

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета  
АНО ВО «Центральный университет»  
«07» марта 2024 г.  
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
«Дополнительные главы математического анализа»**

**Направление подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**Направленность (профиль) подготовки:** Искусственный интеллект

**Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Срок освоения программы:** 4 года

**Год набора:** 2024

**Москва  
2024**

## Содержание

<b>1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Перечень планируемых результатов обучения</b> .....	<b>5</b>
<b>3. Тематический план</b> .....	<b>7</b>
<b>4. Содержание дисциплины (модуля)</b> .....	<b>7</b>
<b>5. Учебно-методическое обеспечение</b> .....	<b>8</b>
<b>6. Материально-техническое обеспечение</b> .....	<b>8</b>
<b>7. Методические и оценочные материалы</b> .....	<b>10</b>

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Дополнительные главы математического анализа» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Искусственный интеллект, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Дополнительные главы математического анализа» обеспечивает глубокое понимание расширенных методов анализа, необходимых для решения сложных математических и прикладных задач. Это способствует развитию аналитического мышления и формирует прочную основу для дальнейшего изучения и применения современных математических моделей в науке и технике.

### Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Искусственный интеллект и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 5, 6, 7, 8 семестрах на выбор.

**Цель изучения дисциплины (модуля):** формирование углублённых знаний и навыков применения расширенных методов математического анализа для решения комплексных задач в различных областях науки и техники.

**Задачи изучения дисциплины (модуля)** направлены на формирование у студентов следующий знаний, умений и навыков:

- знание основ теории рядов Фурье, условий сходимости и разложения функций в ряды Фурье;
- знание свойств и методов вычисления интегралов с параметрами, а также правил дифференцирования и интегрирования по параметру;
- знание основных понятий и теорем теории функций комплексного переменного, включая аналитические функции, комплексное дифференцирование и интегрирование;
- знание принципов и свойств преобразования Фурье, а также его связи с анализом сигналов и функций;
- знание взаимосвязи между вещественным и комплексным анализом в контексте изученных тем;
- умение разлагать периодические функции в ряды Фурье и анализировать их сходимость;
- умение вычислять и исследовать интегралы с параметрами, используя методы дифференцирования и интегрирования по параметру;
- умение применять методы комплексного анализа для решения задач, связанных с аналитическими функциями и интегралами по контуру;
- умение использовать преобразование Фурье для анализа и синтеза функций и сигналов;
- умение формулировать и доказывать основные теоремы, связанные с изученными темами;
- навык выполнения практических вычислений рядов Фурье и определения коэффициентов разложения;
- навык решения задач, связанных с вычислением интегралов, зависящих от параметров;

- навык проведения комплексного интегрирования и применения теоремы Коши и формулы Коши-Римана;
- навык реализации преобразования Фурье и обратного преобразования для различных классов функций;
- навык анализа и интерпретации результатов, полученных с помощью изученных методов, в прикладных и теоретических задачах.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-6.	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1.	Знает основные принципы самовоспитания и самообразования, профессионального и личностного развития, исходя из этапов карьерного роста и требований рынка труда
		УК-6.2.	Умеет планировать свое рабочее время и время для саморазвития. формулировать цели личностного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области профессиональной деятельности, индивидуально-личностных особенностей
		УК-6.3.	Имеет практический опыт получения дополнительного образования, изучения дополнительных образовательных программ
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.

	математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта, включая соблюдение норм информационной безопасности

### 3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары (практические занятия)			
1	Ряды Фурье	15	15		15	Подготовка к семинару, Домашние задания
2	Интегралы с параметрами	15	15	2	15	Подготовка к семинару, Домашние задания, Контрольная работа
3	Теория функций комплексного переменного	15	15		15	Подготовка к семинару, Домашние задания
4	Преобразование Фурье	15	15	2	15	Подготовка к семинару, Домашние задания, Контрольная работа
	<i>Зачет с оценкой</i>			6		
	<b>Итого:</b>	<b>60</b>	<b>60</b>	<b>10</b>	<b>60</b>	
	<b>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</b>	<b>190</b>				
	<b>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</b>	<b>5</b>				

### 4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Ряды Фурье	Разложение периодических функций. Коэффициенты Фурье. Условия сходимости рядов. Применение в решении дифференциальных уравнений. Ортогональность тригонометрических функций.
2	Интегралы с параметрами	Дифференцирование под знаком интеграла. Интегрирование по параметру. Непрерывность и дифференцируемость интегралов. Зависимость интеграла от параметра. Применение в вычислении специальных функций.
3	Теория функций комплексного переменного	Аналитические функции. Комплексное дифференцирование. Теорема Коши. Вычисление интегралов по контуру. Формула Коши-Римана.
4	Преобразование Фурье	Представление функций в частотной области. Свойства преобразования. Обратное преобразование Фурье. Применение в обработке сигналов. Связь с дифференциальными уравнениями.

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

### *Основная литература:*

1. Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562116>.

2. Садовничая И. В. Математический анализ: определенный интеграл : учебник для вузов / И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 430 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-20655-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/558520>.

3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : учебник и практикум для вузов / А. П. Потапов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 507 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19121-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/569097>.

### *Дополнительная литература:*

1. Никитин А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560461>.

2. Попова И. Н. Анализ временных рядов : учебник для вузов / И. Н. Попова ; ответственный редактор В. В. Ковалев. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 74 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18394-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/568821>.

3. Капкаева Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	<a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp">https://elibrary.ru/defaultx.asp</a>
2.	База данных для IT-специалистов	<a href="https://habr.com">https://habr.com</a>
3.	База данных ScienceDirect	<a href="https://www.sciencedirect.com">https://www.sciencedirect.com</a>
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	<a href="https://minobrnauki.gov.ru/">https://minobrnauki.gov.ru/</a>
5.	Федеральный портал «Российское образование»	<a href="https://www.edu.ru/">https://www.edu.ru/</a>
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	<a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	<a href="http://school-collection.edu.ru/">http://school-collection.edu.ru/</a>
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	<a href="http://fcior.edu.ru/">http://fcior.edu.ru/</a>

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
<b>Операционные системы:</b>		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Браузеры:</b>		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Офисные приложения:</b>		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое

<b>Программное обеспечение для планирования и учета времени:</b>		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления проектами:</b>		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы управления базами данных:</b>		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы резервного копирования (backup):</b>		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
<b>Справочно-правовые системы:</b>		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
<b>Средства антивирусной защиты:</b>		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
<b>Среды разработки:</b>		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Пакеты программных средств и библиотек:</b>		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления библиографической информацией:</b>		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Сервисы и службы:</b>		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Дополнительные главы математического анализа» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, контрольные работы, домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Участие в семинаре (аудиторная работа)* – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно

активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов, планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

### **Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

#### **Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Дополнительные главы математического анализа»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме **зачета с оценкой**, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысливает дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Дополнительные главы математического анализа» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	13	Набор задач по темам недели
Аудиторная работа	15%	14	Активная работа студента на семинаре
Контрольные работы	30%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Активность	Вес	Количество	Описание
Зачет с оценкой	35%	1	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по курсу

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Дополнительные главы математического анализа»:** « $0,2 \times$  среднее за домашние задания +  $0,15 \times$  аудиторная работа +  $0,3 \times$  среднее за контрольные работы +  $0,35 \times$  зачет с оценкой».

### Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

#### Примерные домашние задания

##### Домашнее задание по теме «Коэффициенты Фурье»

1. Найдите коэффициенты Фурье  $a_0, a_n, b_n$  разложения функции  $f(x)=x$  на интервале  $[-\pi, \pi]$ .
2. Для функции  $f(x)=\cos(3x)$  определите коэффициенты Фурье при разложении на интервале  $[-\pi, \pi]$ .
3. Рассчитайте коэффициенты Фурье для функции  $f(x)=|x|$  на интервале  $[-\pi, \pi]$ .
4. Докажите, что для чётной функции  $f(x)$  все коэффициенты  $b_n$  равны нулю.
5. Постройте частичную сумму ряда Фурье (до  $n=5$ ) для функции  $f(x)=x^2$  на интервале  $[-\pi, \pi]$  и постройте график.

##### Домашнее задание по теме «Зависимость интеграла от параметра»

1. Исследуйте непрерывность функции:

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx.$$

2. Докажите дифференцируемость по параметру  $\alpha$  функции:

$$G(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos t dt,$$

и найдите  $G'(\alpha)$ .

3. Исследуйте сходимость интеграла:

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{1+t^2} dt,$$

и найдите область значений параметра  $\alpha$ , где интеграл существует.

4. Найдите производную по параметру  $\alpha$  функции:

$$J(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \sin x) dx.$$

5. Исследуйте зависимость от параметра  $\alpha$  интеграла:

$$K(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx.$$

### Домашнее задание по теме «Свойства преобразования»

1. Докажите линейность преобразования Фурье:  
если  $F[f](\omega)$  и  $F[g](\omega)$  — преобразования функций  $f$  и  $g$ , то для любых констант  $a, b$   
 $F[af+bg](\omega) = aF[f](\omega) + bF[g](\omega)$ .
2. Исследуйте, как сдвиг функции во временной области влияет на её преобразование Фурье.
3. Докажите формулу масштабирования преобразования Фурье: если  $fa(t) = f(at), a \neq 0$ ,  
то

$$F[fa](\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

4. Найдите преобразование Фурье производной функции  $f'(t)$  через преобразование Фурье  $F[f](\omega)$ .
5. Докажите, что преобразование Фурье чётной функции является вещественной и чётной функцией, а преобразование Фурье нечётной функции — мнимой и нечётной.

### Примерные вопросы для подготовки к семинарам

#### Вопросы к семинару по теме «Теорема Коши»

1. Как формулируется теорема Коши для дифференцируемых функций?
2. В чём отличие теоремы Коши от теоремы Лагранжа о среднем значении?
3. Какие условия необходимы для применения теоремы Коши?
4. Как теорема Коши используется для доказательства теоремы Лагранжа?
5. Приведите пример функции, для которой выполняется теорема Коши, и поясните её применение.

#### Вопросы к семинару по теме «Представление функций в частотной области»

1. Что такое преобразование Фурье и как оно связано с представлением функции в частотной области?
2. Как интерпретируется спектр функции в частотной области?
3. Какие свойства преобразования Фурье важны для анализа сигналов?
4. Чем отличаются прямое и обратное преобразования Фурье?
5. Как представление функции в частотной области помогает решать дифференциальные уравнения?

#### Вопросы к семинару по теме «Разложение периодических функций»

1. Что такое ряд Фурье и для каких функций он применяется?
2. Какие условия Дирихле обеспечивают сходимость ряда Фурье?
3. Как вычисляются коэффициенты разложения периодической функции в ряд Фурье?
4. В чём разница между разложением в тригонометрический ряд и комплексный ряд Фурье?
5. Как разложение в ряд Фурье используется для анализа и синтеза сигналов?

### Примерные задания по контрольным работам

#### Контрольная работа № 1

1. Найдите коэффициенты Фурье функции  $f(x) = x$  на интервале  $[-\pi, \pi]$ .
2. Докажите ортогональность функций  $\sin nx$  и  $\cos mx$  на  $[-\pi, \pi]$ .

3. Исследуйте сходимость ряда Фурье для функции  $f(x)=|x|$  на  $[-\pi, \pi]$ .
4. Разложите функцию  $f(x)=x^2$  в ряд Фурье на  $[-\pi, \pi]$ .
5. Используйте ряд Фурье для решения задачи теплопроводности с заданными краевыми условиями.

6. Докажите формулу дифференцирования под знаком интеграла для функции

$$F(\alpha) = \int_0^1 e^{-\alpha x} \sin x \, dx.$$

7. Исследуйте непрерывность функции

$$G(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{1+t^2} dt.$$

8. Найдите производную по параметру  $\alpha$  функции

$$H(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \sin x) \, dx.$$

9. Используйте интегрирование по параметру для вычисления интеграла

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx.$$

10. Докажите дифференцируемость функции  $F(\alpha)$ , заданной интегралом с параметром.

11. Исследуйте условия сходимости ряда Фурье для кусочно-гладкой функции.

12. Найдите ряд Фурье для функции, заданной кусочно на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

13. Используйте ортогональность тригонометрических функций для вычисления коэффициентов Фурье.

14. Решите дифференциальное уравнение с помощью разложения решения в ряд Фурье.

15. Объясните, как условия Дирихле влияют на сходимость ряда Фурье.

### Контрольная работа № 2

1. Дайте определение аналитической функции в комплексной плоскости.

2. Выведите формулы Коши-Римана для функции  $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ .

3. Проверьте, является ли функция

$$f(z) = z^2 + \bar{z}$$
 аналитической.

4. Вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z-a}, \quad |a| < 1.$$

5. Докажите теорему Коши для простого замкнутого контура.

6. Используя формулу Коши, найдите значение функции внутри круга, если известны значения на контуре.

7. Выведите выражение для комплексного дифференциала и объясните его геометрический смысл.

8. Найдите прямое и обратное преобразования Фурье функции

$$f(t) = e^{-at^2}, \quad a > 0.$$

9. Докажите линейность преобразования Фурье.

10. Исследуйте, как сдвиг функции во временной области отражается в частотной области.

11. Используйте преобразование Фурье для решения дифференциального уравнения второго порядка.

12. Объясните связь между преобразованием Фурье и спектральным анализом сигналов.

13. Вычислите преобразование Фурье производной функции  $f'(t)$  через  $F[f](\omega)$ .

14. Докажите, что преобразование Фурье чётной функции является вещественной и

чётной.

15. Приведите пример применения обратного преобразования Фурье в обработке сигналов.

### Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Какое из условий является необходимым для равномерной сходимости ряда Фурье функции $f$ на интервале $[-\pi, \pi]$ ? А) $f$ непрерывна и периодична В) $f$ дифференцируема на $[-\pi, \pi]$ С) $f$ интегрируема по Риману D) $f$ кусочно-гладкая и удовлетворяет условию Дирихле	D	ПК-1
2.	При каком условии можно дифференцировать интеграл с параметром под знаком интеграла? А) Интеграл должен быть равен нулю В) Интегрируемая функция и её частная производная по параметру непрерывны на области интегрирования С) Параметр должен быть целым числом D) Интеграл должен быть конечным	B	ПК-2
3.	Какая формула выражает условие аналитичности функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в точке?	Формула Коши-Римана	ПК-1
4.	Какое свойство преобразования Фурье соответствует смещению функции во временной области? А) Сдвиг во временной области приводит к сдвигу в частотной области на ту же величину В) Сдвиг во временной области не влияет на преобразование Фурье С) Сдвиг во временной области приводит к умножению на комплексную экспоненту в частотной области D) Сдвиг во временной области приводит к дифференцированию преобразования Фурье	C	УК-6
5.	Какая тригонометрическая функция является ортогональной на интервале $[-\pi, \pi]$ с функцией $\sin(nx)$ , где $n \in \mathbb{N}$ ?	$\cos(mx), m \neq n$	ОПК-1
6.	Что утверждает теорема Коши для аналитической функции $f$ в области $D$ ? А) Интеграл $\oint \partial D f(z) dz = 0$ В) $f$ имеет разрыв первого рода С) $f$ не дифференцируема в $D$ D) Интеграл $\oint \partial D f(z) dz \neq 0$	A	ОПК-1
7.	Назовите формулу, которая задаёт коэффициенты Фурье для функции $f(x)$ .	Формула Эйлера-Фурье	ПК-2
8.	Как называется операция, когда дифференцирование проводится под знаком интеграла?	Дифференцирование под знаком интеграла	ПК-1
9.	Как называется система уравнений, дающих условие комплексной дифференцируемости функции?	Уравнения Коши-Римана	ПК-2
10.	Как называется функция, которая описывает спектральное представление исходного сигнала?	Спектр (или спектральная функция)	ОПК-1