

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета  
АНО ВО «Центральный университет»  
«07» марта 2024 г.  
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
«Математический анализ II. Продвинутый курс»**

**Направление подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**Направленность (профиль) подготовки:** Математика и искусственный интеллект

**Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Срок освоения программы:** 4 года

**Год набора:** 2024

**Москва  
2024**

## Содержание

<b>1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Перечень планируемых результатов обучения</b> .....	<b>4</b>
<b>3. Тематический план</b> .....	<b>6</b>
<b>4. Содержание дисциплины (модуля)</b> .....	<b>6</b>
<b>5. Учебно-методическое обеспечение</b> .....	<b>7</b>
<b>6. Материально-техническое обеспечение</b> .....	<b>7</b>
<b>7. Методические и оценочные материалы</b> .....	<b>9</b>

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математический анализ II. Продвинутый курс» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и искусственный интеллект, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Математический анализ II. Продвинутый курс» является основой для многих других математических дисциплин и научных направлений, включая физику, экономику и инженерные науки. Дисциплина (модуль) развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

### **Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и искусственный интеллект и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе во 2 семестре.

**Цель изучения дисциплине (модулю):** в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

### **Задачи изучения дисциплине (модулю):**

- освоение пределов и непрерывности в пространстве  $(\mathbb{R}^n)$  и их обобщений;
- знание частных производных, градиентов;
- понимание структуры кратных интегралов;
- знание ряда Тейлора;
- применение понятий непрерывности для анализа функций;
- вычисление частных производных и градиентов, использование матрицы Якоби;
- вычисление кратных интегралов и применение формул для упрощения расчётов;
- дифференцирование сложных функций и интерпретация их свойств;
- применение множителей Лагранжа для нахождения экстремумов;
- использование координатных преобразований для вычисления интегралов.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач
ПК-3.	Способен применять методы математического и алгоритмического моделирования для решения как теоретических, так и практических задач в рамках профессиональной деятельности	ПК-3.1.	Знает основные методы математического и алгоритмического моделирования, а также их применение для решения теоретических и прикладных задач
		ПК-3.2.	Умеет применять методы математического и алгоритмического моделирования для анализа и

			решения различных задач в области математики и компьютерных наук
		ПК-3.3.	Имеет опыт использования методов математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач в профессиональной деятельности

### 3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
Лекции	Семинарские (практические занятия)					
1	Пространство $R^n$ . Функции в пространстве $R^n$	20	20		22	Домашнее задание Коллоквиум
2	Условная и безусловная оптимизация	20	20		22	Домашнее задание Контрольная работа
3	Интегралы	20	20		20	Домашнее задание Контрольная работа
	<i>Экзамен</i>			6		
	<i>Итого:</i>	<i>60</i>	<i>60</i>	<i>6</i>	<i>64</i>	
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</i>	<i>190</i>				
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</i>	<i>5</i>				

### 4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Пространство $R^n$ . Функции в пространстве $R^n$	Непрерывность функций. Предел функций и замечательные пределы. Сравнение функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке Числовые последовательности и их свойства. Пределы последовательностей
2	Условная и безусловная оптимизация	Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о среднем. Правило Лопитала. Выпуклость и задачи оптимизации. Формула Тейлора. Применение производной к исследованию функций
3	Интегралы	Определение и свойства производной. Геометрический и практический смысл производной. Параметрические и неявные функции. Нахождение их производных

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

### *Основная литература:*

1. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562115>.

2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562116>.

### *Дополнительная литература:*

1. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

2. Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560461>.

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;

— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	<a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp">https://elibrary.ru/defaultx.asp</a>
2.	База данных для IT-специалистов	<a href="https://habr.com">https://habr.com</a>
3.	База данных ScienceDirect	<a href="https://www.sciencedirect.com">https://www.sciencedirect.com</a>
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	<a href="https://minobrnauki.gov.ru/">https://minobrnauki.gov.ru/</a>
5.	Федеральный портал «Российское образование»	<a href="https://www.edu.ru/">https://www.edu.ru/</a>
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	<a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	<a href="http://school-collection.edu.ru/">http://school-collection.edu.ru/</a>
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	<a href="http://fcior.edu.ru/">http://fcior.edu.ru/</a>

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
<b>Операционные системы:</b>		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Браузеры:</b>		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Офисные приложения:</b>		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Программное обеспечение для планирования и учета времени:</b>		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления проектами:</b>		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы управления базами данных:</b>		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы резервного копирования (backup):</b>		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
<b>Справочно-правовые системы:</b>		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное

<b>Средства антивирусной защиты:</b>		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
<b>Среды разработки:</b>		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Пакеты программных средств и библиотек:</b>		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления библиографической информацией:</b>		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Сервисы и службы:</b>		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математический анализ II. Продвинутый курс» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, коллоквиум, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Коллоквиум* – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким

темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

### **Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

#### **Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Математический анализ II. Продвинутый курс»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

<b>Десятибалльная оценка</b>	<b>Пятибалльная оценка</b>	<b>Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)</b>
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	
8	Отлично	
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для
6	Хорошо	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Математический анализ II. Продвинутый курс» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	14	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	30%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	15%	1	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Экзамен	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время. На продвинутом уровне возможен дополнительный устный экзамен

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Математический анализ II. Продвинутый курс»:** « $0,2 \times$  среднее за домашние задания +  $0,3 \times$  среднее за контрольные работы +  $0,15 \times$  коллоквиум +  $0,35 \times$  экзамен».

### Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

#### Примерные темы для коллоквиума

#### 1. Продвинутый уровень

Тема «множества в  $\mathbb{R}^n$ »

- Доказательства
  - Теорема Больцано — Вейерштрасса в  $\mathbb{R}^n$  — теорема 2.

Тема «частные производные и дифференциалы высших порядков»

- Доказательства
  - Теорема о равенстве смешанных производных — теорема 1.

Тема «вектор-функция. Производная»

- Доказательства
- Производная переменной дуги кривой — теорема 4.

Тема «теорема о неявной функции»

- Доказательства
- Теорема о неявной функции — теорема 1.

Тема «определённый интеграл»

- Формулировки
- Интегральная теорема о среднем — теорема 17.
- Доказательства
- Интегральная теорема о среднем — теорема 17.

Тема «геометрические приложения интегралов»

- Доказательства
- Формула площади поверхности вращения — теорема 3.

**Примерные задания по контрольной работе**

**Контрольная работа №1**

\*\*\*  
ЗАДАЧА 1

**0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 балла**

Укажи:

- а) внутренние точки,
- б) граничные точки,
- в) предельные точки, множества
- г) изолированные точки,
- д) точки прикосновения

$$X \equiv \underline{2} + 1/n^3 : n \in \mathbb{N} \} \cup (3; 4] \cup \{5\}.$$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 2

**1 + 1 балл**

Исследуй функцию

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{|x^2 y^2|^{1/2}}{(x^2 - xy + y^2)^\alpha}, & \text{если } (x; y) \neq (0; 0), \\ 0, & \text{если } (x; y) = (0; 0). \end{cases}$$

на дифференцируемость в точке (0; 0)

- а) при  $\alpha = \frac{1}{2}$ ;
- б) при  $\alpha = \frac{1}{4}$ .

\*\*\*  
ЗАДАЧА 3

**2 балла**

Исследуй на экстремум функцию  $u(x; y)$ , заданную неявно уравнением

$$2x^2 + y^2 - u^2 + 4x - 6y - 4u + 8 = 0.$$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 4

**0,5 + 0,5 балла**

Вычисли интегралы:

а)  $\int (\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x})^2 dx;$                       б)  $\int x^2 \cos(x^3) dx.$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 5

**1,5 балла**

Вычисли интеграл  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x+3} dx.$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 6

**1,5 балла**

Реши уравнение

$$y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x > 0, y > 0,$$

преобразовав его к полярным координатам.

\*\*\*  
ЗАДАЧА 7

**2 балла**

Исследуй на экстремум функцию

$$u = -2x + 8y + 3$$

при условии

$$x^2 - 4xy + 2y^2 + 1 = 0.$$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 8

**2 балла**

Вычисли интеграл  $\int \frac{1 + \sin 4x}{1 + \cos 4x} \cdot e^{4x} dx.$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 9

**2 балла**

Исследуй на непрерывность и дифференцируемость в точке  $(0;0)$  функцию

$$f(x; y) = \begin{cases} |y|^\alpha \sin x^2, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0 \end{cases}$$

в зависимости от параметра  $\alpha$ .

**Примерные домашние задания**  
**Домашнее задание по теме «Дифференцирование**  
**функции нескольких переменных»**

## Задачи

### Частные производные

*** ЗАДАЧА 1	<b>1 балл</b> Найди частные производные функций: а) $f(x; y) = \operatorname{arctg}^3 x + \arcsin^3 2y - 3x \operatorname{ctg} y$ ; б) $f(x; y) = \frac{x(x-y)}{y^2}$ ; в) $f(x; y) = \sin(6x \operatorname{tg} y) - x^2 \log_5 (\sqrt[6]{11y})$ ; г) $f(x; y) = e^{-x^2} (\cos 3y - x \sin^4 y)$ .
-----------------	--

*** ЗАДАЧА 2	<b>1 балл</b> Вычисли частные производные функций: а) $f(x; y) = e^{\operatorname{arctg}(xy^3)}$ в точке (1; 1); б) $g(x; y) = (3x + y)^{3x+y}$ в точке (1; -2).
-----------------	---

### Дифференцируемость функции нескольких переменных

*** ЗАДАЧА 3	<b>1 балл</b> Исследуй на непрерывность, дифференцируемость и существование частных производных в точке (0; 0) функцию $f(x; y) = \sqrt{ xy }.$
-----------------	---

*** ЗАДАЧА 4	<b>1 балл</b> Исследуй на дифференцируемость в точке (2; 0) функцию $f(x; y) = (x^2 + xy - 4) \sqrt{x^2 + y^2 + xy - 4x - 2y + 4}.$
-----------------	---

*** ЗАДАЧА 5	<b>3 балла</b> Исследуй на непрерывность и дифференцируемость в точке (0; 0) функцию $f(x; y) = \begin{cases} \ln(1 +  x ^\alpha  y ^{1/2}), & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$
-----------------	--

*** ЗАДАЧА 6	<b>2 балла</b> Исследуй на дифференцируемость в точке (0; 0) функцию $f(x; y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ xy } \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt[6]{x^4 + y^4 - \frac{1}{3}x^2 y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$
-----------------	--

## Дифференцирование сложной функции

*** ЗАДАЧА 8	0,5 балла
Вычисли дифференциал функции	
$f(x; y) = e^{x^2y + \pi \cos x}$	
в точке $(1; -\frac{\pi}{2})$ .	
*** ЗАДАЧА 9	0,5 балла
Упрости выражение $d\left(\arctg \frac{u^2}{v}\right)$ , где $u, v$ — дифференцируемые функции произвольного числа переменных, причём знаменатель не обращается в ноль.	
*** ЗАДАЧА 10	1 балл
Преобразуй уравнение	
$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$	
переходя к новым независимым переменным $\xi = x, \eta = x^2 + y^2$ . Найди общее решение уравнения.	
*** ЗАДАЧА 11	1 балл
Пусть $f(u; v)$ — дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция, где $u = xy, v = x^2 - y^2$ . Вырази $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ через $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$ .	
*** ЗАДАЧА 12	2 балла
Докажи, что если $f(u; v)$ — произвольная дифференцируемая функция, то функция	
$\varphi(x; y; z) = f\left(\frac{x}{y}; x^2 + y - z^2\right)$	
удовлетворяет данному уравнению:	
$2xz\varphi'_x + 2yz\varphi'_y + (2x^2 + y)\varphi'_z = 0. \quad (35)$	

## Домашнее задание по теме «Несобственный интеграл»

Определение и некоторые свойства несобственного интеграла

*** ЗАДАЧА 1	0,5 балла  Сходится ли интеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx$ ?
*** ЗАДАЧА 2	0,5 балла  Вычисли несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ или установи его расходимость.
*** ЗАДАЧА 3	2 балл  Вычисли несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) \, dx$ , где $\alpha > 0$ , или установи его расходимость.
*** ЗАДАЧА 4	1 балл  Вычисли площадь множества точек $M = \left\{ (x; y) : x \in [0; 1), y \leq x \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right\}.$
*** ЗАДАЧА 5	1 балл  Вычисли несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ или установи его расходимость.
*** ЗАДАЧА 6	1,5 балла  Вычисли несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx$ или установи его расходимость.
*** ЗАДАЧА 8	1 балл  Докажи неравенство $\left  \int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+4} \, dx \right  < \frac{\pi}{4}.$
*** ЗАДАЧА 9	1 балл  Исследуй на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} \, dx$ при всех значениях параметра $\alpha$ .
*** ЗАДАЧА 10	1 балл  Исследуй на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \ln^\alpha \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{arcsin} \frac{2x}{3+x^2} \, dx$ при всех значениях параметра $\alpha$ .
*** ЗАДАЧА 11	1 балл  Исследуй на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(2+x^2) - \ln(1+x^2)}{(\sqrt{x} + \sqrt{x} \operatorname{arctg} x)^\alpha} \, dx$ при всех значениях параметра $\alpha$ .

\*\*\*  
ЗАДАЧА 12

1 балл

Исследуй на сходимость интеграл  $\int_0^{+\infty} \left| \ln \cos \frac{x}{x+1} \right|^{\alpha-1} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{e^x} dx$  при всех значениях параметра  $\alpha$ .

Примеры решения задач на условную и абсолютную сходимость интегралов

\*\*\*  
ЗАДАЧА 13

1 балл

Исследуй на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x - \sin x}} dx.$$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 14

2 балла

Исследуй на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра  $\alpha$

интеграл  $\int_0^1 \frac{\sin^3 \frac{1}{x}}{\operatorname{arctg}^\alpha x} dx$ .

## Домашнее задание по теме «Знакопеременные числовые ряды и функциональные последовательности»

Признаки сходимости знакопеременных числовых рядов

\*\*\*  
ЗАДАЧА 1

1,5 балла

Пусть ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходятся условно. Может ли ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ :

- а) сходиться абсолютно;                      в) расходиться?  
б) сходиться условно;

\*\*\*  
ЗАДАЧА 2

1 балл

Исследуй на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2.$$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 3

1,5 балла

Докажи, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  абсолютно сходится, если:

- а)  $a_k = \frac{(2k+1)\sin 3k}{\sqrt[4]{k^9 + 7k^2 + 1}}$ ;                      в)  $a_k = \frac{(-1)^k}{\ln^2(k+1)} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ .  
б)  $a_k = \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[7]{k^3}}\right) \operatorname{arctg} \frac{\cos 3k}{3k}$ ;

\*\*\*  
ЗАДАЧА 4

1 балл

Докажи, что если последовательность  $\{a_k\}$  монотонно стремится к нулю, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\alpha)$  сходится при любом  $\alpha \in \mathbb{R}$ , а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\alpha)$  сходится при  $\alpha \neq 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

\*\*\*  
ЗАДАЧА 5

1 балл

Исследуй на сходимость ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{\ln \ln(k+2)} \cos \frac{1}{k}$ .

\*\*\*  
ЗАДАЧА 6

2 балла

Исследуй на сходимость и абсолютную сходимость ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , если:

- а)  $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+(-1)^{k-1}}}$ ;                      б)  $a_k = \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{2\sqrt[3]{k^2}}\right)$ .



	<i>буквы.</i>	ортонормированный / нормированным / нормированный	
9.	Верно ли для n-мерных векторов $v, w$ неравенство: $\ v + w\  \leq \ v\  + \ w\ $ ?  Ответ запиши в формате да/нет одним словом.	Да/да	ПК-3