучшить общую оценку по дисциплине (модулю) и стимулирует углубленное изучение материала.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Методы выпуклой оптимизации»

Оценивание уровня учебных достижений обучающихся по дисциплине (модулю) осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме *зачета*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину (модуль). Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Методы выпуклой оптимизации» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	50%	6	Набор задач по темам недели
Зачет	50%	1	Проект – исследовательская работа по дисциплине (модулю) и презентация результатов

В рамках изучения дисциплины (модуля) возможно получение бонусных баллов.

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Методы выпуклой оптимизации»: « $0,5 \times$ среднее за домашние задания + $0,5 \times$ зачет».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1.

ЗАДАЧА 1	<p>2 балла</p> <p>Докажите, что эта функция выпукла:</p> $f(x, y, z) = z \log \left(e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}} \right) + (z - 2)^2 + e^{\frac{1}{x+y}}$ <p>где функция $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет область определения, определённую как:</p> $\text{dom } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y > 0, z > 0\}.$
ЗАДАЧА 2	<p>1 балл</p> <p>Центр масс тела является важным понятием в физике (механике). Для системы материальных точек с массами m_i и координатами x_i, центр масс определяется как:</p> $x_c = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{\sum_{i=1}^k m_i}$ <p>Центр масс тела не всегда лежит внутри тела. Например, центр масс бублика находится в его отверстии. Докажи, что центр масс системы материальных точек лежит в выпуклой оболочке множества этих точек.</p>
ЗАДАЧА 3	<p>1 балл</p> <p>Докажи, что $\text{conv}\{xx^\top : x \in \mathbb{R}^n, \ x\ = 1\} = \{A \in \mathbb{S}_+^n : \text{tr}(A) = 1\}$.</p>
ЗАДАЧА 4	<p>1 балл</p> <p>Докажи, что множество $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x_1} \leq x_2\}$ является выпуклым.</p>

ЗАДАЧА 5

1 балл

Рассмотрим функцию $f(x) = x^d$, где $x \in \mathbb{R}_+$. Заполни следующую таблицу + или -. Объясни свои ответы (с доказательствами).

d	Выпуклая	Вогнутая	Строго выпуклая	μ -сильно выпуклая
$-2, x \in \mathbb{R}_{++}$				
$-1, x \in \mathbb{R}_{++}$				
0				
0.5				
1				
$\in (1; 2)$				
2				
> 2				

ЗАДАЧА 6

1 балл

Докажи, что функция энтропии, определённая как

$$f(x) = - \sum_{i=1}^n x_i \log(x_i),$$

с $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}_{++}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, является строго вогнутой.

ЗАДАЧА 7

2 балла

Докажи, что максимум выпуклой функции f над многогранником $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$ достигается в одной из его вершин, т. е.

$$\sup_{x \in P} f(x) = \max_{i=1, \dots, k} f(v_i).$$

Более сильное утверждение: максимум выпуклой функции над замкнутым ограниченным выпуклым множеством достигается в крайней точке, т. е. точке в множестве, которая не является выпуклой комбинацией любой другой точки в множестве (тебе не нужно его доказывать). *Подсказка:* Предположи, что утверждение неверно, и используй неравенство Йенсена.

ЗАДАЧА 8

1 балл

Докажи, что два определения μ -сильно выпуклых функций эквивалентны:

- $f(x)$ является μ -сильно выпуклой \iff для любых $x_1, x_2 \in S$ и $0 \leq \lambda \leq 1$ для некоторого $\mu > 0$:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x_1 - x_2\|^2$$

- $f(x)$ является μ -сильно выпуклой \iff существует $\mu > 0$ такое, что функция $f(x) - \frac{\mu}{2} \|x\|^2$ является выпуклой.

Домашнее задание 2.

ЗАДАЧА 1

1 балл

Простой пример

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} \\ \text{s.t. } (x - 2)(x - 4) &\leq 0 \end{aligned}$$

1. Найдите допустимое множество, оптимальное значение и оптимальное решение.
2. Постройте график функции $x^2 + 1$ в зависимости от x . На том же графике покажите допустимое множество, оптимальную точку и значение, а также постройте график лагранжиана $L(x, \mu)$ в зависимости от x для нескольких положительных значений μ . Проверьте свойство нижней границы ($p^* \geq \inf_x L(x, \mu)$ для $\mu \geq 0$).
3. Пусть $p^*(u)$ обозначает оптимальное значение следующей задачи как функции параметра u :

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} \\ \text{s.t. } (x - 2)(x - 4) &\leq u \end{aligned}$$

Постройте $p^*(u)$. Проверьте, что $\frac{dp^*(0)}{du} = -\mu^*$.

ЗАДАЧА 2

2 балла

Найдите явное решение следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} c^\top x &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } 1^\top x &= 1, \\ x &\succeq 0 \end{aligned}$$

Эта задача может быть рассмотрена как самый простой пример задачи оптимизации портфеля.

ЗАДАЧА 3

2 балла

Покажите, что следующая задача имеет единственное решение и найдите его:

$$\begin{aligned} \langle C^{-1}, X \rangle - \log \det X &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^{n \times n}} \\ \text{s.t. } \langle Xa, a \rangle &\leq 1, \end{aligned}$$

где $C \in \mathbb{S}_{++}^n, a \in \mathbb{R}^n \neq 0$. Ответ не должен включать обращение матрицы C .

ЗАДАЧА 4

2 балла

Найдите явное решение следующей задачи квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} c^\top x &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } (x - x_c)^\top A(x - x_c) &\leq 1, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{S}_{++}^n, c \neq 0, x_c \in \mathbb{R}^n$.

ЗАДАЧА 5

2 балла

Рассмотрим задачу наименьших квадратов с ограничениями равенства:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } Cx &= d, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ с $\text{rank} A = n$, и $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ с $\text{rank} C = k$. Запишите условия ККТ и выведите выражения для решения x^* .

ЗАДАЧА 6

1 балл

Интерпретация условий ККТ в терминах опорной гиперплоскости

Рассмотрим **выпуклую** задачу без ограничений равенства:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = [1, m] \end{aligned}$$

Предположим, что $\exists x^* \in \mathbb{R}^n, \mu^* \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяют условиям ККТ:

$$\nabla_x L(x^*, \mu^*) = \nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$$

$$\mu_i^* \geq 0, \quad i = [1, m]$$

$$\mu_i^* f_i(x^*) = 0, \quad i = [1, m]$$

$$f_i(x^*) \leq 0, \quad i = [1, m]$$

Покажите, что $\nabla f_0(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0$ для всех допустимых x . Иными словами, условия ККТ подразумевают простой критерий оптимальности или $\nabla f_0(x^*)$ определяет опорную гиперплоскость к допустимому множеству в точке x^* .

Домашнее задание 3.

1. СХОДИМОСТЬ ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА В НЕВЫПУКЛОМ ГЛАДКОМ СЛУЧАЕ [3 БАЛЛА]

Мы не будем делать никаких предположений о выпуклости функции f . Мы покажем, что градиентный спуск достигает ε -стационарной точки x , такой, что $\|\nabla f(x)\|_2 \leq \varepsilon$, за $O(1/\varepsilon^2)$ итераций. Важное замечание: вы можете использовать здесь липшицеву параболическую верхнюю оценку

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|_2^2 \quad \text{для всех } x, y. \quad (1)$$

- Подставьте $y = x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k)$, $x = x^k$ в уравнение (1), чтобы показать, что

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \left(1 - \frac{L\alpha}{2}\right)\alpha \|\nabla f(x^k)\|_2^2.$$

- Используйте $\alpha \leq 1/L$ и преобразуйте предыдущий результат, чтобы получить

$$\|\nabla f(x^k)\|_2^2 \leq \frac{2}{\alpha} (f(x^k) - f(x^{k+1})).$$

- Просуммируйте предыдущий результат по всем итерациям от $1, \dots, k + 1$, чтобы получить

$$\sum_{i=0}^k \|\nabla f(x^i)\|_2^2 \leq \frac{2}{\alpha} (f(x^0) - f^*).$$

- Дайте нижнюю оценку сумме в предыдущем результате, чтобы получить

$$\min_{i=0, \dots, k} \|\nabla f(x^i)\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha(k+1)} (f(x^0) - f^*)},$$

что устанавливает желаемую скорость $O(1/\varepsilon^2)$ для достижения ε -стационарности.

2. КАК СХОДИТСЯ ГРАДИЕНТНЫЙ СПУСК В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ И РАЗМЕРНОСТИ [7 БАЛЛОВ]

Исследуйте, как количество итераций, необходимое для сходимости градиентного спуска, зависит от следующих двух параметров: числа обусловленности $\kappa \geq 1$ функции, которую мы оптимизируем, и размерности n пространства переменных, по которым мы оптимизируем.

Для этого при заданных параметрах n и κ случайно сгенерируйте квадратичную задачу размера n с числом обусловленности κ и запустите на ней градиентный спуск с заранее заданной фиксированной точностью. Измерьте число итераций $T(n, \kappa)$, которое потребовалось методу для сходимости (успешного завершения по критерию останова).

Рекомендация: самый простой способ сгенерировать случайную квадратичную задачу размера n с заданным числом обусловленности κ следующий. Удобно взять диагональную матрицу $A \in S_n^{++}$ в виде $A = \text{Diag}(a)$, где диагональные элементы случайно выбираются из интервала $[1, \kappa]$ и удовлетворяют $\min(a) = 1, \max(a) = \kappa$. В качестве вектора $b \in \mathbb{R}^n$ можно взять вектор со случайными компонентами. Диагональные матрицы удобны для рассмотрения, поскольку их можно эффективно обрабатывать даже при больших значениях n .

Зафиксируйте определённое значение размерности n . Итерируйте по различным числам обусловленности κ на сетке и постройте зависимость $T(n, \kappa)$ от κ . Поскольку квадратичная задача каждый раз генерируется случайно, повторите этот эксперимент несколько раз. В результате для фиксированного значения n вы должны получить семейство кривых, показывающих зависимость $T(n, \kappa)$ от κ . Изобразите все эти кривые в одном цвете для ясности (например, в красном).

Увеличьте значение n и повторите эксперимент. Вы должны получить новое семейство кривых $T(n', \kappa)$ от κ . Изобразите все эти кривые в одном цвете, но отличающемся от предыдущего (например, в синем).

Повторите эту процедуру несколько раз для других значений n . В итоге вы должны получить несколько разных семейств кривых — некоторые красные (соответствующие одному значению n), некоторые синие (соответствующие другому значению n), некоторые зелёные и так далее.

Обратите внимание, что имеет смысл перебирать значения размерности n по логарифмической сетке (например, $n = 10, n = 100, n = 1000$ и так далее). Используйте следующий критерий остановки: $\|\nabla f(x_k)\|_2^2 \leq \varepsilon \|\nabla f(x_0)\|_2^2$ при $\varepsilon = 10^{-5}$. В качестве начальной точки возьмите $x_0 = (1, \dots, 1)^T$.

Какие выводы можно сделать из полученного рисунка?

Примерное описание задания и критерии оценивания к проекту

Описание задания:

Необходимо выбрать прикладную задачу (из машинного обучения, экономики, логистики, обработки сигналов, финансов или другой области) и выполнить её полный анализ и решение с использованием методов выпуклой оптимизации.

Проект должен включать две взаимосвязанные части:

Часть 1. Теоретический анализ задачи

1. Формализация задачи

- Корректная математическая постановка задачи оптимизации.
- Определение переменных, целевой функции и ограничений.

2. Анализ выпуклости

• Доказательство выпуклости (или условий, при которых задача является выпуклой).

- Определение типа задачи (LP, QP, SOCP, SDP, unconstrained convex и т.д.).

3. Условия оптимальности

- Вывод необходимых и/или достаточных условий оптимальности.
- Запись условий ККТ (если применимо).

4. Двойственная задача

- Построение лагранжевой функции.
- Вывод двойственной задачи.
- Интерпретация двойственных переменных.
- Анализ сильной/слабой двойственности.

Часть 2. Численное решение и анализ

1. Выбор численного метода

- Обоснование выбора метода (градиентный спуск, ускоренные методы, Ньютон, стохастические методы, проксимальные методы, ADMM и др.).
- Анализ вычислительной сложности.

2. Реализация решения

- Реализация как минимум одного метода вручную (без использования готового солвера как «чёрного ящика»).
- Решение задачи с помощью современного солвера (например, CVXPY, MOSEK, Gurobi и др.) для сравнения.

3. Экспериментальный анализ

- Исследование сходимости метода.
- Анализ влияния гиперпараметров (шаг обучения, регуляризация и т.д.).
- Сравнение методов по скорости сходимости и устойчивости.

4. Расширение задачи

- Добавление ограничений или регуляризации.
- Решение расширенной задачи методом штрафов или ADMM (если применимо).

5. Выводы

- Интерпретация полученного решения.
- Проверка выполнения условий оптимальности.
- Практическая интерпретация результата.

Формат сдачи:

- Отчёт (10–20 страниц) с математическими выкладками
- Код с комментариями
- Презентация для защиты
- Демонстрация работы алгоритма

Критерии оценивания проекта:

- Корректность и строгость математической постановки задачи
- Обоснованность анализа выпуклости и классификации задачи
- Правильность вывода условий оптимальности и двойственной задачи
- Аргументированность выбора численного метода
- Корректность и самостоятельность реализации алгоритмов
- Глубина анализа сходимости и экспериментальных результатов
- Сравнение методов и интерпретация различий
- Проверка выполнения условий оптимальности
- Качество кода и воспроизводимость результатов
- Логичность, структурированность и ясность изложения
- Качество защиты проекта и ответы на вопросы

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Назовите способ совершенствования собственной деятельности в матричном дифференцировании.	обратная связь/итеративный подход	УК-6
2.	Укажите условие оптимальности для выпуклой функции в математической модели.	ККТ/условия Каруша–Куна–	ОПК-2

		Таккера	
3.	Укажите метрику для оценки эффекта линейного программирования в продуктовой аналитике.	точность/оптимальность решения	ПК-3
4.	Назовите элемент разбора кейсов для демонстрации научных результатов в градиентном спуске.	слайды/демо	ПК-4
5.	Укажите инструмент для оценки эффективности работы над условиями Каруша–Куна–Таккера.	чек-лист/журнал прогресса	УК-6
6.	Назовите метод второго порядка в детерминированной оптимизации для новой модели.	Ньютона/квази-Ньютоновский	ОПК-2
7.	Назовите способ формулирования результатов анализа данных в Frank–Wolfe методе.	отчет/дашборд	ПК-3
8.	Укажите способ презентации альтернативных методов второго порядка.	кейс-стади/видео	ПК-4
9.	Укажите метод самооценки для определения приоритетов в анализе выпуклости функций.	рефлексия/саморефлексия	УК-6
10.	Укажите концепцию валидации субградиентных методов для негладких функций.	кросс-валидация/бейзлайн	ОПК-2
11.	Укажите последствие выявленных данных для оптимизации продукта в проксимальных методах.	улучшение эффективности/снижение затрат	ПК-3
12.	Назовите инструмент для публичного разбора кейсов стохастической оптимизации.	Jupyter Notebook/видео-конференция	ПК-4
13.	Назовите критерий для самооценки в применении градиентного спуска.	соответствие стандартам/анализ ошибок	УК-6
14.	Назовите способ масштабирования стохастического градиентного спуска в модели.	облачные сервисы/распределенные вычисления	ОПК-2
15.	Назовите задачу в оптимизации для принятия обоснованных решений в стохастических методах.	дизайн эксперимента/прогнозирование	ПК-3
16.	Укажите формат публичного представления результатов анализа выпуклости.	презентация/постер	ПК-4
17.	Укажите этап в оптимизации для реализации приоритетов на основе самооценки сходимости.	планирование/корректировка плана	УК-6
18.	Укажите метод тестирования сходимости адаптивных оптимизаторов.	unit-тесты/интеграционные тесты	ОПК-2
19.	Укажите инструмент для анализа данных в методах снижения дисперсии.	Python/NumPy	ПК-3
20.	Укажите метод визуализации результатов в современных практиках оптимизации.	диаграммы/графики	ПК-4