
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«25» мая 2026 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Прикладной искусственный интеллект

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2026

**Москва
2026**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	7
5. Учебно-методическое обеспечение	9
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Прикладной искусственный интеллект», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1» дает развитие аналитического мышления, навыков работы с математическими моделями и понимания пространственных структур, что является основой для дальнейшего изучения более сложных математических и компьютерных дисциплин.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Прикладной искусственный интеллект» и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия» имеет два уровня подготовки: основной и продвинутый поток. Обучающиеся распределяются на соответствующие уровни по итогам входного тестирования по дисциплине (модулю).

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- освоение фундаментальных понятий и геометрических интерпретаций линейной алгебры;
- применение алгоритмов и методов для решения вычислительных задач;
- интеграция теории с доказательствами и прикладными моделями.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- основные структуры линейной алгебры: векторные и аффинные пространства, подпространства, линейные отображения, билинейные формы и их аксиоматические определения;
- эквивалентные критерии невырожденности матрицы (обратимость, полный ранг, ненулевой определитель, тривиальное ядро и др.);
- основные теоремы и формулы линейной алгебры: теорему Гамильтона–Кэли, формулы Крамера, правило разложения определителя, связь рангов с размерностями ядра и образа;
- способы представления и анализа матриц: LU-разложение, блочные представления, характеристический и минимальный многочлены, спектр линейного оператора;
- базовые алгебраические конструкции: перестановки (циклы, знак), билинейные формы (ядро, ортогональное дополнение, невырожденность), двойственные пространства и двойственные базисы;

уметь:

— приводить системы линейных уравнений к ступенчатому виду, выделять главные и свободные переменные, строить общее решение, включая фундаментальную систему решений;

— выполнять матричные операции, находить обратные матрицы (в том числе по явным формулам), вычислять определители различными методами (разложение по строке/столбцу, использование специальных структур);

— анализировать линейные отображения: строить их матрицы в разных базисах, вычислять ядро и образ, определять ранг и соотношения между рангами суммы и произведения;

— работать с подпространствами: находить сумму и пересечение, проверять прямую сумму; описывать аффинные множества и исследовать их взаимное расположение;

— применять алгебраические методы для решения теоретических и прикладных задач: проверять невырожденность, строить линейные проекции, классифицировать отображения, исследовать билинейные формы.

владеть:

— навыками использования метода Гаусса и его модификаций (в том числе с частичным выбором ведущего элемента) для решения и анализа систем линейных уравнений;

— навыками работы с координатами и сменой базисов для перехода между абстрактными линейными объектами и их матричными представлениями;

— навыками структурного анализа линейных пространств: выделения ядра и образа, построения ортогональных дополнений, разложения на прямую сумму для упрощения решения задач;

— навыками алгебраического обобщения: перехода от конкретных матриц и систем к абстрактным линейным операторам, билинейным формам и двойственным пространствам;

— навыками строгого обоснования утверждений в линейной алгебре на основе аксиом и ранее доказанных фактов (в том числе эквивалентности различных определений базиса и критериев невырожденности).

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Код и содержание компетенции	Индикатор компетенции и перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-2. Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1. Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач.
	УК-2.2. Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения.
	УК-2.3. Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями.
ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает основные понятия, методы и результаты математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической и дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов и теоретической механики.
	ОПК-1.2. Умеет применять фундаментальные математические знания и методы для анализа и решения профессиональных задач.
	ОПК-1.3. Имеет практический опыт выбора, разработки и реализации математических моделей и методов при решении задач профессиональной деятельности.
ОПК-4. Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1. Знает основные классы математических алгоритмов, методы их анализа, критерии выбора и оценки вычислительной сложности, а также принципы программной реализации.
	ОПК-4.2. Умеет находить и анализировать математические алгоритмы, выбирать подходящий алгоритм для поставленной задачи и реализовывать его с использованием современных вычислительных систем.
	ОПК-4.3. Имеет практический опыт программной реализации, тестирования и оценки корректности и эффективности математических алгоритмов.

ППК-Р1. Способен разрабатывать и отлаживать программный код	ППК-Р1.1. Выполняет формализацию и алгоритмизацию поставленных задач для разработки программного кода (базовый) ППК-Р1.1. 3-1. Знает алгоритмы решения типичных задач, области и способы их применения. ППК-Р1.1. 3-2. Знает нотации и программное обеспечение для графического отображения алгоритмов. ППК-Р1.1. 3-3. Знает методы и приемы алгоритмизации поставленных задач. ППК-Р1.1. У-1. Умеет использовать методы и приемы формализации и алгоритмизации поставленных задач. ППК-Р1.1. У-2. Умеет применять алгоритмы решения типовых задач в соответствующих областях.
	ППК-Р1.2. Формализует задачу ИТ отрасли в язык естественнонаучных дисциплин (базовый) ППК-Р1.2. 3-1. Знает основные разделы математики, применяемые для анализа и моделирования непрерывных процессов и дискретных систем в прикладных задачах. ППК-Р1.2. У-1. Умеет выбирать адекватный математический аппарат для формализованного описания сущностей и отношений на основе ТЗ и бизнес-требований. ППК-Р1.2. В-1. Владеет навыками описания задач предметной области в виде формальных математических моделей, пригодных для последующей алгоритмизации и программной реализации.
	ППК-Р1.3. Осуществляет обоснованный выбор методов и алгоритмов для программной реализации формальной математической модели (базовый) ППК-Р1.3. 3-1. Знает основные классы методов программной реализации моделей и критерии выбора алгоритмов. ППК-Р1.3. У-1. Умеет проводить сравнительный анализ и обоснование выбора алгоритмов для программной реализации модели. ППК-Р1.3. В-1. Владеет методами адаптации методов и алгоритмов под специфику задачи. ППК-Р1.3. В-2. Владеет навыками оценки эффективности выбранных алгоритмов.

3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятель ная работа	
		Лекции	Практичес кие занятия			
1	Комплексные числа	2	4		6	Устный опрос
2	Матрицы	2	4		6	Устный опрос
3	Линейные системы	2	4		6	Устный опрос
4	Векторные пространства. Часть 1	2	4	2	6	Устный опрос Контрольная работа
5	Линейные отображения. Часть 1	4	8		12	Устный опрос
6	Ранги	2	4		6	Устный опрос
7	Векторные пространства. Часть 2	2	4		6	Устный опрос
8	Линейные отображения. Часть 2	2	4	2	6	Устный опрос Контрольная работа
9	Евклидовы пространства	6	12		18	Устный опрос
10	Векторные пространства. Часть 3	2	6		6	Устный опрос Коллоквиум
11	Определители	4	8		12	Устный опрос
	Экзамен			4		
Итого за 1 семестр:		30	62	8	90	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		190				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Комплексные числа	Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Комплексное сопряжение и модуль. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел
2	Матрицы	Элементарные преобразования строк. Ступенчатый и улучшенный ступенчатый вид матрицы. Метод Гаусса. Нахождение обратной матрицы
3	Линейные системы	Матрица и расширенная матрица линейной системы. Однородные и неоднородные системы. Фундаментальная система решений
4	Векторные пространства. Часть 1	Векторные пространства. Линейная оболочка. Линейная зависимость и независимость. Базис и размерность. Координаты вектора в базисе.
5	Линейные отображения. Часть 1	Подпространства, их сумма и пересечение. Линейные отображения. Изоморфизмы. Матрица линейного отображения. Ядро и образ. Смена базиса. Изменение матрицы линейного отображения при смене базисов. Ранг матрицы. Классификация линейных отображений

6	Ранги	Свойства ранга. Строчный и столбцовый ранги. Связь ранга с методом Гаусса. Критерий совместности линейной системы
7	Векторные пространства. Часть 2	Произведения и факторпространства векторных пространств. Прямые произведения. Факторпространство по подпространству. Каноническая проекция
8	Линейные отображения. Часть 2	Билинейные формы. Ранг билинейной формы. Левые и правые Двойственное пространство. Линейные функционалы. Двойственное отображение. Ядро и образ двойственного отображения. Матрица двойственного отображения
9	Евклидовы пространства	Скалярное произведение и норма. Евклидовы пространства. Неравенство Коши — Буняковского. Ортонормированные системы. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Ортогональные проекции. Ортогональные дополнения. Теорема о проекции на подпространство. Задачи минимизации
10	Векторные пространства. Часть 3	Аффинные пространства и аффинные подпространства. Реперы и координаты. Параллельность и пересечение аффинных подпространств. Взаимное расположение подпространств
11	Определители	Билинейные и полилинейные отображения. Знакопеременные формы. Объёмная форма. Определитель матрицы. Определитель как знакопеременная полилинейная функция столбцов. Основные свойства определителя.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Заболотский, В. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия (учебный комплекс) : учебное пособие / В.С. Заболотский. — 2-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 309 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-110519-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1872461>.

2. Литаврин, А. В. Линейная алгебра : учебное пособие / А. В. Литаврин, Т. В. Моисеенкова. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2022. - 244 с. - ISBN 978-5-7638-4604-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2092907>.

3. Шевцов, Г. С. Численные методы линейной алгебры : учебное пособие / Г. С. Шевцов, О. Г. Крюкова, Б. И. Мызникова. — 3-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2026. — 528 с. - ISBN 978-5-16-016796-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2211865>.

Дополнительная литература:

1. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15839-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560017>.

2. Сабитов, И. Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для вузов / И. Х. Сабитов, А. А. Михалев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 258 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08941-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/539950>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное

Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, коллоквиумы, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками,

акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Устный опрос – это форма проверки знаний, при которой студент отвечает на вопросы преподавателя в устной форме, демонстрируя свои знания и понимание темы.

Для успешной подготовки к устному опросу рекомендуется тщательно изучить материалы по теме, включая лекции и учебники; создать список ключевых вопросов и ответов, а также практиковаться в их проговаривании вслух, чтобы улучшить уверенность и четкость изложения. Полезно также обсудить темы с однокурсниками, чтобы получить разные точки зрения и углубить понимание материала.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в syllabus дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1» в каждом семестре оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
Устные опросы	25%	Форма проверки знаний, при которой студент отвечает на вопросы преподавателя в устной форме, демонстрируя свои знания и понимание темы
Контрольные работы	20%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	25%	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Экзамен	30%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1»:

Продвинутый уровень: $\langle 0,25 \times \text{среднее за устные опросы} + 0,2 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,25 \times \text{коллоквиум} + 0,3 \times \text{экзамен} \rangle$.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные вопросы к коллоквиуму

Тема «Системы линейных уравнений»

- Совместная и несовместная система
- Определённая и неопределённая система
- Однородная и неоднородная система
- Матрица
- Главная и побочная диагонали
- Элементарные преобразования строк
- Ступенчатый вид матрицы
- Главные и свободные переменные
- Как по ступенчатому виду понять, что система определена?
- Сколько может быть решений у системы линейных уравнений?
- Прямой ход алгоритма Гаусса
- Обратный ход алгоритма Гаусса

Тема «Операции над матрицами»

- Сумма матриц
- Нулевая матрица
- Произведение матрицы на число
- Произведение матриц
- Пример некоммутативности матричного умножения
- Коммутирующие матрицы
- Делители нуля
- Нильпотентные матрицы
- Транспонирование матриц
- Симметричная матрица
- След матрицы
- Блочное умножение матриц
- Умножение на диагональную матрицу
- Транспонирование от произведения матриц
- След от произведения матриц

Тема «Обратные матрицы. Матричные уравнения»

- Единичная матрица
- Обратная матрица
- Матрицы элементарных преобразований *I*, *II*, *III* типов и их обратные
- Подстановка матрицы в многочлен
- Матрицы, коммутирующие с диагональной матрицей с разными числами на диагонали
- Классификация систем линейных уравнений
- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Эквивалентные условия обратимости матрицы
- Подстановка в многочлен матрицы $C^{-1}AC$
- Алгоритм поиска обратной и проверки обратимости
- Алгоритм решения уравнений $AX = B$
- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Только квадратные матрицы обратимы

Тема «LU-разложение»

- LU-разложение

Тема «Векторные пространства»

- Векторное пространство

- Пример векторного пространства отличный от $\mathbb{R}^n$ или матриц
- Подпространство векторного пространства
- Линейная комбинация векторов
- Линейно независимый набор векторов
- Коллинеарные векторы
- Компланарные векторы
- Линейная оболочка системы векторов
- Порождающая система векторов
- Базис
- Размерность векторного пространства
- Координаты вектора в базисе
- Матрица перехода между базисами
- Критерий подпространства
- Достаточное условие линейной зависимости в n -мерном пространстве
- Три эквивалентных условия для базиса в n -мерном пространстве
- Критерий подпространства
- Совпадение размеров базисов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм дополнения линейно независимой системы до базиса

Тема «Определители матриц»

- Определители матрицы 2 на 2 и 3 на 3
- $i j$ -ый минор матрицы
- $i j$ -ое алгебраическое дополнение матрицы
- Невырожденная матрица
- Присоединённая матрица
- Формула разложения определителя по строке
- Изменение определителя при элементарных преобразованиях
- Определитель транспонированной матрицы
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц
- Связь линейной зависимости и определителя
- Линейность определителя по строке
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы (через алгебраические дополнения)
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы
- Определитель Вандермонда

Тема «Фундаментальная система решений»

- Строчный ранг матрицы
- Базисный минор
- Фундаментальная система решений
- Тривиальная оценка на ранг матрицы
- Теорема о базисном миноре
- Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
- Размерность пространства решений однородной системы
- Связь решений однородной и неоднородной системы

- Теорема Кронекера-Капелли
- Размерность ФСР
- Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
- Теорема Кронекера-Капелли

Тема «Сумма и пересечение подпространств»

- Пересечение подпространств
- Пример, когда объединение подпространств — не подпространство
- Сумма подпространств
- Прямая сумма двух подпространств
- Теорема о неполном базисе
- Связь размерности суммы и пересечения подпространств (Формула Грассмана)
- Алгоритм поиска ФСР
- Алгоритм поиска скелетного разложения

Примерные темы для устного опроса

Комплексные числа

1. Что такое комплексное число и как оно записывается в алгебраической форме? Объясните, что означают действительная и мнимая части.
2. Как представить комплексное число в тригонометрической форме? Опишите, как найти модуль и аргумент числа.
3. Что называется комплексно сопряжённым числом? Как оно связано с исходным числом на комплексной плоскости?
4. Как геометрически интерпретируется модуль комплексного числа? Объясните, почему модуль произведения двух чисел равен произведению их модулей.
5. В чём состоит формула Муавра? Как она используется для возведения комплексного числа в натуральную степень?
6. Как извлекается корень n -й степени из комплексного числа? Сколько существует значений и как они располагаются на плоскости?
7. Почему корни из единицы образуют правильный многоугольник на комплексной плоскости? Объясните с геометрической точки зрения.
8. Как изменяются модуль и аргумент комплексного числа при умножении двух чисел в тригонометрической форме?
9. Как сопряжение влияет на аргумент и модуль комплексного числа? Объясните, как сопряжение ведёт себя при сложении и умножении.
10. Что происходит с комплексным числом, лежащим на единичной окружности, при взятии обратного значения? Как это связано с операцией сопряжения?

Матрицы

1. Перечислите основные свойства матричных операций (сложение, умножение) и приведите примеры их применения к системам линейных уравнений.
2. Что такое обратимость матрицы и как её проверить с помощью элементарных преобразований?
3. Опишите шесть эквивалентных определений невырожденности матрицы и объясните их следствия.
4. Как найти LU-разложение матрицы и зачем оно используется при решении систем?
5. Приведите пример массового решения систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

6. Как использовать метод Гаусса для поиска обратной матрицы? Покажите на матрице 2×2 .
7. Объясните блочные формулы умножения матриц и их применение в вычислениях.
8. Что такое полиномиальное исчисление от матриц и как оно связано с существованием многочлена, аннулирующего матрицу?
9. Опишите метод восстановления главных переменных через множество решений системы.
10. Как оценить степень минимального многочлена матрицы и почему она не может быть больше размера матрицы?

Линейные системы

1. Что называется матрицей системы линейных уравнений и как она связана с коэффициентами при неизвестных?
2. Чем расширенная матрица системы отличается от обычной матрицы? Как она используется при решении систем?
3. Что такое однородная система линейных уравнений? Всегда ли она имеет решение?
4. Что означает, что система уравнений является неоднородной? Как связаны решения неоднородной системы и соответствующей однородной?
5. Как определяется фундаментальная система решений однородной системы? Сколько решений в неё входит?
6. Почему общее решение неоднородной системы складывается из частного решения и общего решения однородной?
7. Как ранг матрицы системы влияет на количество свободных переменных и размерность пространства решений однородной системы?
8. Может ли однородная система иметь единственное решение? Если да — при каком условии?
9. Объясните, как по расширенной матрице системы определить, совместна ли система уравнений.
10. Как строится общее решение однородной системы с использованием фундаментальной системы решений? Приведите словесное описание процесса.

Определители

1. Что такое определитель квадратной матрицы и как вычислить его для матриц порядка 2 и 3?
2. Как изменяется определитель при транспонировании матрицы?
3. Объясните поведение определителя, если матрица имеет строку или столбец из нулей.
4. Что происходит с определителем, если строку (столбец) умножить на число или разложить в сумму?
5. Почему определитель равен нулю, если две строки (столбца) одинаковы?
6. Как влияет прибавление к строке другой, умноженной на число, на значение определителя?
7. Опишите, как перестановка двух строк меняет знак определителя.
8. Вычислите определитель верхнетреугольной матрицы и объясните общую формулу.

9. Что такое алгебраические дополнения и как их использовать для разложения определителя по строке?
10. Приведите формулу Крамера для решения системы и объясните её связь с определителем.

Векторные пространства

1. Что такое векторное пространство и подпространство? Приведите примеры.
2. Объясните понятия линейной комбинации, линейной зависимости и независимости векторов.
3. Что такое порождающая система и линейная оболочка подмножества?
4. Перечислите три эквивалентных определения базиса векторного пространства.
5. Как определить размерность векторного пространства и что такое конечномерные пространства?
6. Опишите процесс смены координат при переходе от одного базиса к другому с помощью матрицы перехода.
7. Почему множество решений однородной системы является подпространством?
8. Что такое сумма двух подпространств и как связаны их размерности с пересечением?
9. Объясните понятие аффинного пространства и реперов для задания координат.
10. Определите взаимное расположение двух подпространств (например, параллельность или пересечение).

Ранги

1. Что такое ранг конечной системы векторов и как он связан с размерностью линейной оболочки?
2. В чём разница между строчным и столбцовым рангом матрицы?
3. Объясните, почему ранг не изменяется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.
4. Что такое базисный минор и как его размер связан с рангом матрицы?
5. Приведите пример матрицы ранга 0 и ранга 1, и объясните их свойства.
6. Как вычислить ранг матрицы с помощью приведения к ступенчатому виду?
7. Может ли ранг системы векторов превышать число векторов? Обоснуйте.
8. Свяжите ранг матрицы с существованием решений системы линейных уравнений.
9. Что происходит с рангом при транспонировании матрицы?
10. Решите задачу: найдите ранг матрицы и объясните, почему он равен определённому значению.

Линейные отображения

1. Что такое линейное отображение и изоморфизм между векторными пространствами?
2. Объясните операции на линейных отображениях и почему они образуют векторное пространство.
3. Как построить матрицу линейного отображения относительно базиса?
4. Опишите процесс замены матрицы отображения при смене базисов.

5. Что такое образ и ядро линейного отображения, и как они связаны с инъективностью и сюръективностью?
6. Докажите, что размерность образа плюс размерность ядра равна размерности области определения.
7. Как классифицировать линейные отображения (инъективные, сюръективные, биективные)?
8. Что такое двойственное пространство V^* и двойственный базис?
9. Приведите пример проекции и объясните формулу «БАБА».
10. Свяжите ранг произведения матриц с рангами сомножителей.

Евклидовы пространства

1. Что называется скалярным произведением в векторном пространстве и как оно связано с понятием угла между векторами?
2. Как определяется норма вектора через скалярное произведение? Каков её геометрический смысл?
3. Что такое евклидово пространство? Приведите пример и объясните, чем оно отличается от произвольного векторного пространства.
4. В чём состоит неравенство Коши — Буняковского и какую информацию о векторах оно даёт?
5. Что означает, что система векторов является ортонормированной? Какие преимущества даёт работа с такими системами?
6. Опишите процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Как с его помощью построить ортогональный базис из произвольной линейно независимой системы?
7. Что такое ортогональная проекция вектора на подпространство? Как она связана с кратчайшим расстоянием до этого подпространства?
8. Что называется ортогональным дополнением подпространства? Как связаны размерности подпространства и его ортогонального дополнения?
9. Сформулируйте теорему о проекции вектора на замкнутое подпространство. Как она используется при решении задач приближения?
10. Как задача нахождения минимального расстояния от точки до подпространства сводится к ортогональной проекции? Приведите пример такой задачи.

Примерные задания для контрольной работы

1. Решите систему $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Выпишите базис решений (ФСР) соответствующей однородной системы $Ax = 0$; Найдите решения неоднородной системы линейных уравнений $Ax = b$. Запишите решения неоднородной СЛУ через ФСР, через базис, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Дана матрица $A \in M_3(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Найди LU -разложение для A .
2. Найди разложение A в произведение элементарных матриц.
3. Найди определитель матрицы A .
4. Запиши матрицу линейного оператора поворота на 30 градусов в $\mathbb{R}^2$.
5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы векторы

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Проверь, что $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ формируют базис в $\mathbb{R}^3$.
2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.
3. Найди координаты векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$.
6. Проверь, является ли отображение линейным. $\varphi: \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$, где
 $\varphi(f) = f' + f(2) - fg + (fh)'$
 $g = 2 + x + x^4, h = x + x^2$
7. Посчитай определитель матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) 1 семестр

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция	Индикатор
1.	Укажите свойство умножения матриц относительно перестановки множителей.	Некоммутативность $AB \neq BA$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
2.	Укажите правило транспонирования произведения матриц.	$(AB)^T = B^T A^T$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
3.	Дайте определение следа квадратной матрицы.	Сумма диагональных элементов	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
4.	Укажите условие обратимости квадратной матрицы.	$\det(A) \neq 0$	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
5.	Назовите метод нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.	Метод Гаусса-Жордана	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
6.	Перечислите типы элементарных преобразований строк матрицы.	Перестановка / Умножение / Сложение	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
7.	Укажите метод определения круга задач для матричного расчёта.	Анализ условий	УК-2	УК-2.2-У-1

8.	Укажите способ учёта ограничений вычислительных ресурсов при операциях с матрицами.	Оптимизация вычислений	УК-2	УК-2.2-У-1
9.	Укажите нормативный акт, регулирующий обработку данных в матричных задачах.	152-ФЗ / GDPR	УК-2	УК-2.1-3-1
10.	Укажите форму применения знаний в реальной ситуации с матрицами.	Реальный проект	УК-2	УК-2.3-У-1
11.	Укажите условие совместности системы линейных уравнений по теореме Кронекера-Капелли.	$\text{rank}(A) = \text{rank}([A b])$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
12.	Укажите главное отличие однородной системы от неоднородной.	$b = 0 / b \neq 0$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
13.	Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР).	Базис пространства решений однородной системы	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
14.	Укажите формулу общего решения неоднородной системы.	Частное решение + ФСР	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
15.	Дайте определение линейной оболочки системы векторов.	Множество всех линейных комбинаций векторов	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
16.	Укажите метод формализации задачи решения СЛАУ для кода.	Алгоритмизация	ППК-Р1	ППК-Р1.1-У-1
17.	Укажите способ выбора математического аппарата для системы уравнений.	Анализ задачи	ППК-Р1	ППК-Р1.2-У-1
18.	Назовите библиотеку Python для работы с матрицами и системами.	NumPy / SciPy	ППК-Р1	ППК-Р1.3-3-1
19.	Укажите метод оценки эффективности алгоритма решения СЛАУ.	О-нотация / Бенчмаркинг	ППК-Р1	ППК-Р1.3-В-2
20.	Укажите навык описания задачи линейной алгебры в виде формальной модели.	Формальная модель	ППК-Р1	ППК-Р1.2-В-1
21.	Укажите условие ортогональности двух векторов через скалярное произведение.	$a \cdot b = 0$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
22.	Запишите формулу расстояния между двумя точками в пространстве.	$d = \sqrt{((x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2)}$	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
23.	Запишите общее уравнение плоскости в пространстве.	$Ax + By + Cz + D = 0$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
24.	Дайте определение нормального вектора плоскости.	Вектор, перпендикулярный плоскости	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1

25.	Укажите направление вектора векторного произведения $a \times b$ относительно исходных векторов.	Перпендикулярно обоим векторам / По правилу правой руки	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
26.	Укажите геометрический смысл определителя матрицы 2×2 .	Площадь параллелограмма	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
27.	Укажите геометрический смысл определителя матрицы 3×3 .	Объём параллелепипеда	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
28.	Укажите формулу расстояния от точки до плоскости в пространстве.	$d = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
29.	Назовите инструмент для визуализации геометрических объектов.	Matplotlib / Plotly / GeoGebra	ППК-Р1	ППК-Р1.1-3-2
30.	Укажите метод сравнительного анализа алгоритмов геометрических вычислений.	Сравнительный анализ	ППК-Р1	ППК-Р1.3-У-1
31.	Дайте определение векторного пространства.	Множество с операциями сложения и умножения на скаляр	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
32.	Укажите критерий линейной независимости системы векторов.	Только тривиальная линейная комбинация $= 0$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
33.	Дайте определение базиса векторного пространства.	Максимальная линейно независимая система векторов	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
34.	Укажите связь размерности пространства с базисом.	Количество векторов в базисе	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
35.	Дайте определение координат вектора в заданном базисе.	Коэффициенты разложения по базису	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
36.	Укажите способ матричного представления вектора для кода.	Матрица-столбец / Array	ППК-Р1	ППК-Р1.1-У-1
37.	Укажите тип данных для хранения векторов в Python.	NumPy arrays / Векторизация	ППК-Р1	ППК-Р1.3-3-1
38.	Укажите метод проверки корректности операций с векторами в коде.	Юнит-тесты / Сравнение с эталоном	ППК-Р1	ППК-Р1.3-В-2
39.	Укажите метод адаптации алгоритмов линейной алгебры под задачу.	Кастомизация / Модификация	ППК-Р1	ППК-Р1.3-В-1
40.	Укажите форму опыта реализации алгоритмов линейной алгебры.	Практический проект	ОПК-4	ОПК-4.3-У-1
41.	Укажите связь размерности ядра и образа линейного отображения.	$\dim(\text{Ker}) + \dim(\text{Im}) = \dim(V)$ / Теорема о ранге и дефекте	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1

42.	Укажите условие сюръективности линейного отображения.	$\text{Im}(f) = W / \dim(\text{Im}) = \dim(W)$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
43.	Укажите условие изоморфизма линейных пространств.	Биективное линейное отображение	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
44.	Укажите формулу изменения матрицы отображения при смене базиса.	$A' = P^{-1}AP$	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
45.	Укажите связь ранга матрицы с размерностью образа отображения.	$\text{rank}(A) = \dim(\text{Im}(f))$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
46.	Укажите способ определения ограничений при решении задач линейной алгебры.	Анализ ресурсов и требований	УК-2	УК-2.1-3-1
47.	Укажите фактор ограничений при выборе метода решения СЛАУ.	Вычислительные ресурсы	УК-2	УК-2.2-У-1
48.	Укажите форму применения знаний в реальной ситуации (кейс).	Кейс-стади / Проект	УК-2	УК-2.3-У-1
49.	Запишите определение собственного вектора линейного оператора.	$Av = \lambda v$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
50.	Сформулируйте теорему Гамильтона-Кэли для линейного оператора.	$p(A) = 0$ для характеристического многочлена	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1