
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«25» мая 2026 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Математический анализ. Часть 2. Продвинутый уровень»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Математика и компьютерные науки

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2026

**Москва
2026**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	7
5. Учебно-методическое обеспечение	9
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математический анализ. Часть 2. Продвинутый уровень» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и компьютерные науки», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Математический анализ. Часть 2. Продвинутый уровень» является основой для многих других математических дисциплин и научных направлений, включая физику, экономику и инженерные науки. Дисциплина развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и компьютерные науки» и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе во 2 семестре. Доступна к изучению после успешного освоения дисциплины (модуля) «Математический анализ. Часть 1. Продвинутый уровень»

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- формирование понимание терминов, основных теорем, связанных с исследованием функции на экстремум и выпуклость, построение графиков функции и их анализ с помощью производной;
- обучение навыкам вычисления предела последовательности и функции, исследования функции на непрерывность и дифференцируемость;
- применение производных к исследованию функций и построение график функций, применение формулы Тейлора к нахождению пределов и другое.

В результате освоения дисциплины (модуля) во 2 семестре обучающийся должен:

знать:

- основные структуры анализа: нормированные и метрические пространства, топологические понятия и их взаимосвязь;
- фундаментальные теоремы дифференциального и интегрального анализа в многомерных и абстрактных пространствах;
- понятийный аппарат дифференциального исчисления: дифференциал как линейное отображение, градиент, матрица Якоби, дифференциальные формы;
- основы теории меры и интегрирования: аксиоматика меры, построение интеграла Лебега, его свойства и связь с интегралом Римана;
- геометрические и физические интерпретации аналитических понятий: ориентация, касательные структуры, дивергенция, ротор, интегральные теоремы.

уметь:

- анализировать топологические и метрические свойства множеств и отображений;
- вычислять и использовать дифференциалы, градиенты и матрицы Якоби для исследования отображений;

- применять теоремы о неявной и обратной функции, а также методы локальной оптимизации;

- проверять измеримость функций и корректность предельных переходов под знаком интеграла;

- выполнять замены переменных, применять теорему Фубини и вычислять интегралы по областям с границей.

владеть:

- навыками абстрактного математического мышления и инвариантного описания объектов;

- языком дифференциальной геометрии: касательные пространства, дифференциальные формы, ориентация;

- критическим подходом к обоснованию математических конструкций и теорем;

- методологией перевода физических и геометрических законов в аналитические формулировки;

- культурой строгого математического рассуждения и оформления доказательств.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности.
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
ПК-1.	Способен формулировать естественнонаучные задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в	ПК-1.1.	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.

	области математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с естественнонаучными задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач, а также участие в обследовании предметной области и согласовании требований с бизнес-пользователями

3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятель ная работа	
		Лекции	Семинары (практичес кие занятия)			
1	Топология в R^n	8	8		8	Домашнее задание
2	Непрерывные функции нескольких переменных	12	12		12	Домашнее задание
3	Дифференцирование в R^n	12	12	2	12	Домашнее задание Контрольная работа
4	Принцип сжимающих отображений	4	4	2	4	Домашнее задание Коллоквиум
5	Задачи оптимизации	4	4		4	Домашнее задание Лабораторная работа
6	Интегрирование в R^n	12	12		12	Домашнее задание
7	Ориентированное интегрирование в R^n	8	8	2	8	Домашнее задание Контрольная работа
	Экзамен			4		
Итого за 2 семестр:		60	60	10	60	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		190				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
Пилотный поток 2 семестр		
1	Топология в R^n	Нормированные пространства. Эквивалентность норм в R^n . Метрическое пространство, индуцированная топология. Топология в C и C^n . Открытые и замкнутые множества. Точка прикосновения. Индуцированная топология на подмножестве. Описание всех открытых множеств. Сходимость в R^n , обобщённая теорема Больцано—Вейештрасса.
2	Непрерывные функции нескольких переменных	Непрерывное отображение между метрическими пространствами. Понятие предела отображения между метрическими пространствами. Свойства предела и критерий непрерывности. Произведение метрических пространств и арифметика предела функции от нескольких переменных.
3	Дифференцирование в R^n	Линеаризация отображений. Дифференциал отображения и понятие дифференцируемости. Дифференцирование вектор-функции и определение дифференциала как отображение вектора скорости кривой. Градиент. Понятие частных производных. Дифференциал функции это ковектор (=функционал), его явное описание. Явное описание дифференциала отображения (=матрица Якоби) и её геометрический

		смысл. Касательное пространство, его базис и понятие первой квадратичной формы для простейших поверхностей. Необходимые условие и достаточное условие дифференцируемости. Дифференциал композиции отображений, дифференцирование сложной функции. Полином Тэйлора от нескольких переменных, полином Тэйлора в матричной записи (первые три монома). Матричные дифференцирования.
4	Принцип сжимающих отображений	Принцип сжимающих отображений. Теорема о неявной функции и теорема об обратной функции. Её геометрический смысл и значимость. Дифференциальные уравнения, теорема о существовании и единственности дифференциального уравнения.
5	Задачи оптимизации	Исследование функций на экстремумы. Условный экстремум (задача оптимизации), понятие Лагранжиана.
6	Интегрирование в R^n	Основы теории меры. Множество Витали, парадокс Банаха-Тарского, теорема Улама. σ-алгебры и аксиомы меры. Мера Лебега и её свойства. Измеримые функции. Интеграл Лебега от ступенчатой функции. Интеграл Лебега и его свойства. Определение интеграла Лебега по Риссу. Лемма Фату. Интеграл Римана и связь с интегралом Лебега. Произведение мер. Повторные интегралы. Теорема Фубини. Замена переменных в интегрировании. Дифференцирование интеграла по параметрам.
7	Ориентированное интегрирование в R^n	Дифференциальные формы. 1-формы и их произведения, n-формы. Дифференцирование форм и интегрирование форм в R^n. Тело в R^n и его граница. Ориентация тела и индуцированная ориентация на границе. Теорема Стокса. Векторные поля, дивергенция, ротор

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Зорич, В. А. Математический анализ. Часть I : учебник / В. А. Зорич. - 11-е изд., испр. - Москва : МЦНМО, 2021. - 564 с. - ISBN 978-5-4439-3304-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1900074>.

2. Зорич, В. А. Математический анализ. Часть II : учебник / В. А. Зорич. - 11-е изд., испр. - Москва : МЦНМО, 2021. - 676 с. - ISBN 978-5-4439-3305-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1900075>.

3. Шипачев, В. С. Математический анализ. Теория и практика : учебное пособие / В.С. Шипачев. — 3-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2026. — 351 с. — (Высшее образование). — DOI 10.12737/5267. - ISBN 978-5-16-010073-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2235902>.

Дополнительная литература:

1. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

2. Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560461>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:
— столами и стульями;

- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		

КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математический анализ. Часть 2. Продвинутый уровень» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, коллоквиумы, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные

конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Лабораторная работа – учебное занятие, направленное на практическое закрепление теоретических знаний через выполнение экспериментальных или проектных заданий. В ходе лабораторной работы студенты проводят анализ, разработку или тестирование программного кода, изученного в рамках курса.

Перед выполнением лабораторной работы необходимо внимательно ознакомиться с теоретическим материалом и методическими указаниями. Рекомендуется изучить используемые инструменты и технологии для уверенного их применения на практике. При возникновении вопросов следует обращаться к преподавателю для получения разъяснений.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Математический анализ. Часть 2. Продвинутый уровень»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном.
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Математический анализ. Часть 2. Продвинутый уровень» в каждом семестре оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	15%	14	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	25%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Лабораторная работа	35%	1	Задания на выполнение экспериментальных или проектных работ с анализом, разработкой или тестированием кода.
Коллоквиум	15%	1	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее

Активность	Вес	Количество	Описание
Экзамен	10%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Математический анализ. Часть 2. Продвинутый уровень»: $0,15 \times \text{среднее за домашние задания} + 0,25 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,35 \times \text{среднее за лабораторные работы} + 0,15 \times \text{коллоквиум} + 0,1 \times \text{экзамен}$.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные вопросы к коллоквиуму

Тема «Функция»

Определения

Обратная функция

Тема «Свойства функций»

Определения

Строго (нестрого) возрастающая (убывающая) функция

Точка глобального экстремума (минимума / максимума) функции

Функция, ограниченная сверху (ограниченная снизу, ограниченная, неограниченная)

Функция: чётная (нечётная, периодическая с периодом T)

Теорема о сумме ограниченных функций, сумме ограниченной неограниченной функций

Доказательства

Теорема о сумме ограниченных функций, сумме, ограниченной и неограниченной функций

Тема «Последовательности»

Определения

Последовательность

Последовательность, ограниченная сверху (ограниченная снизу, ограниченная, неограниченная)

Монотонная последовательность: (строго) возрастающая (убывающая) последовательность

Тема «Предел последовательности»

Определения

Предел последовательности равен $a \in \mathbb{R}, +\infty, -\infty, \infty$

ε -окрестность точки

Бесконечно большая последовательность

Тема «Сходящиеся последовательности»

Определения

Сходящаяся (расходящаяся) последовательность

Бесконечно малая последовательность

Формулировки

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Теорема о единственности предела последовательности

Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой последовательности

Теорема о связи последовательности, её предела и бесконечно малой последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема об арифметических операциях со сходящимися последовательностями

Теорема о зажатой последовательности

Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей
Теорема Вейерштрасса о пределе ограниченной монотонной последовательности

Доказательства

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности
Теорема о единственности предела последовательности
Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой последовательности
Теорема о связи последовательности, её предела и бесконечно малой последовательности
Свойства бесконечно малых последовательностей
Теорема об арифметических операциях со сходящимися последовательностями
Теорема о зажатой последовательности
Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей

Тема «Число e »

Определения

Число e (через предел последовательности)

Тема «Непрерывность функции»

Определения

Предел функции в точке слева (справа)
Функция, непрерывная в точке (непрерывная справа или слева в точке)
Типы точек разрыва: устранимый, первого рода, второго рода
Функция, непрерывная на отрезке (на интервале)

Формулировки

Теорема о непрерывности сложной функции (композиции функций)
Теорема о непрерывности обратной функции
Теорема (теоремы) Вейерштрасса о функции: непрерывной на отрезке
Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции
Теорема о непрерывности значений функции
Теорема о нуле непрерывной функции

Тема «Предел функции (начало)»

Определения

Предел функции (при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$)
Бесконечно большая (малая) функция
Асимптоты: вертикальные, горизонтальные, наклонные

Формулировки

Чему равны коэффициенты k и b асимптоты $y = kx + b$ функции f

Доказательства

Чему равны коэффициенты k и b асимптоты $y = kx + b$ функции f

Тема «Предел функции (продолжение)»

Определения

Проколота ε -окрестность точки

Предел функции при $x \rightarrow x_0$

Бесконечно большая (малая) функция

Асимптоты: вертикальные, горизонтальные, наклонные

Тема «Сравнение функций: о-малое»

Определения

о-малое

Формулировки

Свойства о-малого

Доказательства

Свойства о-малого

Тема «Сравнение функций: О-большое»

Определения

О-большое

Тема «Сравнение функций: асимптотическая эквивалентность»

Определения

Эквивалентность (асимптотическая) функций ($f \sim g$ при $x \rightarrow x_0$) —

Формулировки

Свойства (асимптотически) эквивалентных функций f и g

Доказательства

Свойства (асимптотически) эквивалентных функций f и g

Демоверсия билета:

Формулировка в кванторах

1) Сформулируй в кванторах и неравенствах, что $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = +\infty$.

2) Обратная функция

3) Непрерывная функция в точке

4) Равномерно непрерывная функция на множестве

5) Свойства о-малого

6) Теорема о зажатой последовательности

7) Критерий Коши существования конечного предела функции в точке

8) Теорема Штольца

Доказательства

9) Свойства бесконечно малых последовательностей

10) Теорема о промежуточном значении непрерывной функции

11) Теорема об обратной функции

12) Всякая ли сходящаяся последовательность ограничена? Всякая ли ограниченная последовательность сходится?

13) Существует ли последовательность x_n такая, что

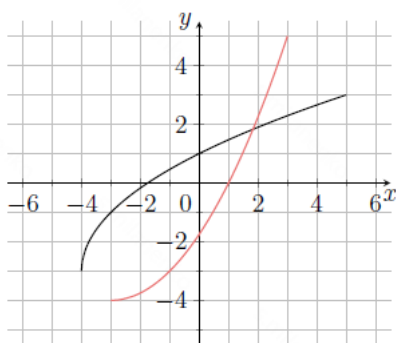
- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, и при этом $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < a$;
 б) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, и при этом $\forall n \in \mathbb{N} \exists k > n \exists l > n: x_k < a, x_l > a$?

- 14) Для некоторой последовательности $\{x_n\}$ существуют числа $\alpha \in (0; 1)$ и $C > 0$ такие, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x_n| < C\alpha^n$. Можно ли утверждать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится?

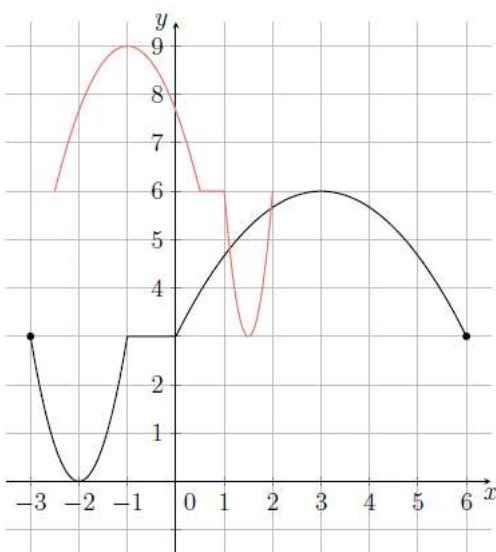
Примерные задания для контрольной работы

Контрольная работа №1

- Пусть $f(x) = (x - 5)^3$, $x \in \mathbb{R}$.
 а) Найди f^{-1} .
 б) Пусть функция g такова, что $(f \circ g)(x) = 8x^6$. Найди g .
- Дан график функции $y = f(x)$. Функция определена при $-4 \leq x \leq 5$.



- Запиши область определения и множество значений обратной функции f^{-1} .
 - Нарисуй эскиз графика f^{-1} .
- Дан график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(1 - 2x) + 3$.



- Словами опиши последовательность преобразований для построения $y = h(x)$.
- Нарисуй эскиз графика функции $h(x)$.

$$\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2} \right)$$

4. Нарисуй эскиз графика функции $y(x) = \arccos$ на основе анализа интервалов монотонности.

5. Следующее утверждение верно для функции f :

$$\exists C: \forall x \in D(f) \exists a \in D(f): |f(a) \cdot f(x)| < C$$

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

6. Следующее утверждение верно для последовательности $\{a_n\}$:

$$\forall C > 0 \exists k \in \mathbb{N}: \exists n > k: |a_n| < C$$

Следует ли отсюда, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

7. Докажи, что последовательность $a_n = \frac{4n^2 + 6n + 13}{2n + 3}$

является возрастающей, начиная с некоторого номера N .

Контрольная работа №2

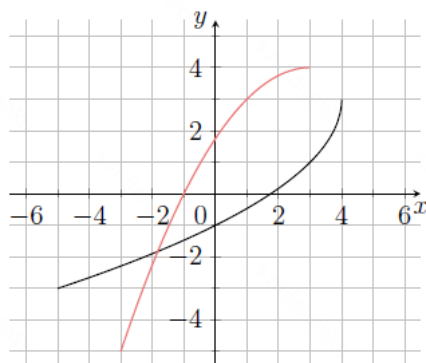
Пусть $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 7, x \in \mathbb{R}$.

а) Найди f^{-1} .

б) Пусть функция g такова, что $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 15$. Найди g .

1.

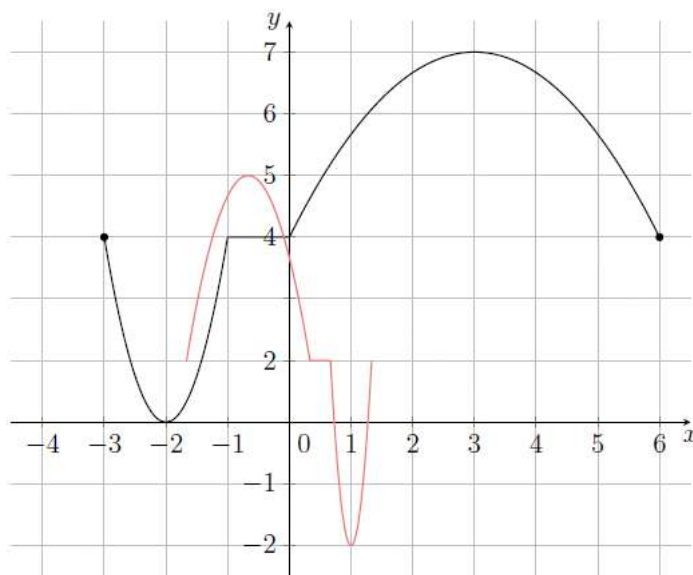
2. Дан график функции $y = f(x)$. Функция определена при $-5 \leq x \leq 4$.



а) Запиши область определения и множество значений обратной функции f^{-1} .

б) Нарисуй эскиз графика f^{-1} .

3. Дан график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(1 - 3x) - 2$.



а) Словами опиши последовательность преобразований для построения $y = h(x)$.

б) Нарисуй эскиз графика функции $h(x)$.

4. Нарисуй эскиз графика функции $y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right)$

на основе анализа интервалов монотонности.

5. Следующее утверждение верно для функции $f(x)$:

$$\forall C > 0 \exists a \in \mathbb{R}: \exists x > a: |f(x)| < C$$

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

6. Следующее утверждение верно для последовательности $\{a_n\}$:

$$\exists C > 0: \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}: |a_n \cdot a_k| < C$$

Следует ли отсюда, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1.

Область определения и область значений

*** ЗАДАЧА 1	1 балл
Найди естественную область определения и область значений функций:	
а) (0,3 балла) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$,	
б) (0,5 балла) $f(x) = \sqrt{-\arcsin(x+3)}$,	
в) (0,2 балла) $f(x) = \ln(x+3)$.	

Обратные функции, композиции функций

*** ЗАДАЧА 2	2 балла
Найди обратную функцию $f^{-1}(x)$, если:	
а) (0,3 балла) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$,	
б) (0,3 балла) $f(x) = \sqrt{4-2x}$,	
в) (0,3 балла) $f(x) = \ln(5x+7)$,	
г) (0,3 балла) $f(x) = 3e^{\frac{x}{5}}$,	
д) (0,8 балла) $f(x) = x^2 - 8x - 3, \quad x < 4$.	

*** ЗАДАЧА 3	(1 балл)
Докажи, что функция $y = \frac{a-x}{1+bx}$ является обратной самой себе, если $ab \neq -1$.	

Преобразования графиков функций

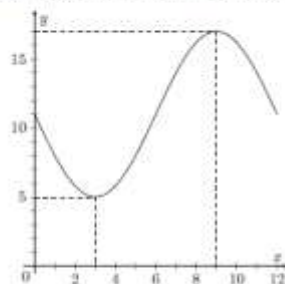
*** ЗАДАЧА 4	1 балл
Найди выражение для функции $f(x) = e^x + x^2$	
а) после сдвига графика на 3 единицы вправо,	
б) после сдвига графика на 5 единиц влево,	
в) после сдвига графика на 2 единицы вверх,	
г) после сдвига графика на 4 единицы вниз,	
д) после растяжения графика от оси Ox в 2 раза,	
е) после сжатия графика к оси Ox в 2 раза,	

- ж) после растяжения графика от оси Oy в 2 раза,
з) после сжатия графика к оси Oy в 2 раза.

ЗАДАЧА 5

1 балл

Дан график функции $f(x) = a \sin(bx) + c$, где $x \in [0; 12]$. Функция достигает минимального значения в точке $(3; 5)$, а максимального в точке $(9; 17)$.



Найди значения a , b и c .

ЗАДАЧА 6

2 балла

Нарисуй графики функций:

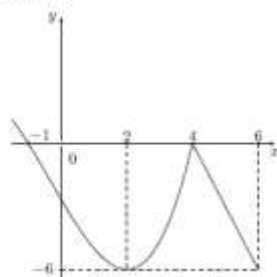
а) $y = \frac{1}{2}f(x) + 2$,

б) $y = 3 - \frac{1}{2}f(x)$,

в) $y = f\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$,

г) $y = f\left(3 - \frac{1}{2}x\right)$,

где график $y = f(x)$ имеет вид:



Домашнее задание 2.

Свойства функций

ЗАДАЧА 1

1 балл

Докажи, что если f — монотонная функция, то композиция $g = f \circ f$ — возрастающая функция на каждом интервале, где она определена.

ЗАДАЧА 2

0,5 балла

Приведи пример двух строго возрастающих на $\mathbb{R}$ функций, произведение которых является строго убывающей функцией.

ЗАДАЧА 3

0,5 балла

Приведи пример двух неограниченных функций f и g таких, что композиция функций $f \circ g$ является ограниченной.

ЗАДАЧА 4

1 балл

Даны две ограниченные функции f и g , причём $g(x) \neq 0$.

а) (0,4 балла) Докажи, что произведение функций $f \cdot g$ — ограниченная функция.

б) (0,6 балла) При каком дополнительном условии функция $\frac{f}{g}$ будет также ограниченной функцией? Приведи доказательство и контрпример. (В данном случае контрпример состоит из функций f и g таких, что твоё дополнительное условие не выполняется и функция $\frac{f}{g}$ является неограниченной.)

ЗАДАЧА 5

1 балл

Покажи, что следующие функции являются нечётными:

а) (0,4 балла) $y = \ln \frac{1-x}{1+x} \quad (-1 < x < 1)$;

б) (0,6 балла) $y = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$.

ЗАДАЧА 6

0,5 балла

Известно, что функция f не является ни чётной, ни нечётной, а функция g — нечётная. Может ли функция $f + g$ быть:

а) (0,2 балла) чётной;

	6) (0,3 балла) нечётной? Если может, то приведи пример. Если не может, то докажи.
Эскизы композиций функций	
*** ЗАДАЧА 7	1 балл Построй эскиз графика композиции функций на основании анализа интервалов монотонности: $y = \ln(x^2 + 1)$.
*** ЗАДАЧА 8	1 балл Построй эскиз графика композиции функций на основании анализа интервалов монотонности: $y = \arctg(x^2 - 4x)$.
*** ЗАДАЧА 9	2 балла Построй эскиз графика композиции функций на основании анализа интервалов монотонности: $y = e^{x^2+1}e^{-x}$.

Домашнее задание 3.

Определение последовательности и способы ее задания

*** ЗАДАЧА 1	0,5 балла Какие из чисел $a = 75$, $b = 144$, $c = 510$, $d = 2584$ являются членами последовательности $\{a_n\}$ такой, что $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$?
--------------	---

Свойства последовательностей

*** ЗАДАЧА 2	1 балл Докажи, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ является строго убывающей.
*** ЗАДАЧА 3	2,5 балла Даны последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, причём $u_n = x_n + y_n$, $v_n = x_n y_n$. Докажи или опровергни утверждение: а) Для того чтобы последовательность $\{u_n\}$ была строго возрастающей достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими. б) Для того чтобы последовательность $\{u_n\}$ была строго убывающей необходимо, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были убывающими. в) Для того чтобы последовательность $\{v_n\}$ была строго возрастающей достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими. г) Для того чтобы последовательность $\{v_n\}$ была строго возрастающей необходимо, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими. д) Известно, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ убывают. Для того чтобы $\{u_n\}$ была строго убывающей необходимо, чтобы хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ была строго убывающей.
*** ЗАДАЧА 4	2 балла Укажи, какие из следующих утверждений эквивалентны тому, что последовательность ограничена сверху: а) $\exists C \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq C$; б) $\exists C \in \mathbb{R}, C > 0: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C$; в) $\exists C \in \mathbb{R}, C < 0: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C$; г) $\forall C \in \mathbb{R}, C > 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C$; д) $\exists C \in \mathbb{R}: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n < C$; е) $\exists C \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C$. Какие из утверждений являются достаточными для того, чтобы последовательность была ограничена сверху?
*** ЗАДАЧА 5	1 балл Верны ли следующие утверждения? Если верно, то докажи; если неверно, то приведи контрпример. а) Если x_n и y_n — неограниченные последовательности, то последовательность $z_n = x_n + y_n$ также является неограниченной. б) Если последовательность x_n ограничена, а последовательность y_n — не ограничена, то последовательность $z_n = x_n + y_n$ не ограничена. в) Если последовательность x_n ограничена, а последовательность y_n — не ограничена, то последовательность $z_n = x_n y_n$ не ограничена.
*** ЗАДАЧА 6	1 балл Докажи, что последовательность $b_n = \frac{n^2}{n+1}$ не является ограниченной.

Примерные задания для лабораторной работы

1. Проверьте, является ли отображение $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ сжимающим на $\mathbb{R}$. Если да — найдите коэффициент сжатия.

2. Найдите неподвижную точку отображения $f(x) = \frac{x}{3} + 1$, используя метод последовательных приближений. Выполните три итерации, начав с $x_0 = 0$.

3. Покажите, что уравнение $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x}\right)$ при $x > 0$ задаёт сжимающее отображение на отрезке $[1][2]$. К какому числу сходится итерационный процесс?

4. Проверьте выполнение условий теоремы о неявной функции для уравнения $F(x,y)=x^2 + y^2 - 1 = 0$ в окрестности точки $(0,1)$. Выразите y как функцию от x локально.

5. Для отображения $F(x,y)=(x+y,x-y^2)$ проверьте, применима ли теорема об обратной функции в точке $(1,1)$. Вычислите матрицу Якоби и её определитель.

6. Рассмотрите задачу Коши: $y'=y$, $y(0)=1$. Постройте первые два последовательных приближения по методу Пикара. Сравните с точным решением.

7. Проверьте, удовлетворяет ли функция $f(t,y)=t^2+y^2$ условию Липшица по y в области $|t| \leq 1, |y| \leq 1$. Обоснуйте ответ.

8. Постройте оператор Пикара для задачи $y'=2y$, $y(0)=1$. Примените его один раз к начальной функции $y_0(t)=1$.

9. Исследуйте, сколько решений имеет уравнение $x=\cos x$ на $\mathbb{R}$, используя принцип сжимающих отображений. Обоснуйте существование и единственность.

10. Постройте график итерационного процесса $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, начав $x_0 = 0$. Докажите, что отображение сжимающее на подходящем отрезке, и найдите предел последовательности.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) 2 семестр

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Определите тип пространства, в котором функция задана как отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.	евклидово пространство	ОПК-1
2	Назовите понятие, характеризующее производную функции многих переменных в точке.	дифференциал	ОПК-1
3	Укажите формулу, описывающую матрицу частных производных функции нескольких переменных.	матрица Якоби	ОПК-1
4	Определите, как называется функция, задающая траекторию в пространстве с помощью векторных значений.	вектор-функция	ОПК-1
5	Назовите метод оптимизации, не имеющий ограничений на область определения.	безусловная оптимизация	ОПК-1
6	Как называется метод поиска экстремума функции при наличии ограничений?	условная оптимизация	ОПК-1
7	Укажите вид интеграла, который не имеет конкретных границ интегрирования.	неопределённый интеграл	ОПК-1
8	Назовите теорему, обеспечивающую существование и единственность решения дифференциального уравнения.	теорема Пикара	ОПК-4
9	Как называется пространство с нормой, эквивалентной евклидовой норме в $\mathbb{R}^n$?	нормированное пространство	ОПК-4
10	Назовите свойство функции нескольких переменных, при котором предел функции в точке равен значению функции в этой точке.	непрерывность	ОПК-4
11	Как называется отображение, для которого существует линейное приближение с остаточным членом, стремящимся к нулю быстрее аргумента?	дифференцируемое отображение	ОПК-4
12	Укажите понятие, описывающее градиент функции нескольких переменных.	вектор градиента	ОПК-4
13	Назовите принцип, гарантирующий сжатие отображения в метрическом пространстве.	принцип сжимающих отображений	ОПК-4

14	Как называется функция, используемая для поиска условного экстремума с помощью множителей?	функция Лагранжа	ОПК-4
15	Укажите тип интеграла, применяемого для измерения объёма в R^n с помощью меры Лебега.	кратный интеграл	ПК-1
16	Назовите теорему, которая позволяет менять порядок интегрирования в повторных интегралах.	теорема Фубини	ПК-1
17	Как называется форма, применяемая для ориентированного интегрирования в R^n ?	дифференциальная форма	ПК-1
18	Укажите теорему, связывающую интеграл по границе тела с интегралом по самому телу.	теорема Стокса	ПК-1
19	Назовите понятие, характеризующее сходимость последовательности точек в R^n .	сходимость	ПК-1
20	Как называется ряд, представляющий функцию в виде суммы степенных членов около точки?	ряд Тейлора	ПК-1