
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«25» мая 2026 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Гомотопическая теория типов»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Прикладной искусственный интеллект

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2026

**Москва
2026**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	3
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	8
5. Учебно-методическое обеспечение	9
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Гомотопическая теория типов» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Прикладной искусственный интеллект», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Гомотопическая теория типов» позволяет студентам одновременно воспринимать типы как программы, логические утверждения и топологические пространства, освоить их формальную работу в proof-assistant-ax и применять принципы унивалентности и зависимых типов для строгой верификации математических доказательств и исследования фундаментальных групп, что открывает пути к современным исследованиям в области формальной верификации, безопасного программирования и новых оснований математики.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Прикладной искусственный интеллект» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин (модулей): «Математический анализ. Часть 1», «Математический анализ. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» или «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 1», «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2».

Цель изучения дисциплины (модуля): сформировать у студентов интегрированное представление о взаимосвязи вычислений, логики и геометрических (категориальных) пространств через гомотопическую теорию типов, охватывая синтаксис и семантику типовых конструкторов, их логическую интерпретацию и гомотопическое содержание.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- научить строить и манипулировать термами простых и зависимых типов,
- переводить базовые логические утверждения в типовый язык и обратно,
- использовать σ - и π -типы (в том числе для зависимых пар и полных расслоений),
- формулировать и доказывать равенства с помощью принципа J, функциональной экстенциональности и унивалентности, а также воспроизводить доказательство эквивалентности пространства петель окружности с $\mathbb{Z}$ (вычисление фундаментальной группы).

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- основные соответствия между вычислениями, логикой и абстрактными пространствами: типами, утверждениями, термами, доказательствами и объектами категорий;
- базовые конструкции теории типов: термы, типы, пустой тип, терминальный тип, натуральные числа, вселенные, сигма-типы, пи-типы и зависимые типы;
- логическую интерпретацию типовых конструкций, включая соответствия между синглтоном и истиной, пустым типом и ложью, сигма-типами и существованием, пи-типами и универсальными утверждениями;

— основные понятия теории путей и равенства в гомотопической теории типов: тип равенства, пространство путей, функциональную экстенциональность, зависимые пути, принцип J и унивалентность;

— идею вычисления фундаментальной группы окружности в языке теории типов, включая пространство петель окружности, число оборотов, `doubleCover`, связь пространства петель с целыми числами и доказательство нетривиальности пространства путей окружности;

уметь:

— строить термы простых и зависимых типов, использовать пустой и терминальный типы, натуральные числа, сигма-типы и пи-типы в формализации математических утверждений;

— переводить базовые логические утверждения в язык теории типов и обратно, включая тавтологии, каррирование, существование, универсальные утверждения и разрешимость предикатов;

— использовать сигма-типы для работы с зависимыми парами и полными пространствами расслоений, а также извлекать и применять компоненты термов сигма-типов;

— формулировать и доказывать утверждения о равенствах и путях, применять принцип J, функциональную экстенциональность, `cong` и зависимые пути в простых формальных доказательствах;

— воспроизводить основные шаги доказательства того, что пространство петель окружности эквивалентно $\mathbb{Z}$, включая построение пути из $\mathbb{Z}$ в себя, определение числа оборотов и использование обратной перемотки;

владеть:

— навыками работы в формальной среде, используемой в курсе, включая установку окружения, запись определений, построение термов и проверку корректности доказательств;

— методами применения триединства «вычисления — логика — пространства» для интерпретации одних и тех же конструкций с вычислительной, логической и геометрической точек зрения;

— приёмами формализации математических рассуждений с помощью зависимых типов, сигма-типов, пи-типов, типов равенства и пространств путей;

— техниками построения и анализа путей, петель и зависимых путей, включая использование унивалентности, функциональной экстенциональности и операций переноса вдоль путей;

— базовыми инструментами гомотопической теории типов для исследования нетривиальных пространственных объектов, в частности окружности, её пространства петель и связи фундаментальной группы окружности с группой целых чисел.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Код и содержание компетенции	Индикатор компетенции и перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает методы поиска и анализа информации в области разработки, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
	УК-1.2. Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем.
	УК-1.3. Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации.
УК-2. Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1. Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач.
	УК-2.2. Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения.
	УК-2.3. Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями.
ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает основные понятия, методы и результаты математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической и дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов и теоретической механики.
	ОПК-1.2. Умеет применять фундаментальные математические знания и методы для анализа и решения профессиональных задач.
	ОПК-1.3. Имеет практический опыт выбора, разработки и реализации математических моделей и методов при решении задач профессиональной деятельности.
ОПК-6. Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для	ОПК-6.1. Знает принципы алгоритмизации, основные структуры данных, парадигмы программирования, методы разработки, тестирования и отладки компьютерных программ.
	ОПК-6.2. Умеет разрабатывать, документировать, тестировать и

практического применения	отлаживать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения, с использованием современных языков и сред разработки.
	ОПК-6.3. Имеет практический опыт разработки и сопровождения компьютерных программ и программных комплексов для решения прикладных задач.

3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Практические занятия			
1	Триединство	16	16	2	60	Домашнее задание, Аудиторная работа, Контрольная работа
2	Фундаментальная группа окружности	14	16	2	60	Домашнее задание, Аудиторная работа, Контрольная работа
	Зачет с оценкой			4		Коллоквиум
Итого:		30	32	8	120	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		190				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Триединство	Триединство вычислений, логики и абстрактных пространств. Установка окружения. Термы и типы. Истина / Синглтон / Терминальный объект. Ложь / Пустой тип / Начальный объект. Натуральные числа. Вселенные. Зависимые типы. Предикаты / Зависимые типы / Расслоения. Интерпретация расслоений. Использование триединства. Сигма-типы. Существование / Зависимая пара / Полное пространство расслоений. Создание термов сигма-типов. Использование термов сигма-типов. Тавтологии. Каррирование. Декартово замкнутые категории. Пи-типы. Определение сложения. Доказательства утверждений. Разрешимость предикатов на натуральных числах. Пути и равенство. Тип равенства. Пространство путей и его свойства. Унивалентность. Функциональная экстенциональность. Обоснование принципа J. Зависимые пути: мотивирующие примеры; определение; как <code>pathToFun</code> взаимодействует с другими типами.
2	Фундаментальная группа окружности	Окружность. Нетривиальность пространства путей окружности. Определение <code>flipPath</code> с помощью унивалентности. Поднятие путей с помощью <code>doubleCover</code>. Различные понятия "пустоты". Доказательство <code>true/=false</code>. Определение <code>cong</code>. Пространство петель окружности. Определение пространства петель. Создание пути из $\mathbb{Z}$ в себя же. Число оборотов. $\mathbb{Z}$ -- множество. Пространство петель пространства петель. $\mathbb{Z}$ как непересекающееся объединение $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$. Непересекающееся объединение множеств -- множество. Пространство путей непересекающихся объединений. Доказательство <code>Path$\equiv$$\sqcup$NoConfusion</code>. Пропозициональная точка зрения. Пространство петель -- $\mathbb{Z}$. Обратная перемотка.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Примаков, Д. А. Геометрия и топология [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д. А. Примаков, Р. Я. Хамидуллин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : МФПА, 2011. - 272 с. (Университетская серия). - ISBN 978-5-902597-13-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/451172> (дата обращения: 14.07.2026). – Режим доступа: по подписке.

2. Уткин, А. А. Геометрия: Топология. Гладкие линии и поверхности. Основания геометрии : учебное пособие / А. А. Уткин, Т. И. Уткина. - 2-е изд., стер. - Москва : ФЛИНТА, 2017. - 127 с. - ISBN 978-5-9765-3436-0. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1583193> (дата обращения: 14.07.2026). – Режим доступа: по подписке.

Дополнительная литература:

1. Скопенков, А. Б. Алгебраическая топология с геометрической точки зрения: Учебное пособие / Скопенков А.Б. - Москва : МЦНМО, 2016. - 269 с.: ISBN 978-5-4439-2477-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/970142> (дата обращения: 14.07.2026). – Режим доступа: по подписке.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и

обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам»	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		

Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Гомотопическая теория типов» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания, аудиторная работа, контрольная работа, коллоквиум, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар – это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре или лекции, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в аудиторной работе студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения,

аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы – получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины и продемонстрировать навыки их практического применения.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуются создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Гомотопическая теория типов»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме **зачета с оценкой**, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Гомотопическая теория типов» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	25%	10	Набор задач по темам недели
Аудиторная работа	15%	15	Активная работа студента на семинаре или лекции
Контрольная работа	35%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Зачет с оценкой	25%	1	Коллоквиум - устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Гомотопическая теория типов»: $0,25 \times \text{среднее за домашние задания} + 0,15 \times \text{среднее за аудиторную работу} + 0,35 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,25 \times \text{зачет с оценкой}$.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

1. Термы-соответствия – опишите, как в HoTT соотносятся три понятия: терм $\leftrightarrow$ доказательство $\leftrightarrow$ путь. Приведите короткое объяснение каждому из соответствий.
2. Базовые типы – напишите сигнатуры (в синтаксисе Lean/Agda) для типов $\perp$, $\mathbb{1}$, $\mathbb{N}$ и универса $\mathcal{U}$. Укажите их конструкторы ($\perp$, $\bullet$, zero / succ) и уровни ($\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$ и т.д.).
3. Σ -тип – определите тип $\text{Even} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}_0$, который кодирует « n чётно», используя Σ -конструктор. Сформулируйте тип и объясните смысл второй компоненты.
4. Перевод логики в типы – запишите формулу $\forall x:\mathbb{N} \exists y:\mathbb{N} (y=x+x)$ в виде Π -/ Σ -типа.
5. Построение терма – введите термин, доказывающий Even 4. Приведите его полностью (пример: $\langle 2, \text{refl} \rangle$).
6. Экстракция из Σ -типа – для произвольного $p : \Sigma (n : \mathbb{N}), \text{Even } n$ извлеките первую компоненту ($\text{proj}_1 p$) и покажите, как с помощью proj_2 получить доказательство чётности.
7. Тип идентичности – напишите определение $\text{Id}_A (a b : A) : \mathcal{U}_0$ и конструктор refl . Объясните, почему refl является единственным вводимым элементом.

Примерные задания для контрольной работы

1. Тавтология vs. пустой тип – докажите в HoTT, что тип $\mathbb{1}$ эквивалентен типу истины (т.е. существует обратимый отображатель $\mathbb{1} \leftrightarrow \top$). Оформите доказательство, используя path и equiv .
2. Π -тип и каррирование – постройте терм, реализующий каррирование функции $f:(x:\mathbb{N}) \rightarrow ((y:\mathbb{N}) \rightarrow Pxy)$ в эквивалентный терм типа $g:(xy:\mathbb{N}) \rightarrow Pxy$. Укажите используемые правила λ -абстракции и применения.
3. Принцип J – с помощью индукции по пути (принцип J) докажите, что для любого $n : \mathbb{N}$ тип $\text{Id } \mathbb{N} (\text{succ } n) (\text{succ } n)$ имеет элемент refl . В ответе укажите параметризацию семьи путей C .
4. Фундаментальная группа окружности – опишите два взаимно обратимых отображения
— $\text{encode} : \text{Path } S^1 \text{ base base} \rightarrow \mathbb{Z}$ (число оборотов)
— $\text{decode} : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Path } S^1 \text{ base base}$ (повторение loop)
и докажите один из гомотопических условий, например $\text{encode} (\text{decode } k) = k$.

Примерные задания для семинаров

1. Перевод предикатов – в малой группе (по 2–3 человека) каждый переводит одну из следующих логических формул в типы HoTT и обратно:
— $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} (y = 2 \cdot x)$
— $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \forall n (f (\text{succ } n) = \text{succ } (f n))$
— $\neg (\exists x : \text{Bool}, x = \text{true} \wedge x = \text{false})$
После перевода обсудите, какие конструкции (Π , Σ , пустой тип) использовались.
2. Пути и конкатенация – постройте в Agda (или Lean) путь $p : \text{Path } \mathbb{N} \ 2 \ 5$ и путь $q : \text{Path } \mathbb{N} \ 5 \ 9$. Затем с помощью оператора конкатенации ($_ \cdot _$) получите путь $p \cdot q : \text{Path } \mathbb{N} \ 2 \ 9$.

Покажите, как проверить, что $p \cdot q$ гомотопически эквивалентен пути, полученному напрямую (Path $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

3. Univalence in practice – используя аксиому унивалентности, докажите, что тип Bool эквивалентен типу $\Sigma (b : \text{Bool}), \text{Unit}$. Объясните, как из ua получаем нужный путь между типами.

4. Double cover of S^1 – опишите в виде семейства типов $\text{Cover} : S^1 \rightarrow \mathcal{U}_0$ двойное покрытие окружности (покрытие двумя точками, меняющимися при прохождении loop). Сформулируйте функцию $\text{transport Cover loop} : \text{Cover base} \rightarrow \text{Cover base}$ и покажите, что она меняет $\text{true} \leftrightarrow \text{false}$.

Примерные задания для коллоквиума

1. Дайте определение σ -типа и приведите пример, где σ -тип используется для описания «существования» в логике.

2. Что такое унивалентность? Какие два понятия в HoTT она связывает?

3. Переведите формулу «для любого натурального n существует m такой, что $m = n + n$ » в язык Π/Σ -типов.

4. Как выглядит базовый конструктор идентичности refl и почему он единственный?

5. Что такое принцип J? В чем его роль при доказательствах равенств?

6. Охарактеризуйте тип $\text{Path } S^1 \text{ base base}$. Является ли он эквивалентен единичному типу? Обоснуйте ответ.

7. Как в HoTT формулируется функциональная экстенциональность (FunExt)?

8. Назовите один proof-assistant, в котором реализованы основные конструкции HoTT, и кратко опишите процесс установки (одно-два шага).

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция	Индикатор
1.	Опишите триединство вычислений, логики и абстрактных пространств в HoTT.	Термы соответствуют доказательствам, типы соответствуют propositional statements, пути соответствуют равенствам между термами	ОПК-1	ОПК-1.1
2.	Дайте формальное определение пустого типа $\perp$ и единичного типа $\mathbb{1}$.	$\perp$ не имеет конструкторов, $\mathbb{1}$ имеет единственный конструктор $\text{star} : \mathbb{1}$	ОПК-1	ОПК-1.1
3.	Запишите сигнатуру типа натуральных чисел $\mathbb{N}$ с конструкторами.	$\mathbb{N} : \mathcal{U}_0$ с конструкторами $\text{zero} : \mathbb{N}$ и $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	ОПК-1	ОПК-1.2
4.	Определите зависимый тип как расслоение над базовым типом.	Зависимый тип $P : A \rightarrow \mathcal{U}$ интерпретируется как расслоение с базой A и слоем $P(a)$ над точкой a	ОПК-1	ОПК-1.1

5.	Запишите σ -тип для кодирования пары натуральное число и доказательство его чётности.	$\Sigma (n : \mathbb{N}), \Sigma (k : \mathbb{N}),$ $\text{Id}_{\mathbb{N}} n (2 * k)$	ОПК-1	ОПК-1.2
6.	Переведите формулу $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} (y = x + x)$ в язык типов через π и σ .	$\Pi (x : \mathbb{N}), \Sigma (y : \mathbb{N}),$ $\text{Id}_{\mathbb{N}} y (x + x)$	ОПК-1	ОПК-1.2
7.	Объясните соответствие между единичным типом $\mathbb{1}$ и логической истиной.	Наличие терма $\text{star} : \mathbb{1}$ эквивалентно доказательству истинного высказывания, так как $\mathbb{1}$ inhabited	ОПК-1	ОПК-1.1
8.	Сконструируйте термин типа $\text{Even } 4$ в виде конкретной зависимой пары.	$\langle 2, \text{refl} \rangle : \Sigma (k : \mathbb{N}),$ $\text{Id}_{\mathbb{N}} 4 (2 * k)$	ОПК-1	ОПК-1.2
9.	Запишите тип идентичности $\text{Id}_A(a,b)$ и его базовый конструктор refl .	$\text{Id}_A : A \rightarrow A \rightarrow \mathbf{U}_0,$ $\text{refl} : \Pi (a : A), \text{Id}_A$ $a a$	ОПК-1	ОПК-1.1
10.	Сформулируйте аксиому функциональной экстенциональности FunExt .	$\text{FunExt} : \Pi \{A B : \mathbf{U}\} \{f g : A \rightarrow B\},$ $(\Pi x, \text{Id}_B (f x) (g x)) \rightarrow \text{Id}_{\{A \rightarrow B\}} f g$	ОПК-1	ОПК-1.2
11.	Опишите принцип J индукции по пути для типа идентичности.	Для $C : \Pi x y, \text{Id}_A x y \rightarrow \mathbf{U}$, если есть $c : \Pi x, C x x \text{ refl}$, то получаем $J C c : \Pi x y p, C x y p$	ОПК-1	ОПК-1.2
12.	Определите операции конкатенации и обращения для путей $\text{Path } A a b$.	Конкатенация $p \cdot q : \text{Path } A a c,$ обращение $!p : \text{Path } A b a$ для $p : \text{Path } A a b$	ОПК-6	ОПК-6.1
13.	Сформулируйте аксиому унивалентности и её следствие для эквивалентностей.	$(A \simeq B) \simeq \text{Id}_{\mathbf{U}} A B$, эквивалентность типов эквивалентна их идентичности во вселенной	ОПК-1	ОПК-1.1
14.	Определите покрытие doubleCover над окружностью S^1 как семейство типов.	$\text{Cover} : S^1 \rightarrow \mathbf{U},$ $\text{Cover base} := \text{Bool},$ $\text{Cover loop} := \text{not}$ (перестановка true и false)	ОПК-1	ОПК-1.2
15.	Опишите пространство петель $\Omega(S^1)$ для окружности S^1 .	$\Omega(S^1) := \text{Id}_{\{S^1\}}$ $\text{base base},$ пространство путей из base в себя	ОПК-1	ОПК-1.1
16.	Сформулируйте эквивалентность между $\text{Loop } S^1$ и $\mathbb{Z}$ через encode и decode .	$\text{encode} : \text{Loop } S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$ считает обороты, $\text{decode} : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Loop } S^1$ повторяет loop , $\text{compose} \simeq \text{id}$	ОПК-1	ОПК-1.2
17.	Докажите нетривиальность $\text{Path } S^1 \text{ base base}$ через encode в $\mathbb{Z}$.	encode отправляет loop в $1 : \mathbb{Z}$, если бы Path был тривиален, encode был бы константой,	УК-2	УК-2.2

		противоречие		
18.	Примените cong к функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и пути $p : \text{Id}_{\mathbb{N}} m n$.	$\text{cong } f \, p : \text{Id}_{\mathbb{N}} (f \, m) (f \, n)$, сохраняет равенство при применении функции	ОПК-6	ОПК-6.2
19.	Докажите в HoTT что $\text{true} \neq \text{false}$ через индукцию на Bool .	Предположим $p : \text{Id}_{\text{Bool}} \text{true false}$, через bool-induction получаем противоречие, тип пустой	УК-1	УК-1.2
20.	Дайте определение transport вдоль пути $p : \text{Id}_A a b$ для зависимого типа P .	$\text{transport } P \, p : P \, a \rightarrow P \, b$, переносит элементы вдоль пути через принцип J	ОПК-6	ОПК-6.1