
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«25» мая 2026 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Математический анализ. Часть 1. Продвинутый уровень»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Математика и компьютерные
Науки

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2026

**Москва
2026**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	7
5. Учебно-методическое обеспечение	8
6. Материально-техническое обеспечение	8
7. Методические и оценочные материалы	10

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математический анализ. Часть 1. Продвинутый уровень» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и компьютерные науки», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Математический анализ. Часть 1. Продвинутый уровень» является основой для многих других математических дисциплин и научных направлений, включая физику, экономику и инженерные науки. Дисциплина развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и компьютерные науки» и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- формирование понимание терминов, основных теорем, связанных с исследованием функции на экстремум и выпуклость, построение графиков функции и их анализ с помощью производной;
- обучение навыкам вычисления предела последовательности и функции, исследования функции на непрерывность и дифференцируемость;
- применение производных к исследованию функций и построение график функций, применение формулы Тейлора к нахождению пределов и другое.

В результате освоения дисциплины (модуля) в 1 семестре обучающийся должен:

знать:

- аксиоматическое построение множества действительных чисел и его ключевые свойства (полнота, архимедовость), а также базовые операции и геометрическую интерпретацию комплексных чисел;
- определения и эквивалентные критерии сходимости и фундаментальности последовательностей и функций (в том числе критерий Коши, определение предела по Гейне и по Коши);
- основные топологические понятия на $\mathbb{R}$: открытые и замкнутые множества, компактность (теорема Больцано–Вейерштрасса, теорема Гейне–Бореля), связность;
- фундаментальные теоремы дифференциального и интегрального исчисления: теоремы Вейерштрасса, Больцано–Коши, Лагранжа, Ньютона–Лейбница, а также условия применимости правила Лопиталя и теорем о среднем значении;
- основные результаты теории рядов: признаки сходимости (сравнения, Даламбера, Коши, интегральный), теорему Римана об условной сходимости, теорему Стоуна–Вейерштрасса, критерий Коши равномерной сходимости.

уметь:

- доказывать сходимость (или расходимость) последовательностей и функций, используя ε - N - и ε - δ -определения, а также критерий Коши;

— исследовать функции на непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость; применять основные теоремы (о промежуточном значении, об экстремумах, о среднем значении) для анализа свойств функций на отрезках и компактах;

— вычислять производные и дифференциалы, строить разложения Тейлора, исследовать выпуклость и точки перегиба, применять правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей;

— находить неопределённые интегралы (методы замены переменной, интегрирования по частям, рациональные и тригонометрические подстановки), вычислять определённые и несобственные интегралы, исследовать их сходимость, дифференцировать интегралы с параметром;

— анализировать сходимость числовых и функциональных рядов, проверять равномерную сходимость (по признаку Вейерштрасса, по критерию Коши), работать со степенными рядами (находить радиус сходимости, выполнять почленное дифференцирование и интегрирование).

владеть:

— аналитической культурой строгого математического рассуждения: строить логически полные доказательства, различать необходимые и достаточные условия, корректно использовать кванторы и логические отрицания;

— навыком перехода между дискретными и непрерывными структурами: видеть аналогии между суммами и интегралами, последовательностями и функциями, конечными разностями и производными;

— практикой построения оценок и контрпримеров: подбирать функции и последовательности, иллюстрирующие границы применимости теорем (например, непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции);

— инструментарием аппроксимации: использовать полиномы Тейлора и степенные ряды для приближённых вычислений, оценивать остаточный член, применять теорему Стоуна–Вейерштрасса как обоснование полиномиальной аппроксимации;

— математической гибкостью: интерпретировать определения и теоремы в различных контекстах — от теоретических (топология $\mathbb{R}$) до прикладных (асимптотический анализ, интегралы с параметром в физике и машинном обучении).

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности.
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
ПК-1.	Способен формулировать естественнонаучные задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в	ПК-1.1.	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.

	области математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с естественнонаучными задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач, а также участие в обследовании предметной области и согласовании требований с бизнес-пользователями

3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятель ная работа	
		Лекции	Семинары (практичес кие занятия)			
1	Действительные числа и пределы	12	12		18	Домашнее задание
2	Непрерывность и дифференцирование	16	16	2	16	Домашнее задание Контрольная работа Лабораторная работа
3	Интегрирование	16	16	2	16	Домашнее задание Контрольная работа Лабораторная работа
4	Ряды и функциональная сходимость	10	16	2	16	Домашнее задание Коллоквиум
	Экзамен			4		
Итого:		54	60	10	66	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		190				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Действительные числа и пределы	Понятие множества/ Аксиоматика $\mathbb{R}$ и комплексные числа. Пределы последовательностей и критерий Коши. Топология $\mathbb{R}$: открытые/замкнутые множества и компакты
2	Непрерывность и дифференцирование	Непрерывные функции и их пределы. Свойства функций на компактах и расширенная прямая. Производная, дифференциал и основные теоремы. Правило Лопиталя, полином Тейлора и выпуклость
3	Интегрирование	Неопределённый интеграл: методы и техники. Определённый интеграл: критерии и свойства. Теорема Ньютона–Лейбница и интегралы с параметрами. Несобственные интегралы и их сходимость
4	Ряды и функциональная сходимость	Числовые ряды: сходимость и признаки. Условная сходимость и теорема Римана. Равномерная сходимость функций и её применение. Степенные ряды и теорема Стоуна–Вейерштрасса

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Зорич, В. А. Математический анализ. Часть I : учебник / В. А. Зорич. - 11-е изд., испр. - Москва : МЦНМО, 2021. - 564 с. - ISBN 978-5-4439-3304-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1900074>.

2. Зорич, В. А. Математический анализ. Часть II : учебник / В. А. Зорич. - 11-е изд., испр. - Москва : МЦНМО, 2021. - 676 с. - ISBN 978-5-4439-3305-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1900075>.

3. Шипачев, В. С. Математический анализ. Теория и практика : учебное пособие / В.С. Шипачев. — 3-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2026. — 351 с. — (Высшее образование). — DOI 10.12737/5267. - ISBN 978-5-16-010073-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2235902>.

Дополнительная литература:

1. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

2. Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560461>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:
— столами и стульями;

- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		

КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математический анализ. Часть 1. Продвинутый уровень» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, коллоквиумы, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные

конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Лабораторная работа – учебное занятие, направленное на практическое закрепление теоретических знаний через выполнение экспериментальных или проектных заданий. В ходе лабораторной работы студенты проводят анализ, разработку или тестирование программного кода, изученного в рамках курса.

Перед выполнением лабораторной работы необходимо внимательно ознакомиться с теоретическим материалом и методическими указаниями. Рекомендуется изучить используемые инструменты и технологии для уверенного их применения на практике. При возникновении вопросов следует обращаться к преподавателю для получения разъяснений

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Математический анализ. Часть 1. Продвинутый уровень»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном.
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Математический анализ. Часть 1. Продвинутый уровень» в каждом семестре оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	15%	14	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	25%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Лабораторная работа	10%	2	Задания на выполнение экспериментальных или проектных работ с анализом, разработкой или тестированием кода.
Коллоквиум	15%	1	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее

Активность	Вес	Количество	Описание
Экзамен	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Математический анализ. Часть 1. Продвинутый уровень»: $0,15 \times \text{среднее за домашние задания} + 0,25 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,1 \times \text{среднее за лабораторные работы} + 0,15 \times \text{коллоквиум} + 0,35 \times \text{экзамен}$.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные вопросы к коллоквиуму

Тема «Функция»

Определения

Обратная функция

Тема «Свойства функций»

Определения

Строго (нестрого) возрастающая (убывающая) функция

Точка глобального экстремума (минимума / максимума) функции

Функция, ограниченная сверху (ограниченная снизу, ограниченная, неограниченная)

Функция: чётная (нечётная, периодическая с периодом T)

Теорема о сумме ограниченных функций, сумме ограниченной неограниченной функций

Доказательства

Теорема о сумме ограниченных функций, сумме, ограниченной и неограниченной функций

Тема «Последовательности»

Определения

Последовательность

Последовательность, ограниченная сверху (ограниченная снизу, ограниченная, неограниченная)

Монотонная последовательность: (строго) возрастающая (убывающая) последовательность

Тема «Предел последовательности»

Определения

Предел последовательности равен $a \in \mathbb{R}, +\infty, -\infty, \infty$

ε -окрестность точки

Бесконечно большая последовательность

Тема «Сходящиеся последовательности»

Определения

Сходящаяся (расходящаяся) последовательность

Бесконечно малая последовательность

Формулировки

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Теорема о единственности предела последовательности

Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой последовательности

Теорема о связи последовательности, её предела и бесконечно малой последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема об арифметических операциях со сходящимися последовательностями

Теорема о зажатой последовательности

Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей
Теорема Вейерштрасса о пределе ограниченной монотонной последовательности

Доказательства

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности
Теорема о единственности предела последовательности
Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой последовательности
Теорема о связи последовательности, её предела и бесконечно малой последовательности
Свойства бесконечно малых последовательностей
Теорема об арифметических операциях со сходящимися последовательностями
Теорема о зажатой последовательности
Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей

Тема «Число e »

Определения

Число e (через предел последовательности)

Тема «Непрерывность функции»

Определения

Предел функции в точке слева (справа)
Функция, непрерывная в точке (непрерывная справа или слева в точке)
Типы точек разрыва: устранимый, первого рода, второго рода
Функция, непрерывная на отрезке (на интервале)

Формулировки

Теорема о непрерывности сложной функции (композиции функций)
Теорема о непрерывности обратной функции
Теорема (теоремы) Вейерштрасса о функции: непрерывной на отрезке
Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции
Теорема о непрерывности значений функции
Теорема о нуле непрерывной функции

Тема «Предел функции (начало)»

Определения

Предел функции (при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$)
Бесконечно большая (малая) функция
Асимптоты: вертикальные, горизонтальные, наклонные

Формулировки

Чему равны коэффициенты k и b асимптоты $y = kx + b$ функции f

Доказательства

Чему равны коэффициенты k и b асимптоты $y = kx + b$ функции f

Тема «Предел функции (продолжение)»

Определения

Проколота ε -окрестность точки

Предел функции при $x \rightarrow x_0$

Бесконечно большая (малая) функция

Асимптоты: вертикальные, горизонтальные, наклонные

Тема «Сравнение функций: о-малое»

Определения

о-малое

Формулировки

Свойства о-малого

Доказательства

Свойства о-малого

Тема «Сравнение функций: О-большое»

Определения

О-большое

Тема «Сравнение функций: асимптотическая эквивалентность»

Определения

Эквивалентность (асимптотическая) функций ($f \sim g$ при $x \rightarrow x_0$) —

Формулировки

Свойства (асимптотически) эквивалентных функций f и g

Доказательства

Свойства (асимптотически) эквивалентных функций f и g

Демоверсия билета:

Формулировка в кванторах

1) Сформулируй в кванторах и неравенствах, что $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = +\infty$.

2) Обратная функция

3) Непрерывная функция в точке

4) Равномерно непрерывная функция на множестве

5) Свойства о-малого

6) Теорема о зажатой последовательности

7) Критерий Коши существования конечного предела функции в точке

8) Теорема Штольца

Доказательства

9) Свойства бесконечно малых последовательностей

10) Теорема о промежуточном значении непрерывной функции

11) Теорема об обратной функции

12) Всякая ли сходящаяся последовательность ограничена? Всякая ли ограниченная последовательность сходится?

13) Существует ли последовательность x_n такая, что

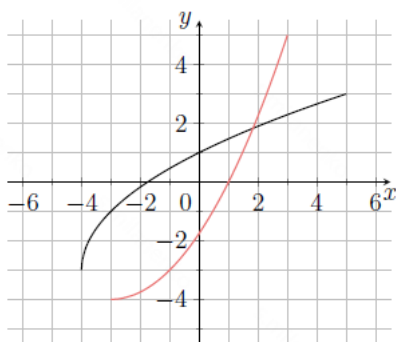
- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, и при этом $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < a$;
 б) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, и при этом $\forall n \in \mathbb{N} \exists k > n \exists l > n: x_k < a, x_l > a$?

- 14) Для некоторой последовательности $\{x_n\}$ существуют числа $\alpha \in (0; 1)$ и $C > 0$ такие, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x_n| < C\alpha^n$. Можно ли утверждать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится?

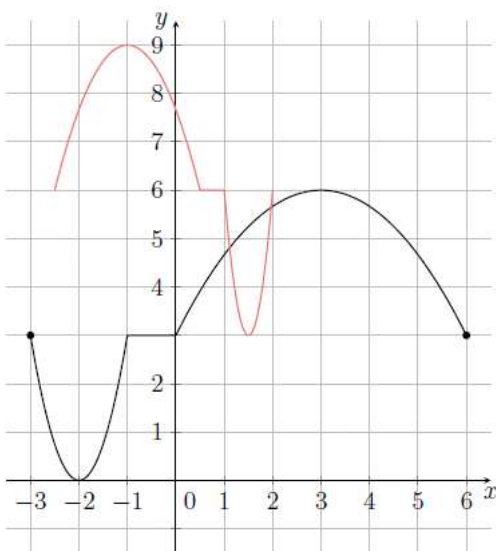
Примерные задания для контрольной работы

Контрольная работа №1

- Пусть $f(x) = (x - 5)^3$, $x \in \mathbb{R}$.
 а) Найди f^{-1} .
 б) Пусть функция g такова, что $(f \circ g)(x) = 8x^6$. Найди g .
- Дан график функции $y = f(x)$. Функция определена при $-4 \leq x \leq 5$.



- Запиши область определения и множество значений обратной функции f^{-1} .
 б) Нарисуй эскиз графика f^{-1} .
- Дан график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(1 - 2x) + 3$.



- Словами опиши последовательность преобразований для построения $y = h(x)$.
 б) Нарисуй эскиз графика функции $h(x)$.

$$\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2} \right)$$

4. Нарисуй эскиз графика функции $y(x) = \arccos$ на основе анализа интервалов монотонности.

5. Следующее утверждение верно для функции f :

$$\exists C: \forall x \in D(f) \exists a \in D(f): |f(a) \cdot f(x)| < C$$

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

6. Следующее утверждение верно для последовательности $\{a_n\}$:

$$\forall C > 0 \exists k \in \mathbb{N}: \exists n > k: |a_n| < C$$

Следует ли отсюда, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

7. Докажи, что последовательность $a_n = \frac{4n^2 + 6n + 13}{2n + 3}$

является возрастающей, начиная с некоторого номера N .

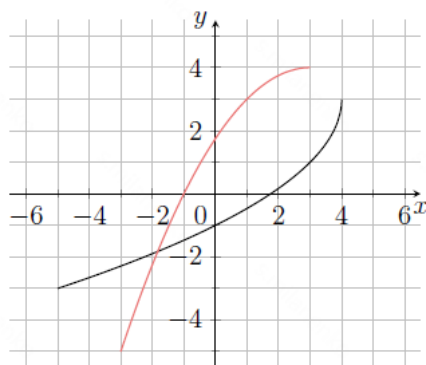
Контрольная работа №2

Пусть $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 7, x \in \mathbb{R}$.

а) Найди f^{-1} .

1. б) Пусть функция g такова, что $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 15$. Найди g .

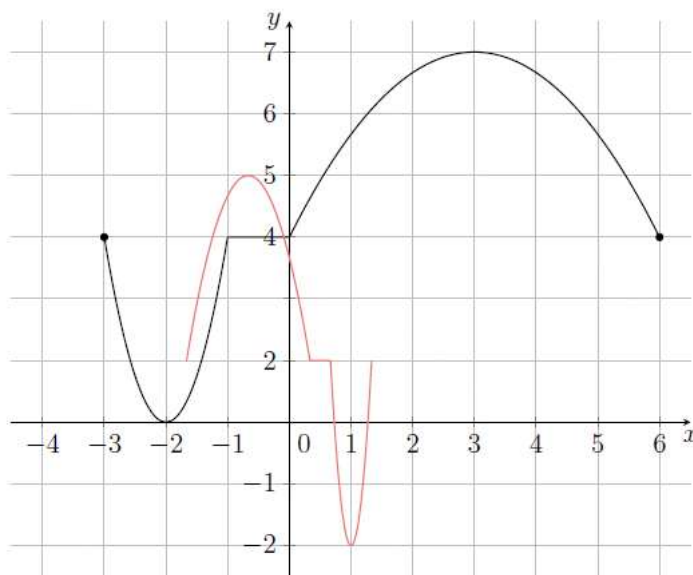
2. Дан график функции $y = f(x)$. Функция определена при $-5 \leq x \leq 4$.



а) Запиши область определения и множество значений обратной функции f^{-1} .

б) Нарисуй эскиз графика f^{-1} .

3. Дан график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(1 - 3x) - 2$.



а) Словами опиши последовательность преобразований для построения $y = h(x)$.

б) Нарисуй эскиз графика функции $h(x)$.

4. Нарисуй эскиз графика функции $y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right)$

на основе анализа интервалов монотонности.

5. Следующее утверждение верно для функции $f(x)$:

$$\forall C > 0 \exists a \in \mathbb{R} : \exists x > a : |f(x)| < C$$

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

6. Следующее утверждение верно для последовательности $\{a_n\}$:

$$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : |a_n \cdot a_k| < C$$

Следует ли отсюда, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1.

ЗАДАЧА 1	1 балл
Исследуйте на фундаментальность следующие последовательности	
1. $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$	
2. $x_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{n!}$	
3. $a_n = 0, \underbrace{7 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 7}_n$	
ЗАДАЧА 2	1 балл
Найти $\limsup x_n, \liminf x_n$, где	
1. $x_n = (-1)^{n+1} \left(3 + \frac{2}{n+1}\right)$	
2. $x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{5}$	
ЗАДАЧА 3	1 балл
Найдите все частичные пределы у последовательности	
$\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{25}, \frac{24}{25}, \frac{49}{25}, \frac{1}{125}, \frac{124}{125}, \frac{249}{125}, \dots$	
ЗАДАЧА 4	1 балл
Дана последовательность $\{a_n\}$:	
$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \dots$	
Построить числовую последовательность, для которой все элементы данной последовательности $\{a_n\}$ являются её частичными пределами. Какие ещё частичные пределы обязательно имеет данная последовательность?	
ЗАДАЧА 5	1 балл
Доказать, что последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$, где $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ имеют одни и те же частичные пределы.	
ЗАДАЧА 6	1 балл
Здесь всюду $A, B, \dots$ это какие-то непустые подмножества на прямой $\mathbb{R}$.	
1. Правда ли, что для любых множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}$ справедливы равенства	
$\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B),$	
$\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)?$	
Ответ обоснуйте.	
2. Правда ли, что для любых множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}$ справедливы равенства	
$\partial(A \cap B) = \partial(A) \cap \partial(B),$	
$\partial(A \cup B) = \partial(A) \cup \partial(B)?$	
Ответ обоснуйте.	
ЗАДАЧА 7	1 балл
Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется нигде не плотным, если $\overline{\text{Int}(X \setminus A)} = \mathbb{R}$.	
1. Покажите, что множество A нигде не плотно тогда и только тогда, когда в любой окрестности любой его точки существует точка, входящая в $\mathbb{R} \setminus A$ вместе с некоторой своей окрестностью.	
2. Покажите что множество Кантора нигде не плотно.	
ЗАДАЧА 8	3 балла
Постройте три открытых множества на прямой, имеющих одну и ту же границу. Можно ли в Вашем построении увеличить число множеств?	

Домашнее задание 2.

ЗАДАЧА 1	2 балла
Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \log x$, $y = \log^2 x$.	
ЗАДАЧА 2	2 балла
Вычислить с помощью интеграла объём конуса с радиусом R и высотой H .	
ЗАДАЧА 3	2 балла
Найдите объём фигуры, полученной при пересечении двух прямых круговых цилиндров радиуса R , оси которых перпендикулярны и пересекаются.	
ЗАДАЧА 4	2 балла
Кривую, заданную в полярных координатах $\rho = 10 \sin \theta$ начали вращать вокруг полярной оси в пространстве, в итоге получалась фигура вращения. Найдите объём полученной фигуры.	
ЗАДАЧА 5	2 балла
Докажите следующий результат. Если положительная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывную производную, то площадь поверхности вращения, заметаемая кривой $y = f(x)$ это интеграл	
$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$	
После этого найдите площадь поверхности шара радиуса R .	

Домашнее задание 3.

ЗАДАЧА 1	1 балл
Используя лишь определение производной докажите, что	
1.	$(a^x)' = a^x \log(a).$
2.	$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}.$
ЗАДАЧА 2	1 балл
Найдите производную функции $f(x)$, если	
1.	$f(x) = \log_a(x).$
2.	$f(x) = \arccos(x)$
3.	$f(x) = \frac{\log(\sin(x^2))}{e^{x^3+1}}$
4.	$f(x) = x^{\sin(x)}, \quad x > 0.$
ЗАДАЧА 3	1 балл
Докажите, что полином	
$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$	
не имеет кратных корней.	
ЗАДАЧА 4	1 балл
Докажите, что среднее арифметическое корней полинома степени n , имеющего n различных корней, равно среднему арифметическому корней его производной.	
ЗАДАЧА 5	1 балл
Касательная к кривой $y = e^x$ в точке (x_0, y_0) пересекает ось Ox в точке $(x_1, 0)$. Докажите, что разность $x_1 - x_0$ одна и та же для всех точек кривой.	
ЗАДАЧА 6	1 балл
Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причём $f'(x) = 0$ для всех $x \in [a, b]$. Докажите, что $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$.	
ЗАДАЧА 7	1 балл
Пусть $0 < \alpha < 1$ и $x \geq 0$. Докажите, что	
1.	$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha.$

2.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

где $a, b, p, q \in \mathbb{N}$, причём $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

ЗАДАЧА 8

1 балл

Докажите неравенства¹

$$\alpha \sin(\beta) < \beta \sin(\alpha), \quad \alpha \tan(\beta) > \beta \tan(\alpha), \quad e^x > 1 + x,$$

где $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ и $x \neq 0$.

ЗАДАЧА 9

2 балла

Найдите пределы используя правило Лопиталю

1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{\tan 3x}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right)$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2x-\pi}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$$

Примерные задания для лабораторной работы

1. Проверьте, является ли множество $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ открытым, замкнутым или компактным. Обоснуйте каждый пункт ответа.

2. Исследуйте сходимость последовательности. В случае сходимости найдите её предел:

$$a_n = \frac{n+1}{2n+(-1)^n}$$

3. Используя критерий Коши, докажите, что последовательность сходится:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

4. Постройте график непрерывной функции на отрезке $[0][1]$, которая достигает своих максимума и минимума. Объясните, всегда ли это возможно и почему.

5. Найдите производную функции $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ и вычислите значение её дифференциала при $x=1$, $dx=0.01$.

6. Вычислите предел, применив правило Лопиталю. Убедитесь в применимости условия теоремы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

7. Найдите неопределённый интеграл $\int x \cos(2x) dx$, используя метод интегрирования по частям. Выполните проверку дифференцированием.

8. Вычислите определённый интеграл, выполнив замену переменной. Проверьте результат с помощью формулы Ньютона–Лейбница:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$$

9. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость. Сделайте вывод о поведении ряда при перестановке членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

10. Исследуйте последовательность функций $f_n(x) = \frac{x}{n}$ на равномерную сходимость на отрезке $[0][1]$. Приведите аналитическое обоснование.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Найди предел $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1).$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	5,00/5.00	ОПК-1
2.	Найди вертикальную асимптоту функции $f(x) = \frac{x^3}{x - 2}.$ Ответ запиши в виде $x = a$, где a – число. А. $x=0$ Б. $x=1$ В. $x=2$ Г. $x=3$	В	ПК-1
3.	Найди предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n + 1}.$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	2,00/2.00	ОПК-1

4.	Найди предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{3(x - 1)}.$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	0,33/0.33	ПК-1
5.	Последовательность задана уравнением: $a_n = n^2 + 2025$. Является ли она: А. Возрастающей; Б. Убывающей; В. Не монотонной.	А	ПК-1
6.	Найди точку экстремума функции $y(x) = x^2 - 4x + 3$	2	ПК-1
7.	Определи промежутки убывания функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$ А. $(-\infty; 0)$ Б. $(2; +\infty)$ В. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ Г. $(0; 2)$	Г	ОПК-1
8.	Найди максимальное значение функции $f(x) = 5xe^{1-x}$ на отрезке $[0; 3]$. А. 3 Б. 5 В. 7 Г. 9	Б	ПК-1
9.	Найди вторую производную функции $f(x) = x^4 + \ln(x)$ в точке $x_0 = 2$. Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	47,75/47.75	ОПК-1
10.	Найди точку разрыва функции	А	ПК-1

	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{ x - 2 }.$ Выбери правильный вариант ответа: А. $x = 2$ Б. $x = -2$ В. $x = 2$ и $x = -2$ Г. Функция непрерывна		
11.	Дана функция $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leq 0; \\ ax + b, & \text{если } 0 < x < 2; \\ 2x + 3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$ Выбери все пары значений a и b, при которых функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. А. $a = 2, b = 0$; Б. $a = 3, b = 1$; В. $a = 1, b = 1$; Г. $a = 3, b = 0$.	Б	ОПК-1
12.	Рассчитайте предел последовательности $\{n/(n+1)\}$ при n , стремящемся к бесконечности	1	ОПК-4
13.	Определите сумму первых 10 членов арифметической прогрессии с разностью 2 и первым членом 1	55	ОПК-4
14.	Вычислите предел функции $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ при x , стремящемся к 1	2	ОПК-4