УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Линейная алгебра»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Разработка*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2024*

Москва
2024

Электронный документ

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Разработка, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) дает развитие аналитического мышления, навыков работы с математическими моделями и понимания пространственных структур, что является основой для дальнейшего изучения более сложных математических и компьютерных дисциплин.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Разработка и входит в обязательную часть Блока 1.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у студентов основных понятий и методов линейной алгебры, необходимых для решения задач в области математики и компьютерных наук.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- знание основных концептов линейной алгебры такие, как матричная алгебра, векторные пространства, линейная зависимость, определители, линейные операторы, скалярные произведения;
- знание основных алгоритмов решения задач линейной алгебры такие, как метод Гаусса решения систем линейных уравнений, методы поиска обратной матрицы, диагонализация, ортогонализация Грамма-Шмидта;
- понимание геометрической интерпретации основных концептов и утверждений;
- понимание матричной и векторной форм записи;
- умение решать системы линейных уравнений с помощью матричных методов (метод Гаусса, метод Крамера);
- проведение операций с матрицами (сложение, умножение, поиск обратной матрицы, транспонирование);
- умение работать с векторными пространствами и его характеристиками (базис, размерность);
- умение находить собственные значения и вектора и использует их для диагонализации матрицы;
- умение вычислять скалярные произведения векторов и нормы вектором в Евклидовом пространстве;
- применение метода ортогонализации Грамма-Шмидта;
- развитие логики доказательств основных теорем курса, имея доказательство перед глазами;
- применение теоремы из курса для доказательств несложных утверждений.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	**Содержание компетенции**	**Индикатор компетенции**	**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)**
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализация математических моделей в профессиональной деятельности
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных	ПК-1.1.	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических наук, программирования и информационных технологий
		ПК-1.2.	Умеет находить, формулировать и решать

	наук		стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинарские (практические занятия)			
1	Системы линейных уравнений	7	7		22	Домашнее задание
2	Векторные пространства	8	8		22	Домашнее задание
3	Геометрия евклидовых пространств	8	8		22	Домашнее задание Контрольная работа
4	Матричные разложения и приложения линейной алгебры	7	7		20	Домашнее задание Коллоквиум
	Экзамен			6		
	Итого:	***30***	***30***	***6***	***86***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***152***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***4***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Системы линейных уравнений	Решение систем линейных уравнений: метод Гаусса. Операции над матрицами.
2	Векторные пространства	Векторные пространства. Детерминанты. Метод Крамера решения систем линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Линейные операторы. Собственные значения и векторы.
3	Геометрия евклидовых пространств	Евклидовы пространства. Ортогональные проекции. Квадратичные формы.
4	Матричные разложения и приложения линейной алгебры	Цепи Маркова. Принцип главных компонент (PCA). SVD разложение. Компрессия данных.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. *Татарников, О. В.* Линейная алгебра : учебник для вузов / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 273 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19275-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/556226.

2. *Шилин, И. А.* Линейная алгебра. Задачник : учебное пособие для вузов / И. А. Шилин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 118 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-14382-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/567570.

Дополнительная литература:

1. *Бурмистрова, Е. Б.* Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15839-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560017.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;
— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое

Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, коллоквиум, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине «Линейная алгебра»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме экзамена, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	
8	Отлично	
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и
4	Удовлетворительно	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	13	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	25%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	20%	1	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Экзамен	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра»: «0,2 × среднее за домашние задания + 0,25× среднее за контрольные работы + 0,2 × коллоквиум + 0,35 × экзамен».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные темы к коллоквиуму

Тема «Системы линейных уравнений»

— Совместная и несовместная система

— Определённая и неопределённая система

— Однородная и неоднородная система

— Матрица

— Главная и побочная диагонали

— Элементарные преобразования строк

— Ступенчатый вид матрицы

— Главные и свободные переменные

— Как по ступенчатому виду понять, что система определена?

— Сколько может быть решений у системы линейных уравнений?

— Прямой ход алгоритма Гаусса

— Обратный ход алгоритма Гаусса

Тема «Операции над матрицами»

— Сумма матриц

— Нулевая матрица

— Произведение матрицы на число

— Произведение матриц

— Пример некоммутативности матричного умножения

— Коммутирующие матрицы

— Делители нуля

— Нильпотентные матрицы

— Транспонирование матриц

— Симметричная матрица

— След матрицы

— Блочное умножение матриц

— Умножение на диагональную матрицу

— Транспонирование от произведения матриц

— След от произведения матриц

Тема «Обратные матрицы. Матричные уравнения»

— Единичная матрица

— Обратная матрица

— Матрицы элементарных преобразований I, II, III типов и их обратные

— Подстановка матрицы в многочлен

— Матрицы, коммутирующие с диагональной матрицей с разными числами на диагонали

— Классификация систем линейных уравнений

— Связь обращения матриц с умножением и транспонированием

— Эквивалентные условия обратимости матрицы

— Подстановка в многочлен матрицы $C^{-1}AC$

— Алгоритм поиска обратной и проверки обратимости

— Алгоритм решения уравнений $AX = B$

— Связь обращения матриц с умножением и транспонированием

— Только квадратные матрицы обратимы

Тема «LU-разложение»

— LU-разложение

Тема «Векторные пространства»

— Векторное пространство

— Пример векторного пространства отличный от R^n или матриц

— Подпространство векторного пространства

— Линейная комбинация векторов

— Линейно независимый набор векторов

— Коллинеарные векторы

— Компланарные векторы

— Линейная оболочка системы векторов

— Порождающая система векторов

— Базис

— Размерность векторного пространства

— Координаты вектора в базисе

— Матрица перехода между базисами

— Критерий подпространства

— Достаточное условие линейной зависимости в n-мерном пространстве

— Три эквивалентных условия для базиса в n-мерном пространстве

— Критерий подпространства

— Совпадение размеров базисов

— Алгоритм выделения базиса из системы векторов

— Алгоритм выделения базиса из системы векторов

— Алгоритм дополнения линейно независимой системы до базиса

Тема «Определители матриц»

— Определители матрицы 2 на 2 и 3 на 3

— $i\,j$-ый минор матрицы

— $i\,j$-ое алгебраическое дополнение матрицы

— Невырожденная матрица

— Присоединённая матрица

— Формула разложения определителя по строке

— Изменение определителя при элементарных преобразованиях

— Определитель транспонированной матрицы

— Определитель произведения матриц

— Критерий обратимости в терминах определителя

— Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц

— Связь линейной зависимости и определителя

— Линейность определителя по строке

— Метод Крамера

— Определитель обратной матрицы

— Явные формулы обратной матрицы (через алгебраические дополнения)

— Определитель произведения матриц

— Критерий обратимости в терминах определителя

— Метод Крамера

— Определитель обратной матрицы

— Явные формулы обратной матрицы

— Определитель Вандермонда

Тема «Фундаментальная система решений»

— Строчный ранг матрицы

— Базисный минор

— Фундаментальная система решений

— Тривиальная оценка на ранг матрицы

— Теорема о базисном миноре

— Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга

— Размерность пространства решений однородной системы

— Связь решений однородной и неоднородной системы

— Теорема Кронекера-Капелли

— Размерность ФСР

— Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга

— Теорема Кронекера-Капелли

Тема «Сумма и пересечение подпространств»

— Пересечение подпространств

— Пример, когда объединение подпространств — не подпространство

— Сумма подпространств

— Прямая сумма двух подпространств

— Теорема о неполном базисе

— Связь размерности суммы и пересечения подпространств (Формула Грассмана)

— Алгоритм поиска ФСР

— Алгоритм поиска скелетного разложения

Примерные задания по контрольной работе

1. Реши систему $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Выпиши базис решений (ФСР) соответствующей однородной системы $A\mathbf{x} = 0$;
   Найди решения неоднородной системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   Запиши решения неоднородной СЛУ через ФСР, через базис, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Дана матрица $A \in M3\ 3(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

   1. Найди LU-разложение для A.
   2. Найди разложение A в произведение элементарных матриц.
   3. Найди определитель матрицы A.
4. Запиши матрицу линейного оператора поворота на 30 градусов в R^2.
5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы векторы

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   1. Проверь, что $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ формируют базис в $\mathbb{R}^3$.
   2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.
   3. Найди координаты векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$.
6. Проверь, является ли отображение линейным. φ: $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$, где
   $\varphi(f) = f' + f(2) - fg + (fh)'$
   $g = 2 + x + x^4$, $h = x + x^2$
7. Посчитай определитель матрицы $A \in M_{n\ n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

Примерные домашние задания

Домашнее задание по теме: «Системы линейных уравнений. Операции над матрицами»

1. Реши системы, используя метод Гаусса (и прямой, и обратный ход).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 7x_4 = -2. \end{cases}$$

2. Найди многочлен с вещественными коэффициентами $f \in \mathbb{R}[x]$ второй степени такой, что $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.
3.

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

вычисли следующее выражение:

$$\operatorname{tr}(AB - B^T A^T + I_2) I_3 + BA.$$

4. Для матриц A, B ∈ $M_{n\ n}(R)$ определим операцию [A, B] = AB−BA. Проверь, что для любых матриц A, B, C ∈ $M_{2\ 2}(R)$ верно, что $[A, [B, C]^2] = 0$. (Указание: сначала найди [B, C], затем посчитай $[B, C]^2$, а потом вычисли уже итоговое выражение).

Домашнее задание по теме: «Векторные пространства»

1. Даны векторы

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Среди этих векторов найди базис их линейной оболочки и вырази оставшиеся вектора через базисные.

Указание: постарайся ответить на оба вопроса, используя один и тот же процесс приведения к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса.

2. Проверь, являются ли следующие векторы линейно независимыми. Если являются, то дополни их до базиса всего пространства R^4:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

3. В пространстве R^3 заданы векторы

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Проверь, что $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ формируют базис в R^3.

2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.

3. Найди координаты векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$.

4. Рассмотрим в качестве векторного пространства V = {f: R → R}. Проверь, лежит ли заданный вектор в указанной линейной оболочке. Найди его координаты в указанном базисе.

1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ в базисе $\{\sin(x), \cos(x)\}$.
2. $\frac{1}{x^3 - 7x^2 + 12x}$ в базисе $\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x-3}, \frac{1}{x-4}\right\}$

5. Дополни систему многочленов $\{x^5 + x^4, x^5 - 3x^3, x^5 + 2x^2, x^5 - x\}$ до базиса пространства $R[x]_{\leqslant 5}$.

Домашнее задание по теме: «Фундаментальная система решений. Сумма и пересечение подпространств»

1. Найди базис векторного пространства $U = \{\mathbf{y} \in R^5 \mid A\mathbf{y} = \mathbf{0}\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Определи, можно ли из системы векторов

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

выбрать ФСР для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Найди скелетное разложение матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Найди решения неоднородной системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ через базис решений (ФСР)соответствующей однородной системы $A\mathbf{x} = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5. Найди ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 9 \\ 8 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Домашнее задание по теме: «Собственные векторы и собственные значения»

1. Найди собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Являются ли операторы в R^4 со следующими матрицами диагонализируемыми?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & 5 \\ & -1 & & \\ & 2 & 1 & 4 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$; 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & & 2 & 3 \\ & -1 & & -2 \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

Если нет, то объясни почему. Если да, то найди:
а) базис, в котором оператор имеет диагональный вид;
б) сам диагональный вид.
Здесь пропуски в матрицах – это нули.

3. Какие из следующих матриц подобны? В случаях подобия укажи, с помощью какой матрицы можно из одной получить другую:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Для каждого из следующих линейных операторов в R^3 найди его матрицу в стандартном базисе, собственные значения и собственные подпространства для вычисленных собственных значений.
1. Отражение относительно плоскости xy.
2. Ортогональная проекция на плоскость xz.
3. Поворот против часовой стрелки вокруг положительной оси x на угол 90°.

5. Для диагонализируемой матрицы A найти sin (A) и cos (A), если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверь, выполняется ли равенство $\sin^2(A) + \cos^2(A) = I$.

Домашнее задание по теме: «Сумма и пересечение подпространств»

1. Для подпространств U, V $\subseteq$ R^4 найди базис их суммы и пересечения, если

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right), \quad U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right).$$

2. Проверь, лежит ли подпространство U внутри подпространства W:

1. $U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right), \quad W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\-9\end{pmatrix}\right);$
2. $U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}\right), \quad W = \left\{y \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}-3 & -6 & 9\\2 & 4 & -6\end{pmatrix} y = 0\right\};$
3. $U = \left\{y \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} y = 0\right\}, \quad W = \left\{y \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\5 & 4 & -1\end{pmatrix} y = 0\right\}.$

3. Пусть матрица A € $M_{3\,3}$(R) задана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\-4 & -5 & 1\\-4 & 1 & -9\end{pmatrix}.$$

1. Найди LU-разложение для A, в котором L — нижнетреугольная с 1 на диагонали, а U — верхнетреугольная.
2. Найди LU-разложение для A, в котором L — нижнетреугольная, а U — верхнетреугольная с 1 на диагонали.
3. Найди обратные матрицы к L и U из первого пункта.
4. Найди A−1, используя обратные к L и U из первого пункта.
5. Реши систему Ax = B, используя LU-разложение, где

$$B = \begin{pmatrix}-2 & 2\\2 & 1\\3 & 3\end{pmatrix}.$$

Домашнее задание по теме: «Сингулярное разложение (SVD)»

1. Убедись, что в пространстве R2 со стандартным скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ оператор, заданный по правилу $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, является самосопряжённым, и диагонализируй его в ортонормированном базисе, если

$$A = \begin{pmatrix}11 & -12\\-12 & 4\end{pmatrix}$$

2. В пространстве R^2 задан оператор φ: $R^2 \to R^2$ по правилу φ(x) = Ax. Выясни, найдётся ли скалярное произведение такое, что оператор φ будет самосопряжён, если:

а) $A = \begin{pmatrix}-5 & 4\\-8 & 7\end{pmatrix};$ б) $A = \begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}.$

3. Убедись, что в пространстве R3 со стандартным скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ оператор, заданный по правилу $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, является самосопряжённым, и диагонализируй его в ортонормированном базисе, если

$$A = \begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\2 & 3 & -2\\-3 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Найди ранг матрицы: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$	1	ПК-1
2.	Найди след обратной матрицы A^{-1} к $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$	4	ОПК-1
3.	Найди собственные значения матрицы A^2, если $$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$ В ответ выпиши два числа в порядке возрастания через точку с запятой и без пробелов.	1;9	ОПК-4
4.	Найди сумму элементов матрицы X: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$ В ответ выпиши искомую сумму.	13	ПК-1
5.	Найди косинус угла между векторами: $$\mathrm{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	0,5/0.5	ПК-1
6.	Вычисли $tr(A) + tr(B) + det(A)$, если : $$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$	20	ПК-1
7.	Вычисли скалярное произведение векторов **u** и **v**, если известно, что $\|\mathbf{u}\| = 10$, $\|\mathbf{v}\| = 7$ и угол между ними равен 60°.	35	ПК-1

8.	Дана матрица A. Найди её определитель: $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$	1	ОПК-4
9.	Найди размерность пространства решения уравнения: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.	2	ПК-1
10.	Найди собственные значения и собственные вектора матрицы A, если $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$ В ответ выпиши собственные значения через точку с запятой, в порядке возрастания, без пробелов.	0;2	ОПК-1
11.	Реши систему линейных уравнений $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$ В ответ выпиши решение x_1,x_2 через точку с запятой и без пробелов.	2;1	ПК-1