

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Линейная алгебра. Углубленный курс»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Искусственный интеллект

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2024

**Москва
2024**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	8
5. Учебно-методическое обеспечение	9
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра. Углубленный курс» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Искусственный интеллект, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Линейная алгебра. Продвинутый курс» является основой для многих других математических дисциплин. Дисциплина (модуль) развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Искусственный интеллект и входит в Блок 1, часть, формируемую участниками образовательных отношений как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания алгебраических структур, эрмитовых пространств, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля) направлены на формирование у студентов следующий знаний, умений и навыков:

- знание критерий оценки скорости сходимости итерационных методов решения СЛУ (нормы погрешности, число обусловленности);
- знание аксиоматики алгебраических структур: групп, колец и полей, их основные свойства и примеры;
- знание теоретической базы жордановой формы: жордановы клетки, инвариантные подпространства, алгоритм приведения;
- знание свойств эрмитовых пространств: эрмитовы формы, сопряжённые операторы, унитарные преобразования;
- знание теоретических основ низкоранговых приближений: сингулярное разложение, теорема эккарта-янга;
- умение сравнивать скорость сходимости различных методов (Якоби, Гаусса-Зейделя, SOR) для конкретных матриц;
- умение определять алгебраическую структуру множества по заданным операциям (проверять аксиомы групп/колец/полей);
- умение приводить матрицы к жордановой форме для операторов с кратными собственными значениями;
- умение работать в эрмитовых пространствах: вычислять эрмитово скалярное произведение, строить ортонормированные базисы;
- умение строить низкоранговые приближения матриц с заданной точностью с использованием SVD;
- владение оптимизацией итерационных методов с адаптивным выбором параметров для ускорения сходимости;
- владение применением теории групп в криптографии (поля галуа) и теории симметрий;
- владение анализом линейных операторов через их жорданову форму в дифференциальных уравнениях и динамических системах;

— владение методами функционального анализа в эрмитовых пространствах (спектральная теория, операторные неравенства);

— владение реализацией численных алгоритмов: разложение Холецкого для положительно определённых матриц, степенной метод для поиска собственных значений.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.

	математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятель ная работа	
Лекции	Семинары (практичес кие занятия)					
1	Оценка скорости сходимости методов решения СЛУ		4		4	Домашнее задание
2	Группы, кольца, поля		4		6	Домашнее задание
3	Жорданова форма матрицы		4		6	Домашнее задание Контрольная работа
4	Эрмитовы векторные пространства		6		6	Домашнее задание
5	Низкоранговые приближения		4		6	Домашнее задание Контрольная работа
6	Разложение Холецкого		4		6	Контроль теоретического материала
7	Метод степенных итераций (Power method)		4		4	Домашнее задание
	<i>Зачет</i>			8		
	Итого:		30	8	38	
	Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)	76				
	Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)	2				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Оценка скорости сходимости методов решения СЛУ	Классификация методов решения систем линейных уравнений (прямые и итерационные). Понятие скорости сходимости и критерии оценки. Анализ сходимости простейших итерационных методов (метод простой итерации, метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя). Оценка скорости сходимости с помощью спектрального радиуса и нормы матрицы итераций
2	Группы, кольца, поля	Основные определения и примеры групп, колец и полей. Свойства и типы групп (абелевы, конечные, циклические). Кольца: коммутативные и некоммутативные, единица и делители нуля. Поля и их применение в алгебре и теории чисел.
3	Жорданова форма матрицы	Понятие жордановой нормальной формы и её существование. Построение жордановых клеток. Алгоритм приведения матрицы к жордановой форме. Применение жордановой формы в решении систем дифференциальных уравнений и вычислениях.
4	Эрмитовы векторные пространства	Определение эрмитова пространства и эрмитова формы. Свойства эрмитовых форм и скалярного произведения. Ортогональные и ортонормированные базисы в эрмитовых пространствах. Спектральная теорема для эрмитовых операторов.
5	Низкоранговые приближения	Понятие и мотивация низкоранговых приближений матриц. Сингулярное разложение (SVD) и его роль в низкоранговом приближении. Методы построения низкоранговых приближений (аппроксимация по Фробениусу). Применение низкоранговых приближений в обработке данных и машинном обучении.
6	Разложение Холецкого	Определение и условия существования разложения Холецкого. Алгоритм вычисления разложения Холецкого для положительно определённых матриц. Применение разложения Холецкого в решении систем линейных уравнений и оптимизации. Связь разложения Холецкого с другими методами факторизации матриц.
7	Метод степенных итераций (Power method)	Идея и алгоритм метода степенных итераций для вычисления максимального собственного значения. Анализ сходимости метода и условия его применения. Модификации метода (сдвиг, обратный степенной метод). Применение метода в вычислительной линейной алгебре и обработке больших матриц.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Константинова, Е. В. Теория графов: алгебраическая теория : учебник для вузов / Е. В. Константинова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 123 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-20172-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/569211>.

2. Скорубский, В. И. Математическая логика : учебник и практикум для вузов / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 211 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01114-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561076>.

3. Дискретная математика : учебное пособие для вузов / под научной редакцией А. Н. Сесекина. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 85 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-21182-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/559511>.

Дополнительная литература:

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М. : Вильямс, 2009. — 784 с.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и

обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		

Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра. Углубленный курс» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как семинары, контрольные работы и домашние задания, контроль теоретических знаний, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Участие в семинаре (аудиторная работа) – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Контроль теоретических знаний – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки студенту необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное

изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра. Углубленный курс»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме *зачета*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме
6	Хорошо	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра. Углубленный курс» оценивается следующим образом:

Для получения «Зачёта» по углубленному курсу нужно сдать:

— 8 домашних заданий на продвинутом уровне (задания с черной звездочкой);

- 1 из 2 контрольных на основном уровне или выше (задания с красной и черной звездочкой);
- 1 из 2 контрольных на продвинутом уровне (задания с черной звездочкой);
- экзамен на продвинутом уровне (все задания контрольной работы включая задания с черной звездочкой).

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

Домашнее задание по теме «Векторные пространства»

*** ЗАДАЧА 8	<p>(2 балла)</p> <p>Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ — множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n. Покажи, что системы</p> $\{1, x, x^2, \dots, x^n\} \text{ и } \{1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n\}, \text{ где } a \in \mathbb{R},$ <p>являются базисами в $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$. Найди матрицы перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.</p>
*** ЗАДАЧА 9	<p>(2 балла)</p> <p>Пусть V — векторное пространство, $e_1, \dots, e_n \in V$ — линейно независимая система. Найди все возможные базисы линейной оболочки среди следующих векторов</p> $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n - e_1.$
*** ЗАДАЧА 10	<p>(2 балла)</p> <p>Пусть V — векторное пространство. Покажи, что</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\lambda \cdot 0 = 0 \in V$. 2. Если для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ выполнено $\lambda v = 0$, то либо $\lambda = 0$, либо $v = 0$. 3. Для любого вектор $v \in V$ выполнено $-v = (-1) \cdot v$.
*** ЗАДАЧА 11	<p>(2 балла)</p> <p>Введём на множестве положительных вещественных чисел $V = \mathbb{R}_{>0}$ следующие операции:</p> <ul style="list-style-type: none"> • «Сложение» $v \oplus u = vu$, где $v, u \in V$ (справа обычное умножение чисел); • «Умножение на скаляр» $\lambda * v = v^\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V$. <p>Проверь, что множество $\mathbb{R}_{>0}$ с операциями \oplus и $*$ является векторным пространством над \mathbb{R}. Определи, какая у него размерность.</p>
*** ЗАДАЧА 12	<p>(2 балла)</p> <p>Рассмотрим в качестве векторного пространства $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ с обычными операциями сложения и умножения на число. Роль 0 в таком пространстве играет функция, которая во всех точках равна 0. Проверь на линейную независимость следующие функции:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $1, \sin(x), \dots, \sin^n(x)$. 2. $\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(nx), \cos(nx)$.
*** ЗАДАЧА 13	<p>(2 балла)</p> <p>Рассмотрим в качестве векторного пространства $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ с обычными операциями сложения и умножения на число. Построй континуальное семейство функций $\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ такое, что любой конечный набор $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n}$ (все λ_i различны) будет линейно независимым.</p>
*** ЗАДАЧА 14	<p>(2 балла)</p> <p>Пусть V — векторное пространство над \mathbb{R} и $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ — подпространства такие, что $V = \bigcup_{i=1}^k U_i$. Покажи, что найдётся j такое, что $V = U_j$.</p>

Домашнее задание по теме «Сумма и пересечение подпространств»

ЗАДАЧА 11

(2 балла)

Рассмотрим векторное пространство последовательностей

$$V = \{(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R}, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-100} \forall n \geq 100\}.$$

Зададим в нём следующие два подпространства:

$$U = \{(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \in V \mid a_{100} = a_{101}\}$$

и

$$W = \{(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \in V \mid a_{200} = 0\}.$$

Найди размерности $U \cap W$ и $U + W$.

ЗАДАЧА 12

(2 балла)

В пространстве \mathbb{R}^4 задана симметричная билинейная форма $\beta: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу $(x, y) \mapsto x^T B y$, где

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & -9 & 6 \\ -2 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Для оператора $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ определим форму β_φ по правилу $\beta_\varphi(x, y) = \beta(\varphi(x), \varphi(y))$. Определи максимальную размерность подпространства $\ker \beta + \ker \beta_\varphi$ для всех возможных обратимых операторов $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

ЗАДАЧА 13

(2 балла)

Пусть в \mathbb{R}^4 задан вектор v , а линейные операторы φ и ψ заданы матрицами A и A^T :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -5 & -10 \\ -2 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Выясни, верно ли что

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im} \varphi^{2024} + \ker \psi^{2025} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} \varphi^{2024} \cap \ker \psi^{2025} = 0.$$

Если это верно, то представь вектор v в виде какой-нибудь суммы $v = u + w$, где $u \in \operatorname{Im} \varphi^{2024}$ и $w \in \ker \psi^{2025}$, и покажи, что такие u и w единственные.

Примерные задания для контроля теоретических знаний

ЗАДАЧА 1

2 балла

В пространстве \mathbb{R}^3 задана билинейная форма по правилу $\beta(x, y) = x^T B y$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найди матрицу $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, задающую оператор $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ по правилу $\varphi(x) = Ax$ такую, что у всех билинейных форм

$$\begin{aligned} \gamma_0(x, y) &= \beta(x, y), & \gamma_1(x, y) &= \beta(\varphi(x), \varphi(y)), \\ \gamma_2(x, y) &= \beta(\varphi^2(x), \varphi^2(y)), & \gamma_3(x, y) &= \beta(\varphi^3(x), \varphi^3(y)) \end{aligned}$$

разные сигнатуры или докажи, что этого сделать нельзя.

ЗАДАЧА 2

2 балла

Найди матрицу оператора $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ в стандартном базисе, для которого многочлен $t^{2026} + t^{2024}$ будет зануляющим, при этом сам оператор не диагонализуемый, а векторы стандартного базиса e_1, e_2 и e_3 не являются собственными.

ЗАДАЧА 3

2 балла

На экзамене студенту надо было найти всевозможные ЖНФ для матрицы ABC , где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(B) \neq 0.$$

Но так как студент плохо подготовился, он предложил профессору сыграть в игру. Они договорились и составили список из трех чисел: студент выбрал свою любимую оценку 10, профессор выбрал свою любимую оценку 1 и, чтобы никого не обидеть, они добавили ноль. Так как они оба джентельмены, то договорились, что будут называть только такие невырожденные матрицы $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, что собственные значения ABC будут только из составленного ими списка из трех чисел $\{0, 1, 10\}$. Теперь они играют по следующим правилам.

Вначале профессор называет невырожденную матрицу $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ и находит ЖНФ матрицы ABC . После этого он записывает эту ЖНФ на листочке в список запрещенных ЖНФ. Далее ходит студент, он также выбирает невырожденную матрицу $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ и находит ЖНФ матрицы ABC , чтобы такой ЖНФ ещё не было в запрещенном списке (при перестановке клеток местами ЖНФ считаются одинаковыми). После чего студент добавляет свою ЖНФ в список запрещенных и передает ход профессору и так далее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Если студент выигрывает, он получает 10, если проигрывает, то 1. Помоги студенту разобраться, какую оценку он получит.

ЗАДАЧА 4

2 балла

В пространстве \mathbb{R}^3 скалярное произведение задано по правилу $\langle x, y \rangle = x^T B y$, где

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & -5 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Для некоторого базиса $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^3$ назовём вектор хорошим, если он в базисе f_1, f_2, f_3 и в двойственном к нему имеет одинаковые координаты. Покажи, что множество хороших векторов является подпространством. Найди, какой может быть размерность этого подпространства при разном выборе базиса f_1, f_2, f_3 .

Примерные задания по контрольной работе

Контрольная работа №1

Вариант 1

ЗАДАЧА 1

2 балла

Волшебница Хельга готовится к бою по линейной алгебре, где разрешены только ортогональные или самосопряжённые операторы. Для этого она изучила свою противницу Эльмиру и узнала, что её предыдущий бой прошёл в пространстве \mathbb{R}^3 , где задано скалярное произведение $\langle x, y \rangle = x^T B y$ с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix},$$

а после каждого заклинания возникал оператор $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такой, что для каких-то векторов $v, u \in \mathbb{R}^3$ появлялась матрица Грама

$$G(v, \varphi(v), u, \varphi(u)) = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 13 & 5 \\ 1 & 11 & 5 & 7 \\ 13 & 5 & 17 & 7 \\ 5 & 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Помоги Хельге подготовиться к соревнованию и выясни, какой оператор возникает у её соперницы: ортогональный, самосопряженный, или же она играет не по правилам.

ЗАДАЧА 2

2 балла

Шпион Абель для передачи секретного сообщения использовал только симметричные матрицы $S \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ с неотрицательным спектром. Но чтобы его сообщение нельзя было расшифровать, он умножал такую матрицу справа на случайную ортогональную матрицу. Контрразведка сумела перехватить зашифрованную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Помоги восстановить матрицу S или докажи, что этого нельзя сделать.

ЗАДАЧА 3

2 балла

Юный математик Паша решил получить грант РФФИ на изучение квадратичных форм и операторов, влияющих на их сигнатуру. Он собирается изучать квадратичные формы $Q(x) = \beta(x, x)$, где $\beta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ задана по правилу $\beta(x, y) = x^T B y$ и

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

А цель исследования — установить, какой может быть сигнатура квадратичной формы $Q_\varphi(x) = \beta(x, \varphi(x))$ для все возможных операторов $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Но как опытный ученый, Паша знает, что нельзя подавать грант на исследование, в котором не уверен. Помоги Паше найти ответ заранее.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Составь общее уравнение прямой, проходящей через точки $M_1 = (1, 2)$ и $M_2 = (3, 6)$, приведённое к виду $\alpha x - y + \beta = 0$, Запишите искомые α и β через точку с запятой	2;0	УК-1

2.	<p>Квадратичная форма</p> $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_2^2$ <p>является</p> <p>а) положительно определённой; б) отрицательно определённой; в) знакопеременной.</p>	а	ОПК-1
3.	<p>Решите матричную систему уравнений:</p> $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \\ X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{cases}$ <p>Здесь X и Y — квадратные матрицы размера 2×2. В ответ выпишите через точку с запятой коэффициенты матрицы X в порядке:</p> $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}.$	3;3;4;6	ПК-1
4.	<p>Найдите сигнатуру квадратичной формы</p> $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2.$ <p>Ответ выпишите в виде $p^0; p^+; p^-$, без пробелов.</p>	1;1;0	ПК-1
5.	<p>Вычислите $C = BA - 2AB$, если</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$ <p>В ответ выпишите через точку с запятой коэффициенты матрицы C в порядке:</p> $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}.$	-2;-5;0;-3	ПК-1
6.	<p>Билинейная форма $B(x, y)$ в стандартном базисе имеет матрицу</p> $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$ <p>Найдите $B(u, v)$, если</p> $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$	10	ОПК-1