ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Дискретная математика. Продвинутый уровень»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Искусственный интеллект*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: 2025

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2025

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 5
3. **Тематический план** 8
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** 9
6. **Материально-техническое обеспечение** 9
7. **Методические и оценочные материалы** 11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Дискретная математика. Продвинутый уровень» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Искусственный интеллект», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Дискретная математика. Продвинутый уровень» является основой для многих других математических дисциплин. Дисциплина (модуль) развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Искусственный интеллект» и входит в обязательную часть Блок 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 2 и 3 курсе в 3, 4 или 5 семестре на выбор.

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля) направлены на формирование у студентов следующий знаний, умений и навыков:

— изучить фундаментальные понятия дискретной математики, включая логику, множества, отношения, графы и комбинаторику, как основу для понимания дискретных процессов в ИИ;

— освоить методы решения задач на основе дискретных структур, таких как алгоритмы поиска, оптимизации и анализа графов, применительно к компьютерным наукам;

— развить навыки формального доказательства, математического моделирования и логического мышления для эффективного решения проблем в области искусственного интеллекта;

— применить дискретные математические методы для анализа и синтеза алгоритмов машинного обучения, обработки данных и проектирования систем.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основные понятия логики высказываний и логики предикатов, операции над множествами и их свойства;

— определения и свойства бинарных отношений, включая отношения эквивалентности и порядка;

— фундаментальные комбинаторные конфигурации: перестановки, размещения, сочетания, а также формулы для их вычисления, включая случаи с повторениями;

— базовые понятия теории графов: виды графов, циклы, деревья, связность, эйлеровость и гамильтоновость;

— суть рекуррентных соотношений, метод математической индукции и его применение для доказательства утверждений.

уметь:

— применять законы логики и теории множеств для упрощения выражений и решения логических задач;

— решать комбинаторные задачи с использованием формул перестановок, размещений, сочетаний и сочетаний с повторениями;

— анализировать структуру графов: определять связность, выявлять циклы, проверять планарность, устанавливать наличие эйлеровых и гамильтоновых путей и циклов;

— строить и анализировать отображения и соответствия между множествами, классифицировать бинарные отношения по их свойствам;

— формулировать и проводить строгие математические доказательства с использованием методов прямого доказательства, математической индукции, доказательства от противного и принципа Дирихле.

владеть:

— навыками формального представления дискретных структур (графов, отношений, отображений) с использованием математической символики;

— методами подсчёта в графах и анализа их структурных и количественных свойств;

— подходами к решению задач на взвешивания и оценку количества информации с применением комбинаторных и логических методов;

— техникой разложения перестановок на независимые циклы и пониманием их роли в структуре симметрической группы;

— практическим применением теорем и методов дискретной математики для решения прикладных и теоретических задач.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
УК-2.	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1.	Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач
		УК-2.2.	Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения
		УК-2.3.	Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой

			области
		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта,

			включая соблюдение норм информационной безопасности

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары (практические занятия)			
1	Основные концепции и термины	10	20	2	30	Домашнее задание Контрольная работа
2	Комбинаторика	10	20	2	30	Домашнее задание Контрольная работа
3	Теория графов	10	20	2	30	Домашнее задание Контрольная работа
	Экзамен			4		
	Итого:	***30***	***60***	***10***	***90***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Основные концепции и термины	Основы логики и теории множеств. Соответствия и отображения Комбинаторика: перестановки, размещения, сочетания Основные понятия теории графов Бинарные отношения. Отношения эквивалентности и порядка Основные методы математических доказательств. Взвешивания и теория информации
2	Комбинаторика	Свойства сочетаний. Сочетания с повторениями Рекуррентные соотношения. Числа Фибоначчи Перестановки как группа. Разложения на циклы. ФВИ. Числа Стирлинга. Числа Каталана
3	Теория графов	Деревья и двудольные графы. Эйлеровы графы. Гамильтоновы графы и турниры. Паросочетания. Лемма Холла. Планарные графы. Теорема о пяти красках

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Гисин, В. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для вузов / В. Б. Гисин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 428 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-16763-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/582991.

2. Иванов, Б. Н. Дискретная математика и теория графов : учебник для вузов / Б. Н. Иванов. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 177 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-14470-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/588754.

3. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для вузов / С. Б. Гашков, А. Б. Фролов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 530 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-17718-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560607.

Дополнительная литература:

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М. : Вильямс, 2009. — 784 с.

2. Пак, В. Г. Дискретная математика: теория множеств и комбинаторный анализ. Сборник задач : учебное пособие для вузов / В. Г. Пак. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 233 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-21516-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/575015.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;

— компьютерной техникой;

— механическими калькуляторами;

— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		

КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Дискретная математика. Продвинутый уровень» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине «Дискретная математика. Продвинутый уровень»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***экзамена***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	
8	Отлично	
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи.
6	Хорошо	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Дискретная математика. Продвинутый уровень» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
Домашние задания	20%	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	40%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Экзамен	40%	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по дисциплине (модулю)

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Дискретная математика. Продвинутый уровень»: «0,2 × среднее за домашние задания + 0,4 × среднее за контрольные работы + 0,4× среднее за экзамен».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные задания по контрольной работе

Контрольная работа №1

Контрольная работа № 1

Продолжительность: 2 часа

1. Нельзя иметь при себе электронные устройства. Если нарушишь это требование, работа будет аннулирована и её нельзя будет переписать.

2. **В каждой задаче приведи обоснование ответа, иначе он не будет засчитан.**

3. Если считаешь, что решение задачи неправильное, зачеркни его и напиши новое. В случае, если в работе приведены два разных ответа или решения, оцениваться будет только первое.

Оценка за контрольную работу ставится по формуле:

Оценка = min(сумма баллов за задачи;10).

Задача 1.

1 балл

Про каждое из утверждений определи, истинно оно или ложно.

А) $\forall n \in \mathrm{N}\ \exists k \in \mathrm{N}\ (n + k > 10 \rightarrow n + k2 > 15)$;

б) $\exists x \in \mathrm{R}\ \forall S \subseteq \mathrm{R}\ (\exists y \in \mathrm{R}\ y \in S \vee \exists z \in \mathrm{R}\ x + z \in S)$.

Задача 2.

2 балла

Какие из следующих высказываний равносильны высказыванию «Хорошо смеется тот, кто смеется последним»? В каждом пункте нужно пояснить ответ.

а) Кто смеется последним, тот смеется хорошо.

б) Кто не смеется последним, тот не смеется хорошо.

в) Кто не смеется хорошо, тот не смеется последним.

г) Кто хорошо смеется, тот смеется последним.

д) Только тот, кто хорошо смеется, смеется последним.

е) Каждый или смеется хорошо, или не смеется последним.

ж) Каждый или не смеется хорошо, или смеется последним

з) Плохо смеется тот, кто смеется не последним.

и) Плохо смеется тот, кто не смеется последним.

к) Не бывает такого, что кто-то плохо смеется и смеется последним.

Задача 3.

2 балла

В 20 ящиков разложили 60 чёрных и 60 белых шариков — по 6 шариков в каждый. Ваня заметил, что в каждом из первых 14 ящиков чёрных шариков оказалось больше, чем белых. Верно ли, что среди последних 6 ящиков точно найдётся такой, в котором все шарики белые?

Задача 4.

2 балла

Дощатый забор перекрашивают в два цвета: серый и черный — таким образом, чтобы с каждой серой доской рядом обязательно была черная. Какое наибольшее число серых досок может быть в заборе, если он состоит из 62 досок?

Задача 5.

2 балла

Пусть множества A и B таковы, что существует сюръекция $f : A \rightarrow B$ такая, что прообраз любого одноэлементного подмножества B бесконечен. Верно ли, что не существует инъекции из A в B?

Задача 6.

2 балла

10 мальчиков и 10 девочек строят хоровод. В хороводе мальчики и девочки должны чередоваться. Но среди девочек есть одна, по имени Маша, которая не хочет стоять рядом с одним из мальчиков, которого зовут Саша. Сколько существует способов составить хоровод из 10 мальчиков и 10 девочек, чтобы Маша не стояла рядом с Сашей?

Задача 7.

2 балла

Найди число отображений f из множества {1,2,3,4,5,6,7,8} в {a, b, c, d,e} таких, что $|f^{-1}(\{a, b\})| = 4$, а $|f(\{1,2,3,4,5\})| = 5$.

Задача 8.

1,5 балла

Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Он командует «налево». По неопытности часть солдат поворачивается налево, а часть — направо. После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся друг к другу лицом, понимают, что произошла ошибка, и поворачиваются кругом. В следующую секунду ситуация повторяется. Докажи, что рано или поздно шеренга встанет неподвижно.

Задача 9.

1,5 балла

На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажи, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

Задача 10.

1,5 балла

Напомним, что бинарное отношение называется отношением нестрогого порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Сколько различных отношений нестрогого порядка существует на множестве {1,2,3,4}?

Контрольная работа №2

Задача 1.

1 балл

Словом называется произвольная последовательность букв. Алфавитной записью для данного слова будем называть слово, записанное теми же буквами, но в алфавитном порядке. Например, алфавитная запись слова «математика» – это «аааеикммтт». Сколько существует различных слов длины 10, для которых алфавитная запись совпадает с исходным словом? В качестве букв можно использовать лишь строчные буквы русского алфавита.

Задача 2.

1,5 балла

Лягушка сидит в вершине A квадрата ABCD. Каждым прыжком она перемещается в вершину квадрата, соседнюю с той, в которой она находится. Сколькими способами лягушка может прыгать так, чтобы ровно через n прыжков оказаться в вершине B?

Задача 3.

1,5 балла

В некоторой компании студентов оказалось, что у каждого парня ровно 9 знакомых девушек, а у каждой девушки ровно 9 знакомых парней. Может ли в этой компании быть ровно 50 студентов?

Задача 4.

1,5 балла

В некоторой стране каждые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы от каждого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта.

Задача 5.

1 балл

В некотором связном графе степени всех вершин равны 10. Докажите, что при удалении любого ребра этот граф останется связным.

Задача 6.

1,5 балла

В каждой строке и каждом столбце шахматной доски стоит по 3 ладьи. Докажите, что можно выбрать 8 ладей, не бьющих друг друга.

Задача 7.

2 балла

Граф G является планарным, однако при добавлении к нему любого ребра свойство планарности теряется. Докажите, что в этом графе нет вершин степени меньше 3.

Задача 8.

1,5 балла

У Ильи была бумажка, на которой написаны числа от 1 до 10. Илья вычеркнул некоторые 5 из этих чисел. Алла хочет отгадать, какие именно. Для этого она может задавать Илье любые вопросы, ответы на которые могут быть только «да» или «нет». Но Илья дал подсказку: число 1 и число 2 либо оба вычеркнуты, либо оба не вычеркнуты.

За какое наименьшее число вопросов Алла гарантированно сможет отгадать, какие именно числа вычеркнуты, учитывая данную подсказку?

Задача 9.

1,5 балла

Пусть $S(n,k)$ обозначает число Стирлинга второго рода. Докажи, что

$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

Задача 10.

1,5 балла

В коллективе из 30 человек оказалось, что любых пятерых можно усадить за круглый стол так, что каждый будет сидеть рядом со своим знакомыми. Докажите, что в этом коллективе найдется компания из 10 человек, в которой каждый знаком с каждым.

Задача 11.

1,5 балла

Пусть $v_1, \ldots, v_l$ – самый длинный простой путь в графе G. Докажите, что $\chi(G) \leqslant l$.

Примерные домашние задания

Домашнее задание по теме: «Основные концепции и термины»

Задача 1.

Двум математикам дали двустороннюю карточку и сообщили, что с одной стороны на ней написано некоторое натуральное число n, а с другой n+1. Каждый видит, что написано с его стороны, но не видит противоположную сторону. Произошел следующий диалог:

А: Я не знаю, что написано с твоей стороны.

Б: И я не знаю, что написано с твоей стороны.

А: И я всё ещё не знаю, что написано с твоей стороны.

Б: И я все ещё не знаю, что написано с твоей стороны.

Последняя пара реплик повторилась ещё 10 раз, после чего A сказал: «А теперь я знаю, что написано с твоей!» Чему могло быть равно n?

Задача 2

У одного султана было два мудрых визиря. Захотел он проверить, насколько они сообразительны. Позвал он их обоих и сказал:

— Я загадал два числа от 2 до 100. Вы должны их мне назвать.

При этом султан сообщил первому визирю произведение этих чисел, а второму — сумму. Произошёл следующий диалог:

А: Я не знаю, что это за числа.

Б: Я был в этом уверен.

А: В таком случае, я знаю, что это за числа.

Б: Тогда я знаю, что это за числа.

Какие это были числа?

Задача 3

Альберт и Бернард только что познакомились с Шерил. Они хотят знать, когда у неё день рождения. Шерил предложила им десять возможных дат: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа и 17 августа. Затем Шерил сказала Альберту месяц своего рождения, а Бернарду — день. После этого состоялся диалог.

Альберт: Я не знаю, когда у Шерил День рождения, но я знаю, что Бернард тоже не знает.

Бернард: Поначалу я не знал, когда у Шерил День рождения, но теперь знаю.

Альберт: Теперь я тоже знаю, когда у Шерил день рождения.

Когда у Шерил день рождения?

Задача 4

Однажды начальник тюрьмы вызвал преступника, приговорённого к казни, и сообщил ему:

— Вас казнят на следующей неделе в полдень. День казни станет для вас сюрпризом, вы узнаете о нём, только когда палач в полдень войдёт к вам в камеру. Начальник тюрьмы был честным человеком и никогда не врал.

Заключённый подумал над его словами и улыбнулся:

— В воскресенье меня казнить не могут! Ведь тогда уже в субботу вечером я буду знать об этом. А, по словам начальника, я не буду знать день своей казни. Следовательно, последний возможный день моей казни — суббота. Но если меня не казнят в пятницу, то я буду заранее знать, что меня казнят в субботу, значит, и её можно исключить.

Последовательно исключив пятницу, четверг, среду, вторник и понедельник, преступник пришёл к выводу, что начальник не сможет его казнить, выполнив все свои слова.

На следующей неделе палач постучал в его дверь в полдень в среду — это было для него полной неожиданностью. Всё, что начальник тюрьмы сказал, осуществилось.

Где недостаток в рассуждении заключённого?

Задача 5.

Из 200 островитян у 100 человек глаза голубые, а у 100 — карие. Но никто не знает, кого цвета его собственные глаза — голубые, карие или вообще зеленые. На острове нет отражающих поверхностей, так что никто не может просто увидеть цвет своих глаз в отражении. Кроме того, людям под страхом смерти запрещено общаться друг с другом как устно, так и письменно.

Тем не менее, каждый из них может видеть цвет глаз остальных 199 островитян.

Каждую ночь на остров приплывает корабль с капитаном, который, пленил островитян. Если кто-нибудь из пленников правильно угадает цвет своих глаз и назовет его капитану, он сможет сесть на корабль и покинуть остров. Но наказание за ошибку — смерть.

Однажды на остров прибывает иностранец, о котором известно, что он всегда говорит правду. Все островитяне собрались посмотреть на него. Желая помочь пленникам, иностранец объявил: «Как минимум у одного из вас голубые глаза».

Сколько человек после этого объявления покинет остров и когда именно?

Домашнее задание по теме: «Теория графов»

1. ДВОЙНОЙ ПОДСЧЕТ

ЗАДАЧА 1

Назовем человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что чудаков не больше, чем малообщительных.

ЗАДАЧА 2

В теннисном турнире каждый играет с каждым ровно 1 раз. Ничьих нет. Пусть a_i – число побед i-го игрока, b_i – число поражений i-го игрока.

Докажите, что $\sum a_i^2 = \sum b_i^2$.

ЗАДАЧА 3

Пусть в графе n вершин, m ребер, а степени вершин равны $d_1, \ldots, d_n$.

Докажите неравенство $\frac{4m^2}{n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_i^2$.

ЗАДАЧА 4

Теорема Мантеля. Дан граф на n вершинах, в котором нет треугольников.

Докажите, не используя математическую индукцию, что число рёбер в таком графе не превосходит $\frac{n^2}{4}$.

ЗАДАЧА 5

Дан граф на n вершинах, в котором нет циклов длины 4.

Докажите, что количество ребер в этом графе не превосходит $\frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{4}$.

2. МЕТОД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ

Это идея, обобщающая идею двойного подсчета. Когда такой подсчет нетривиален, его бывает удобно сформулировать как назначение объектам некоторых величин и их последующее перераспределение. Эти величины будем называть зарядами.

ЗАДАЧА 6

В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены: в них нарисованы звёздочки.

Известно, что для любой отмеченной клетки количество звёздочек в её столбце совпадает с количеством звёздочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звёздочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звёздочка.

ЗАДАЧА 7

На плоскости дано *n* окружностей радиуса 1, причем известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше *n* точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Чему равно количество всех подмножеств множества, состоящего из 7 элементов?	128	ОПК-1
2	Как называется отображение, которое является одновременно инъективным и сюръективным?	биекция	ПК-1
3	Сколько свойств должно выполняться для того, чтобы отношение называлось отношением частичного порядка?	3	ПК-1
4	Как называется метод доказательства, использующий предположение истинности утверждения для всех k < n?	полная индукция	ПК-1
5	Какова энтропия источника с двумя равновероятными символами?	1 бит	ОПК-1
6	Сколькими способами можно распределить 7 одинаковых предметов по 3 различным ящикам?	36	ОПК-1
7	Чему равно 10-е число последовательности Фибоначчи (начиная с 1, 1)?	55	ОПК-1
8	Как называется формула, выражающая количество элементов объединения множеств через их пересечения?	формула включений -	ПК-1

		исключений	
9	Что подсчитывают числа Стирлинга первого рода s(n, k)?	перестановки с k циклами	ОПК-1
10	Чему равно значение 6-го числа Каталана?	132	ПК-1
11	Сколько существует перестановок 5 элементов без неподвижных точек (беспорядков)?	44	УК-1
12	Как называется производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи?	$x/(1-x-x^2)$	ПК-1
13	Чему равна сумма степеней всех вершин полного графа с n вершинами?	n(n-1)	ОПК-1
14	Сколько остовных деревьев имеет полный граф с 5 вершинами (по формуле Кэли)?	125	ОПК-1
15	Какое условие необходимо и достаточно для существования гамильтонова цикла в графе по теореме Дирака?	степень каждой вершины $\geq n/2$	ПК-1
16	Что обязательно посещает эйлеров путь в графе?	все рёбра	ОПК-1
17	Чему равно максимальное паросочетание в полном двудольном графе K(n,n)?	n	ПК-1
18	Чему равна эйлерова характеристика для связного планарного графа с одной внешней гранью?	2	ОПК-1
19	Каково хроматическое число полного графа с n вершинами?	n	ПК-1
20	Какой алгоритм используется для нахождения минимального остовного дерева во взвешенном графе?	алгоритм Краскала/ Прима	УК-2