

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Дискретная математика. Углубленный курс»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Математика и искусственный интеллект

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2024

**Москва
2024**

Содержание

| | |
|--|----------|
| 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля) | 3 |
| 2. Перечень планируемых результатов обучения | 4 |
| 3. Тематический план | 6 |
| 4. Содержание дисциплины (модуля) | 6 |
| 5. Учебно-методическое обеспечение | 7 |
| 6. Материально-техническое обеспечение | 7 |
| 7. Методические и оценочные материалы | 9 |

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Дискретная математика. Углубленный курс» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и искусственный интеллект, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Дискретная математика. Углубленный курс» является основой для многих других математических дисциплин. Дисциплина (модуль) развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и искусственный интеллект и входит в Блок 1, часть, формируемую участниками образовательных отношений как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе во 2 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля) направлены на формирование у студентов следующий знаний, умений и навыков:

— знание формальной логики и её применение в доказательствах (логика знания, инварианты), основных комбинаторных принципов (метод крайнего, наименьшего контрпримера), алгебраической структуры (группы перестановок, чётность, теоретико-числовые функции), теоретико-множественных концепций (отношения порядка, эквивалентности, цепи/антицепи), фундаментальных теорем (Рамсея, Дилуорса, Эйлера, китайская теорема об остатках);

— умение строить логические доказательства с использованием инвариантов и полуинвариантов, применять комбинаторные методы (двойной подсчёт, распределение зарядов), работать с алгебраическими структурами (анализировать группы перестановок, вычислять функцию Эйлера);

— умение решать задачи на графы (идентифицировать гамильтоновы циклы, применять теоремы о графах), использовать теоретико-числовые методы (криптографические схемы типа Диффи-Хеллмана);

— владение навыками разработки неконструктивных доказательств (метод подсчёта, дискретная непрерывность), созданием алгоритмов для нестандартных задач (без обратной связи, эвристические методы), применением продвинутых комбинаторных техник (теория Рамсея в экстремальных задачах), анализом сложных структур (частично упорядоченные множества, алгебраические системы), реализацией криптографических протоколов на основе теоретико-числовых результатов

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

| Компетенция | Содержание компетенции | Индикатор компетенции | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) |
|-------------|---|-----------------------|--|
| УК-1. | Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1. | Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности. |
| | | УК-1.2. | Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем |
| | | УК-1.3. | Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации |
| ОПК-1. | Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности | ОПК-1.1. | Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики |
| | | ОПК-1.2. | Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач |
| | | ОПК-1.3. | Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности |
| ПК-1. | Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области | ПК-1.1. | Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов. |

| | | | |
|--|--------------------------------|---------|---|
| | математики и компьютерных наук | ПК-1.2. | Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты. |
| | | ПК-1.3. | Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач |

3. Тематический план

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Трудоемкость, академические часы | | | | ТКУ (текущий контроль успеваемости) |
|--------|---|----------------------------------|-----------|----------|------------------------|--|
| | | Очная форма | | | | |
| | | Контактная работа | | Контроль | Самостоятельная работа | |
| Лекции | Семинары (практические занятия) | | | | | |
| 1 | Математическая логика | | 5 | | 8 | Домашнее задание |
| 2 | Методы доказательств | | 5 | | 6 | Домашнее задание |
| 3 | Комбинаторика | | 5 | | 6 | Домашнее задание Контрольная работа |
| 4 | Теория информации | | 5 | | 6 | Домашнее задание |
| 5 | Теория графов | | 5 | | 6 | Домашнее задание Контрольная работа |
| 6 | Теория чисел | | 5 | | 6 | Контроль теоретического материала |
| | <i>Зачет</i> | | | 8 | | |
| | Итого: | | 30 | 8 | 38 | |
| | <i>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</i> | 76 | | | | |
| | <i>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</i> | 2 | | | | |

4. Содержание дисциплины (модуля)

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Содержание дисциплины (модуля) по темам |
|------|--|--|
| 1 | Математическая логика | Логика знания. Процессы, инварианты и полуинварианты |
| 2 | Методы доказательств | Метод крайнего и метод наименьшего контрпримера. Отношения эквивалентности и порядка на множествах |
| 3 | Комбинаторика | Перестановки как группа, четность перестановок. Общая ФВИ, числа Стирлинга. Неконструктивные доказательства существования (дискретная непрерывность и метод подсчета). Нестандартные задачи на угадывание и алгоритмы без обратной связи |
| 4 | Теория информации | Метод двойного подсчета и метод распределения зарядов. Теория Рамсея. Цепи и антицепи, теорема Дилуорса |
| 5 | Теория графов | Гамильтоновы графы. Функция Эйлера и теорема Эйлера |
| 6 | Теория чисел | Показатели и первообразные корни, схема обмена ключом Диффи-Хеллмана. Китайская теорема об остатках |

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Константинова, Е. В. Теория графов: алгебраическая теория : учебник для вузов / Е. В. Константинова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 123 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-20172-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/569211>.

2. Скорубский, В. И. Математическая логика : учебник и практикум для вузов / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 211 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01114-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561076>.

3. Дискретная математика : учебное пособие для вузов / под научной редакцией А. Н. Сесекина. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 85 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-21182-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/559511>.

Дополнительная литература:

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М. : Вильямс, 2009. — 784 с.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и

обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

| № | Наименование портала (издания, курса, документа) | Ссылка |
|----|--|---|
| 1. | Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека | https://elibrary.ru/defaultx.asp |
| 2. | База данных для IT-специалистов | https://habr.com |
| 3. | База данных ScienceDirect | https://www.sciencedirect.com |
| 4. | Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации | https://minobrnauki.gov.ru/ |
| 5. | Федеральный портал «Российское образование» | https://www.edu.ru/ |
| 6. | Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" | http://window.edu.ru/ |
| 7. | Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов | http://school-collection.edu.ru/ |
| 8. | Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов | http://fcior.edu.ru/ |

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

| Наименование ПО | Производство | Лицензионное / свободно распространяемое |
|---|---------------|--|
| Операционные системы: | | |
| Microsoft Imagine (Windows Client, Server) | зарубежное | лицензионное |
| Браузеры: | | |
| Яндекс.Браузер | отечественное | свободно распространяемое |
| Google Chrome | зарубежное | свободно распространяемое |
| Офисные приложения: | | |
| Microsoft Imagine (Visio, OneNote) | зарубежное | лицензионное |
| TeXstudio | зарубежное | свободно распространяемое |
| Adobe Acrobat Reader | зарубежное | свободно распространяемое |
| Программное обеспечение для планирования и учета времени: | | |
| Toggle app | зарубежное | свободно распространяемое |
| Системы управления проектами: | | |
| Microsoft Imagine (Project) | зарубежное | лицензионное |
| Системы управления базами данных: | | |
| Microsoft Imagine (SQL Server) | зарубежное | лицензионное |
| Системы резервного копирования (backup): | | |
| Acronis Backup Advanced for HyperV | зарубежное | лицензионное |
| Справочно-правовые системы: | | |
| КонсультантПлюс: справочно-правовая система | отечественное | лицензионное |
| Средства антивирусной защиты: | | |
| Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition | отечественное | лицензионное |
| Среды разработки: | | |

| | | |
|--|------------|---------------------------|
| Visual Studio Code | зарубежное | свободно распространяемое |
| Bash (Unix shell) | зарубежное | свободно распространяемое |
| Anaconda | зарубежное | свободно распространяемое |
| Robotic Operating System | зарубежное | свободно распространяемое |
| CopelliaSim | зарубежное | свободно распространяемое |
| Google Colaboratory | зарубежное | свободно распространяемое |
| Пакеты программных средств и библиотек: | | |
| AutoPsy | зарубежное | свободно распространяемое |
| Interactive Disassembler (IDA) | зарубежное | свободно распространяемое |
| Системы управления библиографической информацией: | | |
| Zotero | зарубежное | свободно распространяемое |
| Сервисы и службы: | | |
| Bind | зарубежное | свободно распространяемое |
| Docker | зарубежное | свободно распространяемое |

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Дискретная математика. Углубленный курс» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как практические занятия, контрольные работы и домашние задания, контроль теоретических знаний, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Участие в семинаре (аудиторная работа) – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Контроль теоретических знаний – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки студенту необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное

изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине «Дискретная математика. Углубленный курс»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме *зачета*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|-----------------------|---------------------|-----------------|---|
| 10 | Отлично | Зачтено | Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысливает дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами. |
| 9 | Отлично | Зачтено | |
| 8 | Отлично | Зачтено | |
| 7 | Хорошо | Зачтено | Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме |
| 6 | Хорошо | Зачтено | |

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|-----------------------|---------------------|-----------------|---|
| | | | рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами. |
| 5 | Удовлетворительно | Зачтено | Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования. |
| 4 | Удовлетворительно | Зачтено | |
| 3 | Не сдан | Не зачтено | Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы. |
| 2 | Не сдан | Не зачтено | |
| 1 | Не сдан | Не зачтено | |

Дисциплина (модуль) «Дискретная математика. Углубленный курс» оценивается следующим образом:

Зачёт ставится, если:

- выполнены минимум две контрольные работы;
 - набрано не менее 4 из 10 баллов за все черные задачи за домашние задания;
- Зачет выставляется по сумме баллов за все домашние задания.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные задания для контроля теоретических знаний

Определения и формулировки теорем. За эту часть вы получаете до 4 баллов.

- Булевы операции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, исключающее «или».
- Таблицы истинности булевых операций.
- Логические законы: закон исключённого третьего, закон двойного отрицания, законы де Моргана, закон непротиворечивости, закон контрапозиции.
- Определение импликации через другие логические операции.
- Предикат. Параметры предиката.
- Множество истинности высказывания.
- Равносильность высказываний.
- Следствие высказывания.
- Кванторы.
- Множество определения переменной предиката. Записи $\exists x \in S : A(x)$, $\forall x \in S : A(x)$ как сокращения.
- Логические законы для утверждений с кванторами: законы де Моргана, вынесение кванторов за скобки, перестановка кванторов.
- Принцип Дирихле.
- Формальная запись утверждения « n – наименьшее число, для которого выполнено $P(x)$ ».
- Объединение, пересечение, разность, симметрическая разность множеств.
- Упорядоченная пара. Декартово произведение множеств.
- Бинарное отношение.
- Функция (формальное определение). Аргументы и значения функции.
- Образ и прообраз множества для функции.
- Композиция функций.
- Инъекция. Примеры инъекции и не инъекции.
- Сюръекция. Примеры сюръекции и не сюръекции.
- Биекция.
- Принцип математической индукции (формальная запись).
- Принцип полной математической индукции (формальная запись).
- Метод наименьшего контрпримера. Принцип наименьшего числа.
- Комбинаторика: правило суммы.
- Комбинаторика: правило произведения.
- Размещения без повторов: определение и формула.
- Перестановки без повторов: определение и формула.
- Перестановки с повторениями: определение и формула.
- Сочетания: определение и формула.
- Бином Ньютона.
- Полиномиальная формула.
- Треугольник Паскаля.
- Формула для количества перестановок с повторениями.
- Формула для количества сочетаний с повторениями.
- Теорема о симметрии треугольника Паскаля.
- Теорема о сумме двух биномиальных коэффициентов.

- Теорема о сумме всех биномиальных коэффициентов из одной строки треугольника Паскаля.

- Теорема о знакопеременной сумме биномиальных коэффициентов из одной строки треугольника Паскаля.

- Свёртка Вандермонда.
- Явная формула для чисел Каталана.
- Алгоритм решения рекуррентных уравнений определённого вида.
- Числа Фибоначчи. Формула Бине.
- Граф. Вершины и рёбра. Соседние (смежные) вершины.
- Дополнение графа. Полный граф. Пустой граф.
- Подграф графа.
- Изоморфные графы.
- Степень вершины. Изолированная вершина. Висячая вершина.
- Лемма о связи степеней вершин и количества рёбер графа.
- Лемма о рукопожатиях.
- Регулярный граф.
- Маршрут. Путь. Простой путь. Длина пути в графе.
- Цикл. Простой цикл. Длина цикла в графе.
- Двудольный граф. Полный двудольный граф.
- Критерий двудольности графа.
- Ориентированный граф.
- Лемма о рукопожатиях для ориентированного графа.

Доказательства. Вы можете САМИ ВЫБРАТЬ три вопроса из этого списка и рассказать доказательство принимающему. Выбранные вопросы должны быть из разных недель. За эту часть вы получаете до 6 баллов (по 2 балла за каждый вопрос).

- Утверждение о том, что существует сколько угодно подряд идущих составных чисел

- Доказательство бесконечности множества простых чисел
- Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$
- Доказательство принципа Дирихле в общем виде
- В любом множестве людей найдутся двое, у которых одинаковое число друзей среди этого множества

- Нахождение количества способов составить хоровод из n людей
- Нахождение количества способов составить ожерелье из n различных бусин
- Формула для количества сочетаний
- Формула для количества перестановок с повторениями
- Бином Ньютона
- Формула для количества сочетаний с повторениями
- Нахождение количества способов выложить n синих и k красных шаров в ряд так, чтобы два красных шара не оказались соседними

- Теорема о сумме всех биномиальных коэффициентов из одной строки треугольника Паскаля

- Теорема о знакопеременной сумме биномиальных коэффициентов из одной строки треугольника Паскаля

- Свёртка Вандермонда
- Явная формула для чисел Каталана
- Любое натуральное число, большее 7, можно представить в виде суммы троек и пятерок

- Обоснование алгоритма решения рекуррентных уравнений определённого вида
- Формула Бине
- Теорема о взаимной простоте соседних чисел Фибоначчи
- Теорема о сумме первых n чисел Фибоначчи

- Теорема о сумме квадратов первых n чисел Фибоначчи
- Формула, выражающая числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты
- Точная оценка для задачи об угадывании числа бинарными вопросами
- Нижняя оценка для задачи о сортировке (через $O(n \log n)$)
- Точная оценка для задачи о поиске самого тяжёлого объекта, если можно за один раз сравнивать два объекта
 - Точная оценка для задачи о поиске самого тяжёлого объекта в неадаптивной модели
 - Лемма о рукопожатиях
 - Критерий двудольности графа
 - Задача о голубоглазых островитянах, ее формулировка и решение
 - В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше, чем плюсов, то разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Тогда через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше, чем минусов.
 - В тропическом лесу затерянного острова у каждой мартышки есть не более трех врагов. Тогда мартышки могут разделиться на две стаи так, чтобы у каждой мартышки в её стае было не более одного врага.
 - У любого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.
 - На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Тогда найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.
 - На шахматной доске расставлено несколько фишек. За один ход одна из фишек сдвигается на свободное соседнее (по вертикали или по горизонтали) поле. После нескольких ходов оказалось, что каждая фишка побывала на всех полях ровно по одному разу и вернулась на исходное поле. Тогда был момент, когда ни одна из фишек не стояла на своем исходном поле.
 - Для любых отношений R_1, R_2 и R_3 выполнено включение $(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq (R_1 \circ R_3) \cap (R_2 \circ R_3)$.
Всегда ли выполнено обратное включение?
 - Пусть R — отношение порядка (строгого или нестрогого) на множестве A , состоящем из n элементов. Тогда в множестве A есть хотя бы один минимальный элемент. Сколько всего минимальных элементов может быть в множестве A ?
 - На множестве A задан такой строгий порядок R , что в нём 10 минимальных элементов и 5 максимальных элементов. Каково минимально возможное количество элементов в множестве A ?
 - Любая нетождественная перестановка единственным образом представима в виде произведения независимых циклов.
 - Домножение любой перестановки на транспозицию меняет четность исходной перестановки.
 - Формулировка и доказательство неразрешимости задачи об игре в пятнашки
 - Доказательство формулы включений-исключений для n множеств
 - Явная формула для количества перестановок, в которых ни один элемент не остается на своем месте
 - Явная формула для чисел Стирлинга второго рода
 - На клетчатой доске 100×100 половина клеток белые, а половина — черные. Тогда можно разрезать ее по границам клеток на две части с равным числом черных клеток.
 - Числа от 1 до $2n$ можно раскрасить в два цвета так, чтобы не нашлось одноцветной арифметической прогрессии длины $2n$.

Примерные задания по контрольной работе

Контрольная работа №1

Контрольная работа № 1

Продолжительность: 2 часа

1. Нельзя иметь при себе электронные устройства. Если нарушишь это требование, работа будет аннулирована и её нельзя будет переписать.

2. **В каждой задаче приведи обоснование ответа, иначе он не будет засчитан.**

3. Если считаешь, что решение задачи неправильное, зачеркни его и напиши новое. В случае, если в работе приведены два разных ответа или решения, оцениваться будет только первое.

Оценка за контрольную работу ставится по формуле:

Оценка = $\min(\text{сумма баллов за задачи}; 10)$.

Задача 1.

1 балл

Про каждое из утверждений определи, истинно оно или ложно.

А) $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} (n + k > 10 \rightarrow n + k^2 > 15)$;

б) $\exists x \in \mathbb{R} \forall S \subseteq \mathbb{R} (\exists y \in \mathbb{R} y \in S \vee \exists z \in \mathbb{R} x + z \in S)$.

Задача 2.

2 балла

Какие из следующих высказываний равносильны высказыванию «Хорошо смеется тот, кто смеется последним»? В каждом пункте нужно пояснить ответ.

- а) Кто смеется последним, тот смеется хорошо.
- б) Кто не смеется последним, тот не смеется хорошо.
- в) Кто не смеется хорошо, тот не смеется последним.
- г) Кто хорошо смеется, тот смеется последним.
- д) Только тот, кто хорошо смеется, смеется последним.
- е) Каждый или смеется хорошо, или не смеется последним.
- ж) Каждый или не смеется хорошо, или смеется последним
- з) Плохо смеется тот, кто смеется не последним.
- и) Плохо смеется тот, кто не смеется последним.
- к) Не бывает такого, что кто-то плохо смеется и смеется последним.

Задача 3.

2 балла

В 20 ящиков разложили 60 чёрных и 60 белых шариков — по 6 шариков в каждый. Ваня заметил, что в каждом из первых 14 ящиков чёрных шариков оказалось больше, чем белых. Верно ли, что среди последних 6 ящиков точно найдётся такой, в котором все шарики белые?

Задача 4.

2 балла

Дощатый забор перекрашивают в два цвета: серый и чёрный — таким образом, чтобы с каждой серой доской рядом обязательно была чёрная. Какое наибольшее число серых досок может быть в заборе, если он состоит из 62 досок?

Задача 5.

2 балла

Пусть множества A и B таковы, что существует сюръекция $f : A \rightarrow B$ такая, что прообраз любого одноэлементного подмножества B бесконечен. Верно ли, что не существует инъекции из A в B ?

Задача 6.

2 балла

10 мальчиков и 10 девочек строят хоровод. В хороводе мальчики и девочки должны чередоваться. Но среди девочек есть одна, по имени Маша, которая не хочет стоять рядом с одним из мальчиков, которого зовут Саша. Сколько существует способов составить хоровод из 10 мальчиков и 10 девочек, чтобы Маша не стояла рядом с Сашей?

Задача 7.

2 балла

Найди число отображений f из множества $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ в $\{a, b, c, d, e\}$ таких, что $|f^{-1}(\{a, b\})| = 4$, а $|f(\{1,2,3,4,5\})| = 5$.

Задача 8.

1,5 балла

Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Он командует «налево». По неопытности часть солдат поворачивается налево, а часть — направо. После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся друг к другу лицом, понимают, что произошла ошибка, и поворачиваются кругом. В следующую секунду ситуация повторяется. Докажи, что рано или поздно шеренга встанет неподвижно.

Задача 9.

1,5 балла

На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажи, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

Задача 10.

1,5 балла

Напомним, что бинарное отношение называется отношением нестрогого порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Сколько различных отношений нестрогого порядка существует на множестве $\{1,2,3,4\}$?

Контрольная работа №2

Задача 1.

1 балл

Словом называется произвольная последовательность букв. Алфавитной записью для данного слова будем называть слово, записанное теми же буквами, но в алфавитном порядке. Например, алфавитная запись слова «математика» – это «аааеикммтт». Сколько существует различных слов длины 10, для которых алфавитная запись совпадает с исходным словом? В качестве букв можно использовать лишь строчные буквы русского алфавита.

Задача 2.

1,5 балла

Лягушка сидит в вершине A квадрата $ABCD$. Каждым прыжком она перемещается в вершину квадрата, соседнюю с той, в которой она находится. Сколькими способами лягушка может прыгать так, чтобы ровно через n прыжков оказаться в вершине B ?

Задача 3.

1,5 балла

В некоторой компании студентов оказалось, что у каждого парня ровно 9 знакомых девушек, а у каждой девушки ровно 9 знакомых парней. Может ли в этой компании быть ровно 50 студентов?

Задача 4.

1,5 балла

В некоторой стране каждые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы от каждого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта.

Задача 5.

1 балл

В некотором связном графе степени всех вершин равны 10. Докажите, что при удалении любого ребра этот граф останется связным.

Задача 6.

1,5 балла

В каждой строке и каждом столбце шахматной доски стоит по 3 ладьи. Докажите, что можно выбрать 8 ладей, не бьющих друг друга.

Задача 7.

2 балла

Граф G является планарным, однако при добавлении к нему любого ребра свойство планарности теряется. Докажите, что в этом графе нет вершин степени меньше 3.

Задача 8.

1,5 балла

У Ильи была бумажка, на которой написаны числа от 1 до 10. Илья вычеркнул некоторые 5 из этих чисел. Алла хочет отгадать, какие именно. Для этого она может задавать Илье любые вопросы, ответы на которые могут быть только «да» или «нет». Но Илья дал подсказку: число 1 и число 2 либо оба вычеркнуты, либо оба не вычеркнуты.

За какое наименьшее число вопросов Алла гарантированно сможет отгадать, какие именно числа вычеркнуты, учитывая данную подсказку?

Задача 9.

1,5 балла

Пусть $S(n, k)$ обозначает число Стирлинга второго рода. Докажи, что $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$.

Задача 10.

1,5 балла

В коллективе из 30 человек оказалось, что любых пятерых можно усадить за круглый стол так, что каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми. Докажите, что в этом коллективе найдется компания из 10 человек, в которой каждый знаком с каждым.

Задача 11.

1,5 балла

Пусть v_1, \dots, v_l – самый длинный простой путь в графе G . Докажите, что $\chi(G) \leq l$.

Примерные домашние задания

Домашнее задание по теме: «Логика значения»

Задача 1.

Двум математикам дали двустороннюю карточку и сообщили, что с одной стороны на ней написано некоторое натуральное число n , а с другой $n+1$. Каждый видит, что написано с его стороны, но не видит противоположную сторону. Произошел следующий диалог:

А: Я не знаю, что написано с твоей стороны.

Б: И я не знаю, что написано с твоей стороны.

А: И я всё ещё не знаю, что написано с твоей стороны.

Б: И я всё ещё не знаю, что написано с твоей стороны.

Последняя пара реплик повторилась ещё 10 раз, после чего А сказал: «А теперь я знаю, что написано с твоей!» Чему могло быть равно n ?

Задача 2

У одного султана было два мудрых визиря. Захотел он проверить, насколько они сообразительны. Позвал он их обоих и сказал:

— Я загадал два числа от 2 до 100. Вы должны их мне назвать.

При этом султан сообщил первому визирю произведение этих чисел, а второму — сумму. Произошёл следующий диалог:

А: Я не знаю, что это за числа.

Б: Я был в этом уверен.

А: В таком случае, я знаю, что это за числа.

Б: Тогда я знаю, что это за числа.

Какие это были числа?

Задача 3

Альберт и Бернард только что познакомились с Шерил. Они хотят знать, когда у неё день рождения. Шерил предложила им десять возможных дат: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа и 17 августа. Затем Шерил сказала Альберту месяц своего рождения, а Бернарду — день. После этого состоялся диалог.

Альберт: Я не знаю, когда у Шерил День рождения, но я знаю, что Бернард тоже не знает.

Бернард: Поначалу я не знал, когда у Шерил День рождения, но теперь знаю.

Альберт: Теперь я тоже знаю, когда у Шерил день рождения.

Когда у Шерил день рождения?

Задача 4

Однажды начальник тюрьмы вызвал преступника, приговорённого к казни, и сообщил ему:

— Вас казнят на следующей неделе в полдень. День казни станет для вас сюрпризом, вы узнаете о нём, только когда палач в полдень войдёт к вам в камеру. Начальник тюрьмы был честным человеком и никогда не врал.

Заключённый подумал над его словами и улыбнулся:

— В воскресенье меня казнить не могут! Ведь тогда уже в субботу вечером я буду знать об этом. А, по словам начальника, я не буду знать день своей казни. Следовательно, последний возможный день моей казни — суббота. Но если меня не казнят в пятницу, то я буду заранее знать, что меня казнят в субботу, значит, и её можно исключить.

Последовательно исключив пятницу, четверг, среду, вторник и понедельник, преступник пришёл к выводу, что начальник не сможет его казнить, выполнив все свои слова.

На следующей неделе палач постучал в его дверь в полдень в среду — это было для него полной неожиданностью. Всё, что начальник тюрьмы сказал, осуществилось.

Где недостаток в рассуждении заключённого?

Задача 5.

Из 200 островитян у 100 человек глаза голубые, а у 100 — карие. Но никто не знает, кого цвета его собственные глаза — голубые, карие или вообще зеленые. На острове нет отражающих поверхностей, так что никто не может просто увидеть цвет своих глаз в отражении. Кроме того, людям под страхом смерти запрещено общаться друг с другом как устно, так и письменно.

Тем не менее, каждый из них может видеть цвет глаз остальных 199 островитян.

Каждую ночь на остров приплывает корабль с капитаном, который, пленил островитян. Если кто-нибудь из пленников правильно угадает цвет своих глаз и назовет его капитану, он сможет сесть на корабль и покинуть остров. Но наказание за ошибку — смерть.

Однажды на остров прибывает иностранец, о котором известно, что он всегда говорит правду. Все островитяне собрались посмотреть на него. Желая помочь пленникам, иностранец объявил: «Как минимум у одного из вас голубые глаза».

Сколько человек после этого объявления покинет остров и когда именно?

Домашнее задание по теме: «Метод двойного подсчёта и метод распределения зарядов»

1. ДВОЙНОЙ ПОДСЧЕТ

| | |
|-----------------|--|
| *** ЗАДАЧА 1 | Назовем человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что чудаков не больше, чем малообщительных. |
| *** ЗАДАЧА 2 | В теннисном турнире каждый играет с каждым ровно 1 раз. Ничьих нет. Пусть a_i – число побед i -го игрока, b_i – число поражений i -го игрока. Докажите, что $\sum a_i^2 = \sum b_i^2$. |
| *** ЗАДАЧА 3 | Пусть в графе n вершин, m ребер, а степени вершин равны d_1, \dots, d_n . Докажите неравенство $\frac{4m^2}{n} \leq \sum_{i=1}^n d_i^2$. |
| *** ЗАДАЧА 4 | Теорема Мантеля. Дан граф на n вершинах, в котором нет треугольников. Докажите, не используя математическую индукцию, что число ребер в таком графе не превосходит $\frac{n^2}{4}$. |
| *** ЗАДАЧА 5 | Дан граф на n вершинах, в котором нет циклов длины 4. Докажите, что количество ребер в этом графе не превосходит $\frac{n(1 + \sqrt{4n - 3})}{4}$. |

2. МЕТОД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ

Это идея, обобщающая идею двойного подсчета. Когда такой подсчет нетривиален, его бывает удобно сформулировать как назначение объектам некоторых величин и их последующее перераспределение. Эти величины будем называть зарядами.

ЗАДАЧА 6

В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены: в них нарисованы звёздочки.

Известно, что для любой отмеченной клетки количество звёздочек в её столбце совпадает с количеством звёздочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звёздочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звёздочка.

ЗАДАЧА 7

На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причем известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

| № п/п | Задание | Ответ | Компетенция |
|-------|---|-------|-------------|
| 1. | Даны утверждения: а) Все студенты, которые учатся на отлично, получают стипендию. б) Некоторые студенты, которые, занимаются спортом получают стипендию. Какое из следующих утверждений является верным? 1. Все студенты, которые занимаются спортом, учатся на отлично. 2. Некоторые студенты, которые учатся на отлично, занимаются спортом. | 2 | УК-1 |

| | | | |
|----|---|-------------|-------|
| | <p>3. Все студенты, которые получают стипендию, учатся на отлично.</p> <p>4. Ни один студент, который занимается спортом, не получает стипендию.</p> | | |
| 2. | <p>Существует ли граф с пятью вершинами, степени которых 4, 3, 2, 2, 2?</p> <p>Ответ запиши в виде да/нет.</p> | НЕТ/Нет/нет | ОПК-1 |
| 3. | <p>В магазине продаются футболки 5 различных цветов и бейсболки 3 различных цветов. Каждый покупатель может выбрать либо одну футболку, либо одну бейсболку, либо одновременно футболку и бейсболку. Сколькими способами покупатель может сделать выбор?</p> <p>1. 15 2. 23 3. 120 4. 225</p> | 2 | ПК-1 |
| 4. | <p>Даны два множества: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{a, b, c, d\}$. Дано отображение f: $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = b$, $f(4) = c$. Является ли это отображение биекцией?</p> <p>Ответ запиши в виде да/нет.</p> | Нет/нет/НЕТ | ОПК-1 |