

---

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета  
АНО ВО «Центральный университет»  
«07» марта 2024 г.  
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
«Стохастический анализ»**

**Направление подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**Направленность (профиль) подготовки:** Математика и искусственный интеллект

**Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Срок освоения программы:** 4 года

**Год набора:** 2024

**Москва  
2024**

## Содержание

<b>1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Перечень планируемых результатов обучения</b> .....	<b>4</b>
<b>3. Тематический план</b> .....	<b>5</b>
<b>4. Содержание дисциплины (модуля)</b> .....	<b>5</b>
<b>5. Учебно-методическое обеспечение</b> .....	<b>6</b>
<b>6. Материально-техническое обеспечение</b> .....	<b>6</b>
<b>7. Методические и оценочные материалы</b> .....	<b>8</b>

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Стохастический анализ» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и искусственный интеллект, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Стохастический анализ» позволяет корректно описывать динамику случайных процессов и применять стохастические дифференциальные уравнения в реальных задачах моделирования и прогнозирования.

### Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и искусственный интеллект и входит в обязательную часть Блока 1.

Дисциплина (модуль) изучается на 3 курсе в 5 семестре.

**Цель изучения дисциплины (модуля):** сформировать у обучающихся системные знания и практические навыки в области стохастического анализа, обеспечивающие способность моделировать, исследовать и применять случайные процессы и стохастические дифференциальные уравнения при решении прикладных задач.

**Задачи изучения дисциплины (модуля)** направлены на формирование у студентов следующих знаний, умений и навыков:

- сформировать понимание основных классов случайных процессов, включая винеровский, пуассоновский и марковские процессы, и их ключевых свойств;
- изучить теорию мартингалов и освоить методы анализа их свойств в непрерывном и дискретном времени;
- освоить основы стохастического интеграла и формулу Ито, а также научиться применять их к функциям от случайных процессов;
- сформировать умение решать простейшие стохастические дифференциальные уравнения и интерпретировать полученные решения;
- развить навыки моделирования и применения аппарата стохастического исчисления при решении прикладных задач, включая финансовые и инженерные модели.

### В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

#### **знать:**

- основные классы случайных процессов (винеровский, пуассоновский, марковские);
- понятие мартингала и его свойства;
- основы стохастического интеграла и формулы Ито;
- принципы стохастических дифференциальных уравнений;

#### **уметь:**

- работать с моделями случайных процессов;
- применять формулу Ито к функциям от процессов;
- решать простейшие стохастические дифференциальные уравнения;
- анализировать свойства мартингалов;

#### **владеть:**

- аппаратом стохастического исчисления;
- методами моделирования и анализа случайных процессов;
- навыками применения СДУ в задачах (например, финмодели).

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

### 3. Тематический план

№п/п	Основной уровень Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
Лекции	Семинары (практические занятия)					
1	Введение	2	2		9	Домашние задания
2	Случайные процессы	2	2		9	Домашние задания
3	Винеровский процесс	2	2		9	Домашние задания
4	Пуассоновский процесс	2	2		9	Домашние задания Контрольная работа
5	Марковские процессы	2	2		9	Домашние задания
6	Мартингалы	2	2		9	Домашние задания
7	Теория мартингалов	2	2		9	Домашние задания
8	Квадратичная вариация	2	2		9	Домашние задания
9	Интеграл Ито	2	2		10	Домашние задания Контрольная работа
10	Формула Ито	3	3		10	Домашние задания
11	СДУ	3	3		10	Домашние задания
12	Применения	3	3		10	Домашние задания
13	Обобщение	3	3		10	Домашние задания
	<i>Зачет с оценкой</i>			8		
	<i>Итого:</i>	<i>30</i>	<i>30</i>	<i>8</i>	<i>122</i>	
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</i>	<i>190</i>				
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</i>			<i>5</i>		

### 4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Введение	Вероятностные пространства, $\sigma$ -алгебры, фильтрации
2	Случайные процессы	Определение, траектории, адаптированность
3	Винеровский процесс	Определение, свойства, непрерывность
4	Пуассоновский процесс	Скачки, интенсивность, свойства
5	Марковские процессы	Марковское свойство, примеры
6	Мартингалы	Определение и базовые свойства
7	Теория мартингалов	Сходимости, неравенства
8	Квадратичная вариация	Вариация винеровского процесса
9	Интеграл Ито	Построение стохастического интеграла Свойства, изометрия Ито
10	Формула Ито	Основная формула и примеры
11	СДУ	Постановка стохастических дифференциальных уравнений Методы решения, геом. броуновское движение
12	Применения	Финансовые модели, Блэк–Шоулз
13	Обобщение	Повторение и разбор задач

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

### *Основная литература:*

1. Булинский, А. В. Теория случайных процессов/Булинский А.В., Ширяев А.Н. - Москва : Физматлит, 2005. - 400 с.: ISBN 978-5-9221-0335-0. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544606>

2. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие для вузов, Вентцель, Е. С., 2000

### *Дополнительная литература:*

1. Коралов, Л. Б. Теория вероятностей и случайные процессы / Л. Б. Коралов, Я. Г. Синай, под редакцией Б. М. Гуревича, перевод с английского Э. В. Переходцевой. — Москва : МЦНМО, 2014. — 408 с. — ISBN 978-5-4439-2073-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/71821> (дата обращения: 00.00.0000). — Режим доступа: для авториз. пользователей

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том

числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	<a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp">https://elibrary.ru/defaultx.asp</a>
2.	База данных для IT-специалистов	<a href="https://habr.com">https://habr.com</a>
3.	База данных ScienceDirect	<a href="https://www.sciencedirect.com">https://www.sciencedirect.com</a>
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	<a href="https://minobrnauki.gov.ru/">https://minobrnauki.gov.ru/</a>
5.	Федеральный портал «Российское образование»	<a href="https://www.edu.ru/">https://www.edu.ru/</a>
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	<a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	<a href="http://school-collection.edu.ru/">http://school-collection.edu.ru/</a>
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	<a href="http://fcior.edu.ru/">http://fcior.edu.ru/</a>

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
<b>Операционные системы:</b>		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Браузеры:</b>		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Офисные приложения:</b>		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Программное обеспечение для планирования и учета времени:</b>		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления проектами:</b>		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы управления базами данных:</b>		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы резервного копирования (backup):</b>		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
<b>Справочно-правовые системы:</b>		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
<b>Средства антивирусной защиты:</b>		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
<b>Среды разработки:</b>		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое

CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Пакеты программных средств и библиотек:</b>		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления библиографической информацией:</b>		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Сервисы и службы:</b>		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Стохастический анализ» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания и контрольные работы, квизы, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия

*Семинарское занятие* – активное взаимодействие студентов с преподавателем и друг с другом, направленное на применение теоретических знаний на практике.

Занятие включает выполнение конкретных заданий, лабораторных работ или проектов, что способствует глубокому пониманию материала. Студенты должны заранее ознакомиться с темой занятия и подготовить необходимые материалы. В процессе работы важно активно участвовать в обсуждениях, задавать вопросы и делиться мнениями. Преподаватель предоставляет обратную связь и направляет студентов, что позволяет улучшить их навыки и углубить знания.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

### **Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

#### **Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Стохастический анализ»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме **зачета с оценкой**, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

<b>Десятибалльная оценка</b>	<b>Пятибалльная оценка</b>	<b>Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)</b>
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	
8	Отлично	
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими
6	Хорошо	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		задачами.
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Стохастический анализ» для обоих уровней оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
Домашние задания	20%	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	40%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Зачет с оценкой	40%	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по дисциплине (модулю)

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Стохастический анализ»:** « $0,2 \times$  среднее за домашние задания +  $0,4 \times$  среднее за контрольные работы +  $0,4 \times$  зачет с оценкой».

### Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

#### Примерные домашние задания

##### Домашнее задание: Винеровский процесс

1. Докажите, что математическое ожидание винеровского процесса равно нулю.
2. Вычислите ковариационную функцию винеровского процесса.
3. Докажите независимость приращений.
4. Смоделируйте траекторию винеровского процесса методом дискретизации.

##### Домашнее задание: Пуассоновский процесс

1. Выведите распределение числа событий за фиксированный интервал времени.
2. Докажите независимость приращений пуассоновского процесса.
3. Найдите математическое ожидание и дисперсию процесса.
4. Смоделируйте траекторию пуассоновского процесса при заданной интенсивности.

##### Домашнее задание: Теория мартингалов

1. Сформулируйте и докажите неравенство Дооба для неотрицательных субмартингалов.
2. Исследуйте условия сходимости мартингала почти наверное.
3. Приведите пример сходящегося мартингала.
4. Проанализируйте связь равномерной интегрируемости и сходимости.

### Домашнее задание: Интеграл Ито

1. Постройте интеграл Ито для простой ступенчатой функции.
2. Докажите изометрию Ито.
3. Вычислите математическое ожидание стохастического интеграла.
4. Смоделируйте интеграл Ито численно.

### Примерные задания по контрольной работе

#### Контрольная работа: Стохастический анализ

##### 1. Вероятностное пространство и фильтрация

Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

1. Постройте пример возрастающей фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .
2. Докажите, что  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  при  $s < t$ .
3. Приведите пример случайной величины, измеримой относительно  $\mathcal{F}_t$ .

##### 2. Адаптированность процесса

Пусть задан процесс  $X_t = W_t + t$ , где  $W_t$  — винеровский процесс.

1. Докажите, что  $X_t$  адаптирован к естественной фильтрации винеровского процесса.
2. Исследуйте, является ли процесс  $Y_t = W_t$  при фиксированном  $T > t$  адаптированным.

##### 3. Свойства винеровского процесса

1. Вычислите математическое ожидание и дисперсию  $W_t$ .
2. Найдите ковариацию  $E[W_s W_t]$ .
3. Докажите независимость приращений на непересекающихся интервалах.

##### 4. Пуассоновский процесс

Пусть  $N_t$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ .

1. Найдите распределение  $N_t$ .
2. Вычислите  $E[N_t]$  и  $\text{Var}(N_t)$ .
3. Определите вероятность отсутствия событий на интервале длины  $t$ .

##### 5. Марковское свойство

1. Докажите марковское свойство винеровского процесса.
2. Рассмотрите процесс Орнштейна–Уленбека и проверьте его марковость.
3. Найдите условное распределение  $W_t$  при фиксированном  $W_s$ ,  $s < t$ .

##### 6. Мартингалы

1. Докажите, что винеровский процесс является мартингалом.
2. Исследуйте, является ли процесс  $W_t^2 - t$  мартингалом.
3. Проверьте выполнение условия мартингала для заданного дискретного процесса.

##### 7. Сходимость мартингалов

1. Сформулируйте теорему о сходимости неотрицательного мартингала.
2. Проверьте выполнение условий равномерной интегрируемости для заданного процесса.
3. Примените неравенство Дооба к заданному субмартингалу.

##### 8. Квадратичная вариация и интеграл Ито

1. Вычислите квадратичную вариацию винеровского процесса на  $[0, t]$ .
2. Докажите изометрию Ито для простой функции.

3. Найдите  $E[(\int_0^t W_s dW_s)^2]$ .

### 9. Формула Ито

1. Примените формулу Ито к функции  $f(x)=x^3$ .
2. Найдите дифференциал  $e^{Wt}$ .
3. Получите выражение для  $d(Wt^2)$  и сравните с классическим правилом дифференцирования.

### 10. Стохастические дифференциальные уравнения и применение

Рассмотрите СДУ геометрического броуновского движения:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

1. Найдите явное решение.
2. Вычислите математическое ожидание  $S_t$ .
3. Поясните связь полученного решения с моделью Блэка–Шоулза.

### Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Вычислите математическое ожидание винеровского процесса $W_t$ .	0 ожидание	ОПК-1
2	Вычислите дисперсию винеровского процесса $W_t$ .	t дисперсия	ОПК-1
3	Вычислите ковариацию $Cov(W_s, W_t)$ при $s < t$ .	s ковариация	ОПК-1
4	Для пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda$ вычислите математическое ожидание $N_t$ .	$\lambda t$ ожидание	ОПК-1
5	Для пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda$ вычислите дисперсию $N_t$ .	$\lambda t$ дисперсия	ОПК-1
6	Вычислите квадратичную вариацию винеровского процесса на интервале $[0, t]$ .	t вариация	ОПК-1
7	Вычислите $E[\int_0^t W_s ds]$ .	0 ожидание	ОПК-1
8	Вычислите $E[W_t^2]$ .	t ожидание	ОПК-1
9	Для двоичного мартингала с постоянным математическим ожиданием 1 укажите его математическое ожидание в момент времени $t$ .	1 ожидание	ОПК-1
10	Для геометрического броуновского движения без дрейфа ( $\mu=0$ ) вычислите $E[S_t]$ при $S_0=1$ .	1 ожидание	ОПК-1
11	Вычислите $E[W_t^3]$ .	0 момент	ПК-1
12	Примените формулу Ито к функции $f(x)=x^2$ и укажите коэффициент при $dt$ в дифференциале $d(W_t^2)$ .	1 коэффициент	ПК-1
13	Вычислите $E[(\int_0^t W_s dW_s)^2]$ по изометрии Ито.	$t^2/2$ значение	ПК-1
14	Для СДУ $dX_t = aX_t dt$ при $X_0=1$ укажите $X_t$ .	$e^{at}$ решение	ПК-1
15	Для СДУ геометрического броуновского движения укажите дисперсию логарифма цены $\ln S_t$ .	$\sigma^2 t$ дисперсия	ПК-1
16	Для стандартного винеровского процесса вычислите плотность распределения $W_t$ в точке 0.	$1/\sqrt{2\pi t}$ плотность	ПК-1

17	Для мартингала $W_t$ вычислите $E[W_t F_s]$ при $s < t$ .	$W_s$ условное ожидание	ПК-1
18	Для пуассоновского процесса вычислите вероятность отсутствия событий на интервале длины $t$ .	$e^{-\lambda t}$ вероятност ь	ПК-1
19	Вычислите $E[W_t W_s]$ при $s < t$ .	$s$ ожидание	ПК-1
20	Для СДУ $dX_t = \sigma dW_t$ при $X_0 = 0$ вычислите дисперсию $X_t$ .	$\sigma^2 t$ дисперсия	ПК-1