
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«25» июня 2025 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 2»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Математика и компьютерные
Науки

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2026

**Москва
2026**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	7
5. Учебно-методическое обеспечение	8
6. Материально-техническое обеспечение	8
7. Методические и оценочные материалы	10

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 2» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и компьютерные науки», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 2» является основой для многих других математических дисциплин и научных направлений, включая физику, экономику и инженерные науки. Дисциплина развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и компьютерные науки» и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе во 2 семестре. Доступна после успешного освоения дисциплины (модуля) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 1»

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- формирование понимания терминов, основных теорем, связанных с исследованием функции на экстремум и выпуклость, построение графиков функции и их анализ с помощью производной;
- обучение навыкам вычисления предела последовательности и функции, исследования функции на непрерывность и дифференцируемость;
- применение производных к исследованию функций и построение график функций, применение формулы Тейлора к нахождению пределов и другое.

В результате освоения дисциплины (модуля) в 1 семестре обучающийся должен:

знать:

- основные понятия анализа функций многих переменных: определения и свойства предела, непрерывности, дифференцируемости в пространстве R^n .
- основы матричного исчисления: основные операции над матрицами, свойства определителей, методы нахождения ранга и обратной матрицы.
- методы исследования функций на экстремум: алгоритмы нахождения частных производных, градиента, необходимые и достаточные условия безусловного экстремума, метод множителей Лагранжа для условной оптимизации.
- теоретические основы интегрального исчисления: определения, свойства и смысл определенного, неопределенного и кратного интегралов (двойных, тройных).
- математический аппарат для замены переменных: теорию и применение матрицы Якоби для вычисления кратных интегралов;

уметь:

- выполнять дифференциальные операции: находить частные производные, градиент, производную по направлению и применять их для приближенных вычислений.

— работать с матрицами и СЛАУ: выполнять операции с матрицами, решать системы линейных уравнений методами Гаусса и с помощью обратной матрицы.

— исследовать функции на безусловный и условный экстремум: применять изученные алгоритмы для нахождения экстремумов функций многих переменных.

— вычислять интегралы: находить неопределенные, определенные и кратные интегралы в декартовых координатах.

— применять интегралы к прикладным задачам: использовать интегральное исчисление для вычисления площадей, объемов, массы, статических моментов и других геометрических и физических величин;

владеть:

— математическим аппаратом для анализа многопараметрических моделей: использовать дифференциальное исчисление функций многих переменных для анализа и описания моделей, зависящих от нескольких факторов.

— матричным исчислением как инструментом: применять методы матричного анализа для работы с линейными преобразованиями и системами уравнений.

— навыками решения оптимизационных задач: владеть методикой решения типовых задач безусловной и условной оптимизации, возникающих в экономике, менеджменте и технических науках.

— методикой вычисления кратных интегралов: уверенно применять технику интегрирования для вычисления двойных и тройных интегралов.

— комплексным подходом к решению прикладных задач: интегрировать знания из дифференциального, интегрального и матричного исчисления для решения практических проблем.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности.
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
ПК-1.	Способен формулировать естественнонаучные задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в	ПК-1.1.	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.

	области математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с естественнонаучными задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач, а также участие в обследовании предметной области и согласовании требований с бизнес-пользователями

3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятель ная работа	
		Лекции	Семинары (практичес кие занятия)			
1	Многомерный анализ: функции в пространстве R^n	16	32	2	50	Домашнее задание Проект Контест
2	Линейная алгебра: матрицы и их свойства, решение СЛУ, спектральная теорема. Гессиан и квадратичное приближение функции двух переменных.	24	48	4	76	Домашнее задание Контрольная работа Контест
3	Интегралы. Применение интегралов	20	40	2	62	Домашнее задание Проект Контест
	Экзамен			4		
Итого за 2 семестр:		60	120	12	188	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		380				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		10				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Многомерный анализ: функции в пространстве R^n	Функция нескольких переменных. График функции нескольких переменных. Линии уровня. Критические точки функции многих переменных. Градиент. Метод множителей Лагранжа. Линейное приближении векторной функции векторного аргумента. Матрица производных.
2	Линейная алгебра: матрицы и их свойства, решение СЛУ, спектральная теорема. Гессиан и квадратичное приближение функции двух переменных.	Алгебра матриц. Производная композиции функций многих переменных. Свойства матричных операций. Решение систем линейных уравнений: метод Гаусса. QR/LU разложения. Собственные значения и собственные вектора. Спектральная теорема, квадратичная форма. Полный алгоритм поиска экстремумов.
3	Интегралы. Применение интегралов	Первообразная. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Неопределенный интеграл. Геометрические приложения определенных интегралов. Кратные интегралы. Замена переменной в кратных интегралах.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Пантелеев, А. В. Математический анализ : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Н. И. Савостьянова, Н. М. Федорова. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 502 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1077332. - ISBN 978-5-16-016008-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1898119>.

2. Математический анализ : учебное пособие / О.И. Воронин, В. А. Жулего, С. М. Демидов [и др.]. ; под ред. А. М. Попова. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. - 224 с. - ISBN 978-5-9729-1720-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2171787>.

3. Абрамян, М. Э. Abramyan, M. E. Lectures on integral calculus of functions of one variable and series theory : textbook / M. E. Abramyan ; Southern Federal University. - Rostov-on-Don ; Taganrog : Southern Federal University Press, 2021. - 252 p. - ISBN 978-5-9275-3829-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1894441>.

4. Математический анализ. Задачи и упражнения. Часть 3 : учебное пособие / С. А. Бондарей, Е. В. Громак, В. Г. Кротов [и др.]. - Минск : Адукацыя і выхаванне, 2025. - 241 с. - ISBN 978-985-599-989-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2219545>.

Дополнительная литература:

1. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

2. Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560461>.

3. Малугин, В. А. Линейная алгебра: практический курс для экономистов : учебник и практикум для вузов / В. А. Малугин, Я. А. Рощина. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 361 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19706-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560578>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех

видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		

Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 2» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, контесты, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Проект – исследовательская работа по курсу и презентация результатов.

Для успешной подготовки к проекту рекомендуется: четко определить цели и задачи проекта; составить план работы, разбив проект на этапы с указанием сроков выполнения каждого из них; использовать разнообразные источники информации и инструменты для исследования темы; регулярно проверять прогресс и вносить коррективы в план, если это необходимо.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Контекст – интерактивная платформа с заданиями разного уровня сложности и автоматической проверкой результатов.

Контекст позволяет оперативно оценивать усвоение материала и выявлять пробелы в знаниях через тесты и практические задачи. Такой формат способствует регулярной самопроверке и повышает мотивацию к изучению дисциплины.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 2»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	
8	Отлично	
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

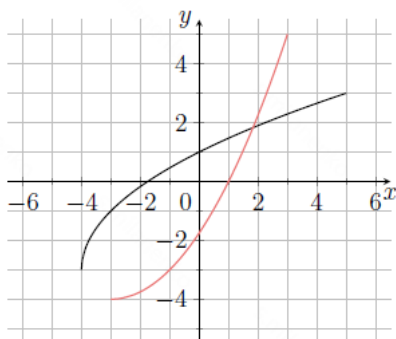
Дисциплина (модуль) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 2» в каждом семестре оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	15%	1	Набор задач по темам недели
Контекст	20%	9	Решение заданий на интерактивной платформе с заданиями разного уровня сложности и автоматической проверкой результатов
Контрольная работа	25%	4	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Проект	10%	2	Исследовательская работа по дисциплине (модулю) и презентация результатов
Экзамен	30%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

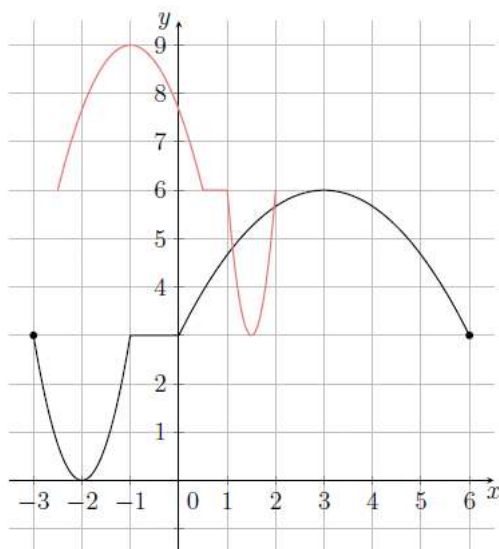
Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Основы математического анализа и линейной алгебры. Часть 2»: $0,15 \times \text{среднее за домашние задания} + 0,2 \times \text{среднее за контекст} + 0,25 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,1 \times \text{среднее за проект} + 0,3 \times \text{за экзамен}$.

**Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)
Примерные задания для контрольной работы
Контрольная работа №1**

- Пусть $f(x) = (x - 5)^3$, $x \in \mathbb{R}$.
а) Найди f^{-1} .
б) Пусть функция g такова, что $(f \circ g)(x) = 8x^6$. Найди g .
- Дан график функции $y = f(x)$. Функция определена при $-4 \leq x \leq 5$.



- Запиши область определения и множество значений обратной функции f^{-1} .
 - Нарисуй эскиз графика f^{-1} .
- Дан график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(1 - 2x) + 3$.



- а) Словами опиши последовательность преобразований для построения $y = h(x)$.
 б) Нарисуй эскиз графика функции $h(x)$.

4. Нарисуй эскиз графика функции $y(x) = \arccos\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right)$ анализа интервалов монотонности.

5. Следующее утверждение верно для функции f :

$$\exists C: \forall x \in D(f) \exists a \in D(f): |f(a) \cdot f(x)| < C$$

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

6. Следующее утверждение верно для последовательности $\{a_n\}$:

$$\forall C > 0 \exists k \in \mathbb{N}: \exists n > k: |a_n| < C$$

Следует ли отсюда, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

7. Докажи, что последовательность $a_n = \frac{4n^2 + 6n + 13}{2n + 3}$

является возрастающей, начиная с некоторого номера N .

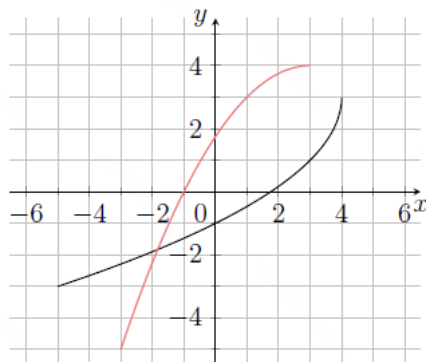
Контрольная работа №2

Пусть $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 7, x \in \mathbb{R}$.

а) Найди f^{-1} .

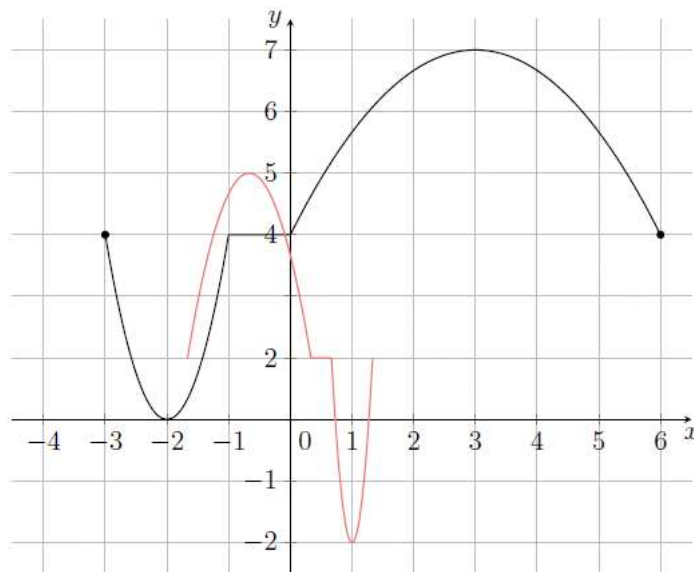
1. б) Пусть функция g такова, что $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 15$. Найди g .

2. Дан график функции $y = f(x)$. Функция определена при $-5 \leq x \leq 4$.



- а) Запиши область определения и множество значений обратной функции f^{-1} .
 б) Нарисуй эскиз графика f^{-1} .

3. Дан график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(1 - 3x) - 2$.



- а) Словами опиши последовательность преобразований для построения $y = h(x)$.
 б) Нарисуй эскиз графика функции $h(x)$.
4. Нарисуй эскиз графика функции $y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right)$

на основе анализа интервалов монотонности.

5. Следующее утверждение верно для функции $f(x)$:

$$\forall C > 0 \exists a \in \mathbb{R}: \exists x > a: |f(x)| < C$$

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

6. Следующее утверждение верно для последовательности $\{a_n\}$:

$$\exists C > 0: \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}: |a_n \cdot a_k| < C$$

Следует ли отсюда, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1.

Решения разных задач с помощью производной.

Дифференциал

ЗАДАЧА 1	1 балл Пусть $p(x)$ — это общий объём выпускаемой продукции при x рабочих. Тогда средняя производительность одного рабочего равна: $A(x) = \frac{p(x)}{x}.$ 0,5 балла а) Найди $A'(x)$. Ответь на вопрос: почему компания хочет нанимать больше работников, если $A'(x) > 0$? 0,5 балла б) Покажи, что $A'(x) > 0$, если $p'(x)$ больше средней производительности.
ЗАДАЧА 2	1 балл Длина прямоугольника увеличивается со скоростью 8 см/с, а ширина — со скоростью 3 см/с. Когда длина равна 20 см, а ширина 10 см, с какой скоростью увеличивается площадь прямоугольника?
ЗАДАЧА 3	1 балл Жёлоб для воды длиной 10 м имеет поперечное сечение в форме равнобокой трапеции: нижнее основание 30 см, верхнее — 80 см, высота 50 см. Если жёлоб наполняется водой со скоростью $0,2 \text{ м}^3/\text{мин}$, с какой скоростью повышается уровень воды, когда её глубина равна 30 см?
ЗАДАЧА 4	2 балла Найди линеаризацию $L(x)$ функции в точке a . 0,5 балла а) $f(x) = x^4 + 3x^2$, $a = -1$. 0,5 балла б) $f(x) = \ln x$, $a = 1$. 0,5 балла в) $f(x) = \cos x$, $a = \pi/2$. 0,5 балла г) $f(x) = x^{3/4}$, $a = 16$.
ЗАДАЧА 5	2 балла Используя линейное приближение функции или дифференциал, найди значения выражения: 0,5 балла а) $(2,001)^5$; 0,5 балла б) $e^{-0,015}$; 0,5 балла в) $\frac{1}{1002}$; 0,5 балла г) $\sqrt{99,8}$.
ЗАДАЧА 6	1,5 балла Пусть $f(x) = (x - 1)^2$, $g(x) = e^{-2x}$, $h(x) = 1 + \ln(1 - 2x)$. 1 балл а) Найди линеаризации f, g, h в точке $a = 0$. Что ты замечаешь? Как это объяснить?

0,5 балла	б) Построй графики функций f, g, h и их линейных приближений. Для какой функции линейное приближение наиболее точное, а для какой — наименее точное?
ЗАДАЧА 7	1 балл Найди дифференциал dy в точке x_0 : 0,5 балла а) $y = e^{x/10}, \quad x_0 = 0,$ 0,5 балла б) $y = \frac{1}{x+1}, \quad x_0 = 1.$
ЗАДАЧА 8	1,5 балла Найди производную порядка $n \in \mathbb{N}$ следующих функций: 0,5 балла а) $f(x) = \cos x;$ 0,5 балла б) $f(x) = \cos^2 x;$ Подсказка: воспользуйся тригонометрической формулой $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ 0,5 балла в) $f(x) = \frac{8}{x^2 - 16},$ Подсказка: представь дробь в виде суммы двух дробей
ЗАДАЧА 9	1 балл Найди $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{5x^5 - 6x - 1}.$
ЗАДАЧА 10	1 балл Найди $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^{10} - 70x + 63}{4x^5 - 20x + 16}.$
ЗАДАЧА 11	1 балл Найди $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - x}{x^3}.$
ЗАДАЧА 12	1 балл Найди $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\pi - 2 \arcsin \left(x / \sqrt{x^2 + 1} \right) \right).$
ЗАДАЧА 13	1 балл Найди $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{99}}.$
ЗАДАЧА 14	1 балл Найди $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}.$
ЗАДАЧА 15	1 балл Найди $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$
ЗАДАЧА 16	1 балл Найди $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\lg x}.$

Примерное задание для проекта

Задание для проекта по теме "Вектора в пространстве R^n "

Описание проекта

Студенты должны разработать и представить проект, демонстрирующий глубокое понимание ключевых концепций темы: векторов и операций с ними, скалярного произведения, неравенств Коши-Буняковского-Шварца и треугольника, метода наименьших квадратов, прямых и плоскостей в R^2 и R^3 , проекций точек на прямые и плоскости, линейных оболочек, подпространств, размерности, гиперплоскостей, базисов (ортогональных и ортонормированных), проекций в R^n и замены базиса. Проект должен включать как теоретические объяснения, так и практические приложения, например, в геометрии, статистике или машинном обучении. Формат проекта: письменный отчет (5-10 страниц) и устная защита (презентация 10-15 минут).

Цель проекта

Цель — закрепить теоретические знания через практическое применение, развить навыки анализа и презентации математических концепций, а также научиться применять векторные методы к реальным задачам (например, аппроксимация данных методом наименьших квадратов или анализ подпространств в геометрии). Проект способствует развитию критического мышления и умения связывать абстрактную математику с прикладными областями.

Сроки

- **Начало проекта:** [Дата старта, например, 1 неделя после выдачи задания].
- **Промежуточный этап:** [Через 2-3 недели] — сдача плана проекта (описание темы, цели и предварительных результатов).
- **Завершение проекта:** [Через 4-6 недель] — сдача полного отчета и подготовка к защите.
- **Защита:** [Через 1 неделю после сдачи отчета] — устная презентация и ответы на вопросы.

Сроки могут корректироваться преподавателем в зависимости от графика курса.

Этапы выполнения

1. **Подготовка и планирование (1 неделя):** Выберите конкретную задачу или приложение (например, "Применение метода наименьших квадратов для аппроксимации траектории движения" или "Анализ проекций в R^3 для компьютерной графики"). Соберите теоретический материал по теме и составьте план отчета.
2. **Теоретическая часть (1-2 недели):** Опишите ключевые понятия (определения, доказательства неравенств, алгоритмы метода Грама-Шмидта и т.д.). Включите примеры вычислений (скалярное произведение, проекции, замена базиса).
3. **Практическая часть (1-2 недели):** Решите задачу с вычислениями (например, найдите проекцию точки на плоскость, примените метод наименьших квадратов к набору данных, постройте ортонормированный базис). Используйте программные инструменты (Python с numpy, MATLAB или ручные расчеты) для иллюстраций.
4. **Анализ и выводы (1 неделя):** Обсудите результаты, их интерпретацию и возможные применения. Подготовьте отчет в формате PDF с формулами, графиками и ссылками.
5. **Подготовка к защите (1 неделя):** Создайте презентацию (PowerPoint или аналог) с ключевыми слайдами (введение, теория, вычисления, выводы). Практикуйте ответы на возможные вопросы.

Критерии оценивания

Оценка выставляется по 10-балльной шкале (максимум). Критерии:

- **Теоретическое содержание (3 баллов):** Глубина объяснений понятий (определения, доказательства), правильность формул и примеров. Полные баллы за точность и полноту.
- **Практическая часть (3 баллов):** Качество вычислений, точность решений задач, использование инструментов. Баллы снижаются за ошибки или отсутствие иллюстраций.

- **Анализ и выводы (2 баллов):** Критичность мышления, связь теории с практикой, оригинальность приложения. Баллы за релевантные интерпретации.
- **Отчет и оформление (1 баллов):** Структура, ясность, отсутствие ошибок, цитирование источников. Баллы за профессиональный вид.
- **Общий вклад (1 баллов):** Инновационность, усилия по углублению темы (например, дополнительные приложения).

Шкала: 9-10 — отлично, 8-7 — хорошо, 6-4 — удовлетворительно, ниже 3 — неудовлетворительно. Проект должен быть индивидуальным; плагиат ведет к нулевой оценке.

Критерии защиты

Защита проходит в форме устной презентации перед комиссией (преподаватель и возможно ассистенты). Критерии:

- **Презентация (5 баллов):** Четкость изложения (логика, темп речи, визуалы), охват всех этапов проекта, время (10-15 минут). Баллы за энтузиазм и умение заинтересовать аудиторию.
- **Ответы на вопросы (3 баллов):** Глубина понимания, корректность ответов на вопросы по теории и практике. Баллы за аргументированные объяснения и способность адаптироваться.
- **Общая подготовка (2 баллов):** Знание материала, уверенность, взаимодействие с аудиторией. Баллы снижаются за чтение с листа или отсутствие подготовки.

Оценка защиты влияет на итоговую оценку проекта (усредняется с оценкой отчета). В случае низкой оценки защиты возможна пересдача.

Примерные задания для конкурса

Контекст 1: Многомерный анализ — функции в пространстве R^n

1. Дана функция $f(x,y)=x^2+2xy-y^2$. Найдите значение градиента ∇f в точке (1,2).

Ответ: (6, -2)

Пояснение:

$$f_x = 2x + 2y = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6,$$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 \rightarrow f_y = 2x - 2y = 2 - 4 = -2$$

2. На каком направлении функция $f(x,y)=x^2+y^2$ быстрее всего возрастает в точке (1,1)?

Ответ: (2, 2)

Пояснение: Градиент $\nabla f=(2x,2y)=(2,2)$ — направление наискорейшего роста.

3. Какая линия уровня функции $f(x,y)=x^2+y^2$ проходит через точку (3,4)?

Ответ: $x^2+y^2=25$

Пояснение: $f(3,4)=9+16=25$

4. Найдите критическую точку функции $f(x,y)=x^2+y^2-4x+6y$.

Ответ: (2, -3)

Пояснение:

$$f_x = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2,$$

$$f_y = 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3$$

5. Максимизируйте $f(x,y)=xy$ при условии $x+y=10$, используя метод множителей Лагранжа. Чему равно максимальное значение?

Ответ: 25

Пояснение:

$$\mathcal{L} = xy - \lambda(x + y - 10)$$

$$\mathcal{L}_x = y - \lambda = 0, \mathcal{L}_y = x - \lambda = 0 \Rightarrow x = y, x + x = 10 \Rightarrow x = 5, f = 25$$

Контеcт 2: Линейная алгебра и анализ: матрицы, СЛУ, спектр, Гессиан

1. Решите систему методом Гаусса: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

Ответ: (1, 2)

Пояснение: Из первого: $x=5-2y$, подставим: $3(5-2y)+4y=15-6y+4y=15-2y=11 \Rightarrow y=2$, $x=1$

2. Найдите собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: 1, 3

Пояснение: $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 3$

3. Является ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ симметричной?

Ответ: Да

Пояснение: $A^T = A \rightarrow$ симметричная.

4. Гессиан функции $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ в любой точке — постоянная матрица. Запишите её.

Ответ: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Пояснение: $f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 3$

5. Квадратичная форма $Q(x,y)=2x^2+4xy+5y^2$ соответствует матрице. Запишите её.

Ответ: $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Пояснение: Коэффициент при xy делится пополам: $4xy = 2xy + 2xy$

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Определите тип пространства, в котором функция задана как отображение из R^n в R .	евклидово пространство	ОПК-1
2	Назовите понятие, характеризующее производную функции многих переменных в точке.	дифференциал	ОПК-1
3	Укажите формулу, описывающую матрицу частных производных функции нескольких переменных.	матрица Якоби	ОПК-1
4	Определите, как называется функция, задающая траекторию в пространстве с помощью векторных значений.	вектор-функция	ОПК-1

5	Назовите метод оптимизации, не имеющий ограничений на область определения.	безусловная оптимизация	ОПК-1
6	Как называется метод поиска экстремума функции при наличии ограничений?	условная оптимизация	ОПК-1
7	Укажите вид интеграла, который не имеет конкретных границ интегрирования.	неопределённый интеграл	ОПК-1
8	Назовите теорему, обеспечивающую существование и единственность решения дифференциального уравнения.	теорема Пикара	ОПК-4
9	Как называется пространство с нормой, эквивалентной евклидовой норме в R^n ?	нормированное пространство	ОПК-4
10	Назовите свойство функции нескольких переменных, при котором предел функции в точке равен значению функции в этой точке.	непрерывность	ОПК-4
11	Как называется отображение, для которого существует линейное приближение с остаточным членом, стремящимся к нулю быстрее аргумента?	дифференцируемое отображение	ОПК-4
12	Укажите понятие, описывающее градиент функции нескольких переменных.	вектор градиента	ОПК-4
13	Назовите принцип, гарантирующий сжатие отображения в метрическом пространстве.	принцип сжимающих отображений	ОПК-4
14	Как называется функция, используемая для поиска условного экстремума с помощью множителей?	функция Лагранжа	ОПК-4
15	Укажите тип интеграла, применяемого для измерения объёма в R^n с помощью меры Лебега.	кратный интеграл	ПК-1
16	Назовите теорему, которая позволяет менять порядок интегрирования в повторных интегралах.	теорема Фубини	ПК-1
17	Как называется форма, применяемая для ориентированного интегрирования в R^n ?	дифференциальная форма	ПК-1
18	Укажите теорему, связывающую интеграл по границе тела с интегралом по самому телу.	теорема Стокса	ПК-1
19	Назовите понятие, характеризующее сходимость последовательности точек в R^n .	сходимость	ПК-1
20	Как называется ряд, представляющий функцию в виде суммы степенных членов около точки?	ряд Тейлора	ПК-1