
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«25» мая 2026 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Прикладной искусственный интеллект

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2026

**Москва
2026**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	7
5. Учебно-методическое обеспечение	9
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Прикладной искусственный интеллект», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2» дает развитие аналитического мышления, навыков работы с математическими моделями и понимания пространственных структур, что является основой для дальнейшего изучения более сложных математических и компьютерных дисциплин.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Прикладной искусственный интеллект» и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе во 2 семестре. Доступна для изучения после успешного освоения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1. Продвинутый уровень».

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия» имеет два уровня подготовки: основной и пилотный поток. Обучающиеся распределяются на соответствующие уровни по итогам входного тестирования по дисциплине (модулю).

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- освоение фундаментальных понятий и геометрических интерпретаций линейной алгебры;
- применение алгоритмов и методов для решения вычислительных задач;
- интеграция теории с доказательствами и прикладными моделями.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основные структуры геометрических пространств: евклидовы, эрмитовы, аффинные и проективные — их аксиоматику, инварианты (длина, угол, ориентация, объём) и классификацию;

— ключевые теоремы: спектральную теорему для самосопряжённых и нормальных операторов, теорему о жордановой нормальной форме, теорему Эккарта–Янга, теорему о сингулярных базисах, правило Грама–Шмидта;

— центральные понятия теории операторов: собственные значения и векторы, инвариантные подпространства, минимальный и характеристический многочлены, алгебраическая и геометрическая кратности, лемма о стабилизации;

— основные разложения матриц и операторов: QR, SVD, спектральное разложение, жорданова форма — их условия применимости и геометрический смысл;

— связь абстрактных конструкций с приложениями: метод наименьших квадратов и ортогональные проекции — в регрессии и аппроксимации; проективные преобразования и однородные координаты — в 3D-графике и компьютерном зрении;

уметь:

— применять ортогонализацию Грама–Шмидта для построения ортонормированных базисов и получать QR-разложение матрицы;

— решать задачи наименьших квадратов с помощью ортопроекций и матрицы Грама, включая случаи линейной зависимости признаков;

— находить собственные значения и векторы, строить жорданов базис, приводить оператор к жордановой (или диагональной) форме в зависимости от его свойств;

— приводить квадратичные и эрмитовы формы к каноническому виду (главные оси, сигнатура), классифицировать операторы (самосопряжённые, ортогональные, унитарные, нормальные);

— работать с проективными и аффинными координатами: переводить между однородными и неоднородными системами, описывать проективные преобразования, интерпретировать их в контексте 3D-графики (камеры, проекции, трансформации);

владеть:

— геометрической интуицией в многомерных пространствах: интерпретировать операторы как преобразования (растяжения, повороты, отражения), понимать смысл ортогональности, ориентации и объёма в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$;

— навыком перехода между представлениями: от абстрактного оператора — к его матрице в разных базисах; от квадратичной формы — к симметрическому оператору и обратно;

— практикой анализа устойчивости и точности: оценивать влияние обусловленности на решение СЛАУ и задач МНК, использовать SVD для низкоранговой аппроксимации и регуляризации;

— культурой строгого доказательства: выводить следствия из определений (например, самосопряжённость $\Rightarrow$ вещественный спектр), доказывать критерии диагонализуемости через инвариантные подпространства;

— языком современной прикладной линейной алгебры: свободно использовать термины ортопроектор, нормальный оператор, сингулярные числа, фробениусова норма — и понимать их роль в data science, численных методах и компьютерной графике.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Код и содержание компетенции	Индикатор компетенции и перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-2. Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1. Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач.
	УК-2.2. Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения.
	УК-2.3. Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями.
ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает основные понятия, методы и результаты математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической и дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов и теоретической механики.
	ОПК-1.2. Умеет применять фундаментальные математические знания и методы для анализа и решения профессиональных задач.
	ОПК-1.3. Имеет практический опыт выбора, разработки и реализации математических моделей и методов при решении задач профессиональной деятельности.
ОПК-4. Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1. Знает основные классы математических алгоритмов, методы их анализа, критерии выбора и оценки вычислительной сложности, а также принципы программной реализации.
	ОПК-4.2. Умеет находить и анализировать математические алгоритмы, выбирать подходящий алгоритм для поставленной задачи и реализовывать его с использованием современных вычислительных систем.
	ОПК-4.3. Имеет практический опыт программной реализации, тестирования и оценки корректности и эффективности математических алгоритмов.

ППК-Р1. Способен разрабатывать и отлаживать программный код	ППК-Р1.1. Выполняет формализацию и алгоритмизацию поставленных задач для разработки программного кода (базовый) ППК-Р1.1. 3-1. Знает алгоритмы решения типичных задач, области и способы их применения. ППК-Р1.1. 3-2. Знает нотации и программное обеспечение для графического отображения алгоритмов. ППК-Р1.1. 3-3. Знает методы и приемы алгоритмизации поставленных задач. ППК-Р1.1. У-1. Умеет использовать методы и приемы формализации и алгоритмизации поставленных задач. ППК-Р1.1. У-2. Умеет применять алгоритмы решения типовых задач в соответствующих областях.
	ППК-Р1.2. Формализует задачу ИТ отрасли в язык естественнонаучных дисциплин (базовый) ППК-Р1.2. 3-1. Знает основные разделы математики, применяемые для анализа и моделирования непрерывных процессов и дискретных систем в прикладных задачах. ППК-Р1.2. У-1. Умеет выбирать адекватный математический аппарат для формализованного описания сущностей и отношений на основе ТЗ и бизнес-требований. ППК-Р1.2. В-1. Владеет навыками описания задач предметной области в виде формальных математических моделей, пригодных для последующей алгоритмизации и программной реализации.
	ППК-Р1.3. Осуществляет обоснованный выбор методов и алгоритмов для программной реализации формальной математической модели (базовый) ППК-Р1.3. 3-1. Знает основные классы методов программной реализации моделей и критерии выбора алгоритмов. ППК-Р1.3. У-1. Умеет проводить сравнительный анализ и обоснование выбора алгоритмов для программной реализации модели. ППК-Р1.3. В-1. Владеет методами адаптации методов и алгоритмов под специфику задачи. ППК-Р1.3. В-2. Владеет навыками оценки эффективности выбранных алгоритмов.

3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятель ная работа	
		Лекции	Практичес кие занятия			
1	Билинейные и квадратичные формы	4	8		12	Устный опрос
2	Линейные операторы	4	8	2	12	Устный опрос Контрольная работа
3	ЖНФ (жорданова нормальная форма)	6	12		12	Устный опрос
4	Эрмитовы пространства	2	4		12	Устный опрос
5	Операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах	6	12	2	12	Устный опрос Контрольная работа
6	SVD	4	8		12	Устный опрос
7	Тензорные произведения	2	6		12	Устный опрос Коллоквиум
8	Проективные пространства	2	4		6	Устный опрос
	Экзамен			4		
Итого за 2 семестр:		30	62	8	90	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		190				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Билинейные и квадратичные формы	Ограничение билинейной формы. Диагонализуемость симметрических форм. Симметричный Гаусс. Метод Якоби. Билинейные формы над алгебраически замкнутым полем. Билинейные формы над полем вещественных чисел. Сигнатура и ее геометрический смысл. Квадратичные формы. Скалярные произведения. Ортогональные и ортонормированные базисы. Задание скалярных произведений в базисах. Ортогональные матрицы
2	Линейные операторы	Линейные операторы. Матрица линейного оператора и правила ее замены. Характеристики линейного оператора. Инвариантные подпространства и ограничение линейного оператора. Собственные значения и векторы, связь со спектром. Лемма о стабилизации. Диагонализуемость оператора. Собственные подпространства. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения и связь между ними. Признак и критерии диагонализуемости линейного оператора
3	ЖНФ (жорданова нормальная форма)	Жорданова нормальная форма. Корневые подпространства. Нильпотентные операторы. Цепочки корневых векторов. Жордановы клетки. Фробениусова нормальная форма. Циклические подпространства. Аннулирующие многочлены. Инвариантные

		множители. Связь фробениусовой и жордановой нормальных форм. Разложение по взаимно простым множителям. Китайская теорема об остатках. Вывод ЖНФ из ФНФ
4	Эрмитовы пространства	Квадратичные формы, поляризация формула. Эрмитовы скалярные произведения. Обзор геометрии эрмитова пространства
5	Операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах	Сопряжённый оператор в евклидовом и эрмитовом пространстве. Эрмитово сопряжение матриц. Самосопряжённые и эрмитовы операторы. Спектральная теорема для самосопряжённых и эрмитовых операторов. Ортонормированный базис из собственных векторов. Ортогональная диагонализация. Ортогональные и унитарные операторы. Ортогональные и унитарные матрицы. Классификация ортогональных операторов. Канонический вид унитарных операторов
6	SVD	Сингулярные числа и сингулярные векторы. Существование SVD. Геометрический смысл сингулярного разложения. Приложения SVD. Матричные нормы. Псевдообратная матрица. Низкоранговые приближения. Теорема Эккарта — Янга. Связь с PCA.
7	Тензорные произведения	Тензорные произведения векторных пространств. Билинейные отображения и тензоры. Базис тензорного произведения. Примеры и приложения
8	Проективные пространства	Проективные пространства и подпространства. Однородные координаты

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Заболотский, В. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия (учебный комплекс) : учебное пособие / В.С. Заболотский. — 2-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 309 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-110519-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1872461>.

2. Литаврин, А. В. Линейная алгебра : учебное пособие / А. В. Литаврин, Т. В. Моисеенкова. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2022. - 244 с. - ISBN 978-5-7638-4604-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2092907>.

3. Шевцов, Г. С. Численные методы линейной алгебры : учебное пособие / Г. С. Шевцов, О. Г. Крюкова, Б. И. Мызникова. — 3-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2026. — 528 с. - ISBN 978-5-16-016796-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2211865>.

Дополнительная литература:

1. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15839-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560017>.

2. Сабитов, И. Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для вузов / И. Х. Сабитов, А. А. Михалев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 258 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08941-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/539950>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное

Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, коллоквиумы, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками,

акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Устный опрос – это форма проверки знаний, при которой студент отвечает на вопросы преподавателя в устной форме, демонстрируя свои знания и понимание темы.

Для успешной подготовки к устному опросу рекомендуется тщательно изучить материалы по теме, включая лекции и учебники; создать список ключевых вопросов и ответов, а также практиковаться в их проговаривании вслух, чтобы улучшить уверенность и четкость изложения. Полезно также обсудить темы с однокурсниками, чтобы получить разные точки зрения и углубить понимание материала.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в syllabus дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
Устный опрос	25%	Форма проверки знаний, при которой студент отвечает на вопросы преподавателя в устной форме, демонстрируя свои знания и понимание темы
Контрольные работы	20%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	25%	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Экзамен	30%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2»:

Продвинутый уровень: $\langle 0,25 \times \text{среднее за устные опросы} + 0,2 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,25 \times \text{коллоквиум} + 0,3 \times \text{экзамен} \rangle$.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные вопросы к коллоквиуму

Тема «Системы линейных уравнений»

- Совместная и несовместная система
- Определённая и неопределённая система
- Однородная и неоднородная система
- Матрица
- Главная и побочная диагонали
- Элементарные преобразования строк
- Ступенчатый вид матрицы
- Главные и свободные переменные
- Как по ступенчатому виду понять, что система определена?
- Сколько может быть решений у системы линейных уравнений?
- Прямой ход алгоритма Гаусса
- Обратный ход алгоритма Гаусса

Тема «Операции над матрицами»

- Сумма матриц
- Нулевая матрица
- Произведение матрицы на число
- Произведение матриц
- Пример некоммутативности матричного умножения
- Коммутирующие матрицы
- Делители нуля
- Нильпотентные матрицы
- Транспонирование матриц
- Симметричная матрица
- След матрицы
- Блочное умножение матриц
- Умножение на диагональную матрицу
- Транспонирование от произведения матриц
- След от произведения матриц

Тема «Обратные матрицы. Матричные уравнения»

- Единичная матрица
- Обратная матрица
- Матрицы элементарных преобразований *I*, *II*, *III* типов и их обратные
- Подстановка матрицы в многочлен
- Матрицы, коммутирующие с диагональной матрицей с разными числами на диагонали

- Классификация систем линейных уравнений
- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Эквивалентные условия обратимости матрицы
- Подстановка в многочлен матрицы $C^{-1}AC$
- Алгоритм поиска обратной и проверки обратимости
- Алгоритм решения уравнений $AX = B$
- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Только квадратные матрицы обратимы

Тема «LU-разложение»

- LU-разложение

Тема «Векторные пространства»

- Векторное пространство

- Пример векторного пространства отличный от $\mathbb{R}^n$ или матриц
- Подпространство векторного пространства
- Линейная комбинация векторов
- Линейно независимый набор векторов
- Коллинеарные векторы
- Компланарные векторы
- Линейная оболочка системы векторов
- Порождающая система векторов
- Базис
- Размерность векторного пространства
- Координаты вектора в базисе
- Матрица перехода между базисами
- Критерий подпространства
- Достаточное условие линейной зависимости в n -мерном пространстве
- Три эквивалентных условия для базиса в n -мерном пространстве
- Критерий подпространства
- Совпадение размеров базисов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм дополнения линейно независимой системы до базиса

Тема «Определители матриц»

- Определители матрицы 2 на 2 и 3 на 3
- $i j$ -ый минор матрицы
- $i j$ -ое алгебраическое дополнение матрицы
- Невырожденная матрица
- Присоединённая матрица
- Формула разложения определителя по строке
- Изменение определителя при элементарных преобразованиях
- Определитель транспонированной матрицы
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц
- Связь линейной зависимости и определителя
- Линейность определителя по строке
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы (через алгебраические дополнения)
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы
- Определитель Вандермонда

Тема «Фундаментальная система решений»

- Строчный ранг матрицы
- Базисный минор
- Фундаментальная система решений
- Тривиальная оценка на ранг матрицы
- Теорема о базисном миноре
- Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
- Размерность пространства решений однородной системы
- Связь решений однородной и неоднородной системы

- Теорема Кронекера-Капелли
- Размерность ФСР
- Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
- Теорема Кронекера-Капелли

Тема «Сумма и пересечение подпространств»

- Пересечение подпространств
- Пример, когда объединение подпространств — не подпространство
- Сумма подпространств
- Прямая сумма двух подпространств
- Теорема о неполном базисе
- Связь размерности суммы и пересечения подпространств (Формула Грассмана)
- Алгоритм поиска ФСР
- Алгоритм поиска скелетного разложения

Примерные темы для устного опроса

Билинейные и квадратичные формы

1. Что такое билинейная форма и как её матрица связана с симметричностью и кососимметричностью?
2. Объясните понятия ортогональных дополнений и невырожденности билинейной формы, и приведите пример невырожденной формы.
3. Докажите теорему о двойственности на подпространствах для билинейных форм.
4. Какие матричные характеристики являются инвариантами билинейной формы (ранг, невырожденность), и почему след не является?
5. Как разложить любую билинейную форму в сумму симметрической и кососимметрической частей?
6. Что происходит с ограничением билинейной формы на подпространство и когда оно невырожденно?
7. Опишите диагонализуемость симметрических форм и метод Якоби для их диагонализации.
8. Классифицируйте симметричные билинейные формы над алгебраически замкнутым полем и над полем вещественных чисел, включая сигнатуру.
9. Свяжите квадратичные формы с билинейными и объясните геометрический смысл сигнатуры.
10. Примените критерий Сильвестра для определения положительной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$.

Евклидовы пространства

1. Что такое евклидова норма вектора и неравенство Коши-Буняковского?
2. Как определить угол между векторами в евклидовом пространстве и теорему Пифагора?
3. Опишите процесс ортогонализации Грама-Шмидта и QR-разложение.
4. Что такое проекция и ортопроекция, и приведите формулу БАБА для проектора.
5. Как вычислить расстояние между вектором и подпространством, и угол между ними?
6. Объясните метод наименьших квадратов и его связь с проекциями.
7. Что такое матрица Грама и как она используется для k -мерных объёмов?

8. Как изменяется объём под действием линейного отображения и при смене образующих параллелепипеда?
9. Определите ориентированный n -мерный объём и его связь с определителем.
10. Как классифицировать евклидовы пространства и свести их к школьной геометрии?

Линейные операторы

1. Что такое матрица линейного оператора и как она меняется при смене базиса?
2. Перечислите характеристики линейного оператора: след, определитель, характеристический многочлен и т.д.
3. Объясните критерии обратимости линейного оператора и связь с инвариантными подпространствами.
4. Что такое собственные значения и векторы, и когда оператор диагонализуем?
5. Докажите связь между алгебраической и геометрической кратностями собственных значений.
6. Опишите сопряжённое отображение и самосопряжённые операторы в евклидовом пространстве.
7. Как привести квадратичную форму к главным осям с помощью самосопряжённых операторов?
8. Перечислите семь эквивалентных условий для ортогонального оператора.
9. Опишите теорему о сингулярных базисах (SVD) и её применение к низкоранговому приближению.
10. Как классифицировать ортогональные операторы в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$?

ЖНФ (жорданова нормальная форма)

1. Что такое утверждение о подстановке оператора во взаимно простые многочлены?
2. Объясните теорему о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств.
3. Как описать инвариантные подпространства через геометрический смысл кратностей корней?
4. Определите жорданов базис и жорданову нормальную форму (ЖНФ).
5. Докажите теорему о ЖНФ для нильпотентных операторов и формулу для количества клеток.
6. Опишите теорему о ЖНФ для произвольного оператора и разложение Шура.
7. Что такое отношение равенства по модулю подпространства и линейная независимость по модулю?
8. Приведите алгоритм поиска жорданова базиса "сверху вниз" на примере.
9. Как использовать элементарные преобразования цепочек для построения ЖНФ?
10. Классифицируйте линейные операторы по их ЖНФ и объясните единственность.

Примерные задания для контрольной работы

1. Решите систему $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Выпиши базис решений (ФСР) соответствующей однородной системы $Ax = 0$;
Найди решения неоднородной системы линейных уравнений $Ax = b$.
Запиши решения неоднородной СЛУ через ФСР, через базис, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Дана матрица $A \in M_{3 \times 3}(R)$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Найди LU -разложение для A .
2. Найди разложение A в произведение элементарных матриц.
3. Найди определитель матрицы A .
4. Запиши матрицу линейного оператора поворота на 30 градусов в R^2 .
5. В пространстве R^3 заданы векторы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Проверь, что f_1, f_2, f_3 формируют базис в R^3 .
2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{f_1, f_2, f_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.
3. Найди координаты векторов v_1 и v_2 в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$.
6. Проверь, является ли отображение линейным. $\varphi: R[x] \leq 4 \rightarrow R[x] \leq 4$, где
 $\varphi(f) = f' + f(2) - fg + (fh)'$
 $g = 2 + x + x^4, h = x + x^2$
7. Посчитай определитель матрицы $A \in M_n(R)$:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция	Индикатор
1.	Укажите свойство симметрической билинейной формы.	Матрица равна транспонированной / $A = A^T$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
2.	Назовите метод диагонализации симметрических форм.	Метод Якоби / Симметричный	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1

		Гаусс		
3.	Укажите связь квадратичной и билинейной форм.	$Q(x) = B(x, x)$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
4.	Назовите геометрический смысл сигнатуры квадратичной формы.	Число положительных и отрицательных слагаемых	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
5.	Укажите условие положительной определённости квадратичной формы.	Все собственные значения положительны	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
6.	Назовите критерий Сильвестра для положительной определённости.	Все главные миноры положительны	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
7.	Укажите метод определения круга задач для квадратичных форм.	Анализ условий	УК-2	УК-2.2-У-1
8.	Назовите способ учёта ограничений ресурсов при вычислениях.	Оптимизация вычислений	УК-2	УК-2.2-У-1
9.	Укажите понятие длины вектора в евклидовом пространстве.	$ x = \sqrt{(x, x)}$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
10.	Назовите неравенство, связывающее скалярное произведение и нормы.	Неравенство Коши-Буняковского	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
11.	Укажите формулу угла между векторами в евклидовом пространстве.	$\cos(\alpha) = (x, y) / (x \cdot y)$	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
12.	Назовите процесс построения ортонормированного базиса.	Ортогонализация Грама-Шмидта	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
13.	Укажите формулу ортопроекции вектора на подпространство.	$\text{proj}_W(x) = \sum (x, e_i) \cdot e_i$	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
14.	Назовите метод формализации задачи ортогонализации для кода.	Алгоритмизация	ППК-Р1	ППК-Р1.1-У-1
15.	Укажите способ выбора математического аппарата для проекций.	Анализ задачи	ППК-Р1	ППК-Р1.2-У-1
16.	Назовите библиотеку Python для работы с евклидовыми пространствами.	NumPy / SciPy	ППК-Р1	ППК-Р1.3-3-1
17.	Укажите метод оценки эффективности алгоритма ортогонализации.	О-нотация / Бенчмаркинг	ППК-Р1	ППК-Р1.3-В-2
18.	Назовите навык описания задачи в виде формальной модели.	Формальная модель	ППК-Р1	ППК-Р1.2-В-1

19.	Укажите определение сопряжённого оператора в евклидовом пространстве.	$(Ax, y) = (x, A^*y)$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
20.	Назовите свойство самосопряжённого оператора.	$A = A^*$ / Симметрическая матрица	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
21.	Укажите свойство собственных векторов самосопряжённого оператора.	Ортогональность	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
22.	Назовите теорему о диагонализации самосопряжённого оператора.	Спектральная теорема	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
23.	Укажите свойство ортогонального оператора.	Сохраняет скалярное произведение / $A^T A = E$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
24.	Назовите геометрический смысл ортогонального оператора.	Повороты и отражения	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
25.	Укажите метод программной реализации спектрального разложения.	NumPy.linalg.eigh	ОПК-4	ОПК-4.2-У-1
26.	Назовите способ тестирования корректности собственных векторов.	Юнит-тесты / Проверка ортогональности	ОПК-4	ОПК-4.3-У-1
27.	Укажите метод оценки вычислительной сложности нахождения собственных значений.	$O(n^3)$ / О-нотация	ОПК-4	ОПК-4.1-3-1
28.	Назовите опыт реализации алгоритмов линейной алгебры.	Практический проект	ОПК-4	ОПК-4.3-У-1
29.	Укажите определение сингулярных чисел матрицы.	Квадратные корни из собственных значений $A^T A$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
30.	Назовите геометрический смысл сингулярного разложения.	Растяжение вдоль ортогональных направлений	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
31.	Укажите применение SVD для сжатия данных.	Низкоранговые приближения	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
32.	Назовите теорему о наилучшем низкоранговом приближении.	Теорема Эккарта-Янга	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
33.	Укажите связь SVD с методом главных компонент.	PCA основан на SVD	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
34.	Назовите метод вычисления псевдообратной матрицы через SVD.	$A^+ = V \Sigma^+ U^T$	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
35.	Укажите метод формализации задачи SVD для кода.	Алгоритмизация	ППК-Р1	ППК-Р1.1-У-1

36.	Назовите инструмент для визуализации сингулярных чисел.	Matplotlib / Plotly	ППК-Р1	ППК-Р1.1-3-2
37.	Укажите метод адаптации SVD под специфику задачи.	Кастомизация / Модификация	ППК-Р1	ППК-Р1.3-В-1
38.	Назовите критерии выбора алгоритма SVD для задачи.	Точность / Скорость / Память	ППК-Р1	ППК-Р1.3-3-1
39.	Укажите определение нильпотентного оператора.	$A^k = 0$ для некоторого k	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
40.	Назовите структуру жордановой клетки.	λ на диагонали, 1 на наддиагонали	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
41.	Укажите условие существования жордановой нормальной формы.	Всегда существует над полем комплексных чисел	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
42.	Назовите понятие корневого подпространства.	$\text{Ker}(A - \lambda E)^k$	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
43.	Укажите алгоритм построения жорданова базиса.	Поиск цепочек корневых векторов	ОПК-1	ОПК-1.2-У-1
44.	Назовите способ определения ограничений при вычислениях с ЖНФ.	Анализ ресурсов и требований	УК-2	УК-2.1-3-1
45.	Укажите фактор ограничений при выборе метода диагонализации.	Вычислительные ресурсы	УК-2	УК-2.2-У-1
46.	Назовите форму опыта применения знаний в кейсе.	Кейс-стади / Проект	УК-2	УК-2.3-У-1
47.	Укажите определение эрмитова скалярного произведения.	$(x, y) = (y, x)^*$ / Сопряжённая симметрия	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1
48.	Назовите свойство унитарного оператора в эрмитовом пространстве.	$U^*U = E$ / Сохраняет скалярное произведение	ОПК-1	ОПК-1.1-3-1