
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«25» мая 2026 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Линейная алгебра и геометрия. Часть 1»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Математика и компьютерные науки

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2026

**Москва
2026**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	7
5. Учебно-методическое обеспечение	9
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и компьютерные науки», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) дает развитие аналитического мышления, навыков работы с математическими моделями и понимания пространственных структур, что является основой для дальнейшего изучения более сложных математических и компьютерных дисциплин.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и компьютерные науки» и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия» имеет два уровня подготовки: основной и продвинутый поток. Обучающиеся распределяются на соответствующие уровни по итогам входного тестирования по дисциплине (модулю).

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- освоение фундаментальных понятий и геометрических интерпретаций линейной алгебры;
- применение алгоритмов и методов для решения вычислительных задач;
- интеграция теории с доказательствами и прикладными моделями.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- основные понятия линейной алгебры: матричную алгебру, векторные пространства, линейную зависимость и независимость, определители, линейные операторы, скалярные произведения;
- основные алгоритмы решения задач линейной алгебры: метод Гаусса для решения систем линейных уравнений, методы нахождения обратной матрицы, диагонализацию, метод ортогонализации Грама–Шмидта;
- геометрическую интерпретацию ключевых понятий и утверждений линейной алгебры;
- матричную и векторную форму записи линейных моделей;
- основные направления применения линейной алгебры в математических и статистических моделях (в том числе цепи Маркова, метод главных компонент и др.).

уметь:

- решать системы линейных уравнений матричными методами (метод Гаусса, метод Крамера);
- выполнять операции с матрицами: сложение, умножение, транспонирование, нахождение обратной матрицы;
- вычислять определители матриц и находить ранг матрицы;

- работать с векторными пространствами: определять базис, размерность, координаты векторов в заданном базисе;
- находить собственные значения и собственные векторы и использовать их для диагонализации матриц;
- вычислять скалярные произведения и нормы векторов в евклидовом пространстве;
- применять метод ортогонализации Грама–Шмидта для построения ортонормированных базисов;
- объяснять логику доказательств основных теорем курса, опираясь на приведённые доказательства;
- применять теоремы курса для доказательства простых утверждений и решения типовых задач.

владеть:

- навыками использования методов линейной алгебры для решения теоретических и прикладных задач (в том числе задач с матричными и векторными моделями);
- навыками работы с координатными представлениями и сменой базисов при анализе линейных операторов и преобразований;
- навыками структурного анализа линейных пространств (через базисы, размерности, собственные значения и векторы, ортогонализацию) для упрощения постановки и решения задач;
- навыками интерпретации алгебраических результатов в геометрических и прикладных терминах (например, в задачах статистики, марковских процессов, снижения размерности);
- навыками строгого и последовательного обоснования решений, опирающегося на теоремы и определения курса линейной алгебры.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности.
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
ПК-1.	Способен формулировать естественнонаучные задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в	ПК-1.1.	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.

	области математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с естественнонаучными задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач, а также участие в обследовании предметной области и согласовании требований с бизнес-пользователями

3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятель ная работа	
		Лекции	Семинары (практичес кие занятия)			
1	Матрицы	4	8		12	Домашнее задание
2	Линейные системы	2	4		6	Домашнее задание
3	Геометрия на плоскости и в пространстве	4	8	2	12	Домашнее задание Контрольная работа
4	Векторные пространства	2	4		6	Домашнее задание
5	Линейные отображения	4	8		12	Домашнее задание
6	Ранги	2	4	2	6	Домашнее задание Контрольная работа
7	Определители	4	8		12	Домашнее задание
8	Линейные операторы	8	16	2	24	Домашнее задание Коллоквиум
	Экзамен			4		
Итого по дисциплине (модулю)		30	60	10	90	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		190				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Матрицы	Основные свойства умножения матриц. Транспонирование. След квадратной матрицы. Специальные виды матриц. Обратная матрица. Блочные формулы. Элементарные преобразования строк. Ступенчатый и улучшенный ступенчатый вид матрицы. Метод Гаусса. Нахождение обратной матрицы
2	Линейные системы	Матрица и расширенная матрица линейной системы. Однородные и неоднородные системы. Фундаментальная система решений. Линейная оболочка
3	Геометрия на плоскости и в пространстве	Декартовы координаты. Скалярное произведение. Прямые на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости. Нормальный вектор. Проекции. Расстояния между плоскостями. Определители матриц 2×2 и 3×3 . Векторное произведение. Площади и объёмы
4	Векторные пространства	Векторные пространства. Линейная оболочка. Линейная зависимость и независимость. Базис и размерность. Координаты вектора в базисе
5	Линейные отображения	Подпространства, их сумма и пересечение. Линейные отображения. Изоморфизмы. Матрица линейного отображения. Ядро и образ.

		Смена базиса. Изменение матрицы линейного отображения при смене базисов. Ранг матрицы. Классификация линейных отображений
6	Ранги	Свойства ранга. Строчный и столбцовый ранги. Связь ранга с методом Гаусса. Критерий совместности линейной системы.
7	Определители	Определитель матрицы. Основные свойства определителей. Разложение по строке и столбцу. Определитель произведения матриц. Связь определителя с рангом и обратимостью матрицы. Присоединённая матрица. Формула обратной матрицы. Формулы Крамера. Решение линейных систем с помощью определителей
8	Линейные операторы	Линейные операторы. Инвариантные подпространства. Прямые суммы подпространств. Проекторы и их матрицы. Спектр линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы. Собственные подпространства. Диагонализация. Многочлены от линейного оператора. Минимальный многочлен. Характеристический многочлен. Теорема Гамильтона — Кэли. Двойственное пространство. Линейные функционалы. Сопряжённый оператор и его матрица

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Заболотский, В. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия (учебный комплекс) : учебное пособие / В.С. Заболотский. — 2-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 309 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-110519-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1872461>.

2. Литаврин, А. В. Линейная алгебра : учебное пособие / А. В. Литаврин, Т. В. Моисеенкова. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2022. - 244 с. - ISBN 978-5-7638-4604-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2092907>.

3. Шевцов, Г. С. Численные методы линейной алгебры : учебное пособие / Г. С. Шевцов, О. Г. Крюкова, Б. И. Мызникова. — 3-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2026. — 528 с. - ISBN 978-5-16-016796-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2211865>.

Дополнительная литература:

1. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15839-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560017>.

2. Сабитов, И. Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для вузов / И. Х. Сабитов, А. А. Михалев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 258 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08941-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/539950>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное

Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, коллоквиумы, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные

конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашнее задание	15%	14	Набор задач по темам недели
Контрольная работа	20%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	30%	1	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Экзамен	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1»:

Основной уровень: $0,15 \times \text{среднее за домашние задания} + 0,2 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,3 \times \text{коллоквиум} + 0,35 \times \text{экзамен}$.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные вопросы к коллоквиуму

Тема «Системы линейных уравнений»

- Совместная и несовместная система
- Определённая и неопределённая система
- Однородная и неоднородная система
- Матрица
- Главная и побочная диагонали
- Элементарные преобразования строк
- Ступенчатый вид матрицы
- Главные и свободные переменные
- Как по ступенчатому виду понять, что система определена?
- Сколько может быть решений у системы линейных уравнений?
- Прямой ход алгоритма Гаусса
- Обратный ход алгоритма Гаусса

Тема «Операции над матрицами»

- Сумма матриц
- Нулевая матрица
- Произведение матрицы на число
- Произведение матриц
- Пример некоммутативности матричного умножения
- Коммутирующие матрицы
- Делители нуля
- Нильпотентные матрицы
- Транспонирование матриц
- Симметричная матрица
- След матрицы
- Блочное умножение матриц
- Умножение на диагональную матрицу
- Транспонирование от произведения матриц
- След от произведения матриц

Тема «Обратные матрицы. Матричные уравнения»

- Единичная матрица
- Обратная матрица
- Матрицы элементарных преобразований *I*, *II*, *III* типов и их обратные
- Подстановка матрицы в многочлен
- Матрицы, коммутирующие с диагональной матрицей с разными числами на диагонали
- Классификация систем линейных уравнений
- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Эквивалентные условия обратимости матрицы
- Подстановка в многочлен матрицы $C^{-1}AC$
- Алгоритм поиска обратной и проверки обратимости
- Алгоритм решения уравнений $AX = B$
- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Только квадратные матрицы обратимы

Тема «LU-разложение»

- LU-разложение

Тема «Векторные пространства»

- Векторное пространство
- Пример векторного пространства отличный от R^n или матриц
- Подпространство векторного пространства
- Линейная комбинация векторов
- Линейно независимый набор векторов

- Коллинеарные векторы
- Компланарные векторы
- Линейная оболочка системы векторов
- Порождающая система векторов
- Базис
- Размерность векторного пространства
- Координаты вектора в базисе
- Матрица перехода между базисами
- Критерий подпространства
- Достаточное условие линейной зависимости в n -мерном пространстве
- Три эквивалентных условия для базиса в n -мерном пространстве
- Критерий подпространства
- Совпадение размеров базисов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм дополнения линейно независимой системы до базиса

Тема «Определители матриц»

- Определители матрицы 2 на 2 и 3 на 3
- $i j$ -ый минор матрицы
- $i j$ -ое алгебраическое дополнение матрицы
- Невырожденная матрица
- Присоединённая матрица
- Формула разложения определителя по строке
- Изменение определителя при элементарных преобразованиях
- Определитель транспонированной матрицы
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц
- Связь линейной зависимости и определителя
- Линейность определителя по строке
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы (через алгебраические дополнения)
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы
- Определитель Вандермонда

Тема «Фундаментальная система решений»

- Строчный ранг матрицы
- Базисный минор
- Фундаментальная система решений
- Тривиальная оценка на ранг матрицы
- Теорема о базисном миноре
- Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
- Размерность пространства решений однородной системы
- Связь решений однородной и неоднородной системы
- Теорема Кронекера-Капелли
- Размерность ФСР
- Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
- Теорема Кронекера-Капелли

Тема «Сумма и пересечение подпространств»

- Пересечение подпространств
- Пример, когда объединение подпространств — не подпространство
- Сумма подпространств
- Прямая сумма двух подпространств
- Теорема о неполном базисе
- Связь размерности суммы и пересечения подпространств (Формула Грассмана)
- Алгоритм поиска ФСР
- Алгоритм поиска скелетного разложения

Примерные задания для контрольной работы

1. Решить систему $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Выпиши базис решений (ФСР) соответствующей однородной системы $Ax = 0$;
Найди решения неоднородной системы линейных уравнений $Ax = b$.
Запиши решения неоднородной СЛУ через ФСР, через базис, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Дана матрица $A \in M_3(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Найди LU -разложение для A .
2. Найди разложение A в произведение элементарных матриц.
3. Найди определитель матрицы A .
4. Запиши матрицу линейного оператора поворота на 30° в $\mathbb{R}^2$.
5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы векторы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Проверь, что f_1, f_2, f_3 формируют базис в $\mathbb{R}^3$.
2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{f_1, f_2, f_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.
3. Найди координаты векторов v_1 и v_2 в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$.
6. Проверь, является ли отображение линейным. $\varphi: \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$, где
 $\varphi(f) = f' + f(2) - fg + (fh)'$
 $g = 2 + x + x^4, h = x + x^2$
7. Посчитай определитель матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1.

ЗАДАЧА 1

Вычислить определители матрицы:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad 2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 2

Доказать, что определитель

$$\det \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & a \\ z_2 & \bar{z}_2 & b \\ z_3 & \bar{z}_3 & c \end{pmatrix},$$

где z_1, z_2, z_3 — комплексные, а a, b, c — вещественные числа, является чисто мнимым числом.

ЗАДАЧА 3

Доказать равенство

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧА 4

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

выписать все перестановки σ , для которых соответствующее слагаемое в определителе не равно нулю. Для каждой такой перестановки найдите произведение соответствующих ей элементов и знак перестановки.

новки.

ЗАДАЧА 5

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

посчитать определитель.

ЗАДАЧА 6

Приведением к треугольному виду вычислить определитель

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Домашнее задание 2.

ЗАДАЧА 1 **1.5 балл**

Является ли следующее отображение билинейным:

$$\beta: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \mapsto \det(X) \operatorname{tr}(YX^{-1}) + \operatorname{tr}(XY)$$

ЗАДАЧА 2 **1.5 балл**

Пусть билинейная форма $\beta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ задана по правилу $\beta(x, y) = x^T B y$, где

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите матрицу билинейной формы β в следующем базисе:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧА 3 **1.5 балл**

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы билинейная форма β и линейное отображение $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ по правилам $\beta(x, y) = x^T B y$ и $\varphi(x) = Ax$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдите матрицу билинейной формы $\gamma(x, y) = \beta(\varphi(x), \varphi^{-1}(y))$ в стандартном базисе.

ЗАДАЧА 4 **1.5 балл**

В пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ задана билинейная форма $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу $\beta(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.
Найдите матрицу этой формы в базисе $1, x, x^2$.

ЗАДАЧА 5 **2 балл**

Для фиксированных матриц $A \in M_2(\mathbb{R})$ рассмотрим билинейную форму

$$\beta: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \mapsto \operatorname{tr}(AXY)$$

Найдите ранг β .

ЗАДАЧА 6 **2 балл**

Пусть билинейная форма β задана следующим образом

$$\beta: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto f(1) \int_0^1 g(t) dt$$

Найдите ранг β .

Домашнее задание 3.

ЗАДАЧА 1	1.5 балла
Пусть задана матрица	
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	
Найдите базис для пространства	
$U = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$	
и определите его размерность.	
ЗАДАЧА 2	1.5 балла
В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы векторы	
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
1. Проверьте, что f_1, f_2, f_3 является базисом в $\mathbb{R}^3$.	
2. Найдите матрицу перехода от стандартного базиса e_1, e_2, e_3 к базису f_1, f_2, f_3 и матрицу перехода в обратном направлении.	
3. Найдите координаты векторов v_1 и v_2 в базисе f_1, f_2, f_3 .	
ЗАДАЧА 3	1 балл
Рассмотрим в качестве векторного пространства $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Проверить, что заданный вектор лежит в указанной линейной оболочке и найти его координаты в указанном базисе.	
1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ в базисе $\{\sin(x), \cos(x)\}$.	
2. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ в базисе $\left\{\frac{1}{x-1}, \frac{1}{x-2}, \frac{1}{x-3}\right\}$.	
ЗАДАЧА 4	1.5 балла
В пространстве $\mathbb{R}[x]$ заданы многочлены:	
$\begin{aligned} f_1 &= -x^3 + x^2 + 2x + 1, \\ f_2 &= 2x^3 + 2x^2 + x - 1, \\ f_3 &= -3x^3 - x^2 + x + 2, \\ f_4 &= 3x^3 + 5x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$	
Пусть $U = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$. Определите $\dim U$.	
ЗАДАЧА 5	1.5 балла
Доказать, что система матриц E_1, E_2, E_3, E_4 образует базис пространства $M_2(\mathbb{R})$. Построить другой базис этого пространства так, чтобы ни одна из его матриц не была линейной комбинацией каких-либо двух матриц E_1, E_2, E_3, E_4 .	
$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	
ЗАДАЧА 6	1 балл
Для матрицы	
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	
найдите скалярное разложение.	
ЗАДАЧА 7	2 балла
Привести к нулю подпространство U внутри подпространства W , где	
1. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$	
2. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} y = 0 \right\}$	
3. $U = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} y = 0 \right\}, W = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -8 & -3 & 7 \end{pmatrix} y = 0 \right\}$	

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Найди ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$	1	ПК-1
2.	Найди ранг системы векторов в $\mathbb{R}^2$: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$	2	ПК-1

3.	Найди след обратной матрицы A^{-1} к $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$	4	ОПК-1
4.	Найди собственные значения матрицы A^2, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ В ответ выпиши два числа в порядке возрастания через точку с запятой и без пробелов.	1;9	ОПК-4
5.	Найди сумму элементов матрицы X: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$ В ответ выпиши искомую сумму.	13	ПК-1
6.	Найди косинус угла между векторами: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	0,5/0.5	ПК-1
7.	Вычисли $tr(A) + tr(B) + det(A)$, если : $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$	20	ПК-1
8.	Вычисли скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, если известно, что $\ \mathbf{u}\ = 10$, $\ \mathbf{v}\ = 7$ и угол между ними равен 60°.	35	ПК-1
9.	Дана матрица A. Найди её определитель: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$	1	ОПК-4
10.	Найди размерность пространства решения уравнения: $x_1 + x_2 + x_3 = 0.$	2	ПК-1

11.	Найди собственные значения и собственные вектора матрицы A, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$ В ответ выпиши собственные значения через точку с запятой, в порядке возрастания, без пробелов.	0;2	ОПК-1
12.	Реши систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$ В ответ выпиши решение x_1, x_2 через точку с запятой и без пробелов.	2;1	ПК-1