ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**
**«Основы тензорных вычислений»**

**Направление подготовки:** *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

**Направленность (профиль) подготовки:** *Математика и искусственный интеллект*

**Квалификация (степень) выпускника:** *бакалавр*

**Форма обучения:** *очная*

**Срок освоения программы:** *4 года*

**Год набора:** *2024*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

**Москва**
**2024**

**Содержание**

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** ..... 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** ..... 5
3. **Тематический план** ..... 7
4. **Содержание дисциплины (модуля)** ..... 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** ..... 9
6. **Материально-техническое обеспечение** ..... 10
7. **Методические и оценочные материалы** ..... 11

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Основы тензорных вычислений» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и искусственный интеллект», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Основы тензорных вычислений» позволяет овладеть инструментом для описания многомерных физических систем, анализа больших данных и построения моделей глубокого обучения; они позволяют работать в координатно-независимом виде и эффективно использовать современное аппаратное обеспечение (GPU, распределённые кластеры).

**Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и искусственный интеллект» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин: «Основы математического анализа и линейной алгебры» или «Математический анализ» и «Линейная алгебра и геометрия» или «Математический анализ. Продвинутый уровень» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень».

**Цель изучения дисциплины (модуля):** формирование у студентов целостного представления о тензорах как многомерных линейных объектах, научить их формировать, преобразовывать и применять в аналитических выводах и численных алгоритмах, а также освоить практическую реализацию в Python/NumPy, TensorFlow, PyTorch.

**Задачи изучения дисциплины (модуля)**:

— определить ранг, контравариантные/ковариантные индексы, правила преобразования при смене системы координат, свойства симметрии и анти-симметрии;

— выполнять сложение, внешнее и внутреннее умножение, конракцию, подъем/опускание индексов, использовать произведение Кронекера и операции симметризации/антиссимметризации;

— выводить тензоры градиента, Якоби, Гессиана; применять правила дифференцирования тензоров, тензорные формы теорем Грина, Стокса, дивергенции и ротора;

— научиться моделировать напряжения и деформации в механике, строить тензорные фильтры в обработке изображений, решать задачи рекомендаций и факторизации данных, применять тензорные методы в численном решении уравнений в частных производных.

**В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:**

***знать:***

— основные понятия тензорных вычислений: скаляр, вектор, матрица, тензор, порядок тензора, форма тензора, ось, индекс;

— правила выполнения базовых операций над тензорами: сложение, умножение, транспонирование, перестановка осей, reshape, broadcasting;

— принципы индексной записи тензорных выражений и соглашение Эйнштейна о суммировании;

— основные виды тензорных свёрток и их связь с матричным умножением, скалярным произведением и линейными отображениями;

— базовые принципы автоматического дифференцирования и применения тензоров в машинном обучении;

***уметь:***

— определять форму тензоров на каждом этапе вычислений и проверять корректность операций по размерностям;

— переводить простые тензорные выражения между математической записью, индексной записью и программной реализацией;

— выполнять основные тензорные операции в NumPy, PyTorch или аналогичных библиотеках;

— использовать broadcasting, reshape, transpose, permute, sum, einsum и tensordot для решения практических задач;

— реализовывать простые вычислительные графы и применять autograd для нахождения производных;

***владеть:***

— навыками работы с многомерными массивами и тензорами в современных вычислительных библиотеках;

— приёмами анализа и отладки ошибок, связанных с несовпадением размерностей тензоров;

— базовыми методами векторизации вычислений и оптимизации тензорного кода;

— навыками применения тензорных операций в задачах машинного обучения, обработки изображений, последовательностей и табличных данных;

— навыками самостоятельного чтения документации и математических текстов, использующих тензорную и индексную нотацию.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

| Компетенция | Содержание компетенции | Индикатор компетенции | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| УК-6. | Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни | УК-6.1. | Знает основные принципы самовоспитания и самообразования, профессионального и личностного развития, исходя из этапов карьерного роста и требований рынка труда |
| | | УК-6.2. | Умеет планировать свое рабочее время и время для саморазвития. формулировать цели личностного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области профессиональной деятельности, индивидуально-личностных особенностей |
| | | УК-6.3. | Имеет практический опыт получения дополнительного образования, изучения дополнительных образовательных программ |
| ОПК-1. | Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики | ОПК-1.1. | Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области |
| | | ОПК-1.2. | Умеет анализировать и формулировать математические задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и доступной форме |
| | | ОПК-1.3. | Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи |
| ПК-1. | Способен определять общие формы и закономерности области машинного обучения | ПК-1.1. | Знает основные теоретические концепции и принципы, относящиеся к области машинного обучения, а также ключевые закономерности и модели, которые помогают в анализе и интерпретации данных |
| | | ПК-1.2. | Умеет проводить систематический анализ области разработки, выявлять и формулировать общие закономерности и тенденции, а также применять |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | методы исследования для получения новых знаний и понимания |
| | | ПК-1.3. | Имеет практический опыт работы в области машинного обучения, включая участие в научных проектах, исследованиях или практических заданиях, где были выявлены и описаны общие формы и закономерности |
| ПК-2. | Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области профессиональной деятельности, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности | ПК-2.1. | Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности |
| | | ПК-2.2. | Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности |
| | | ПК-2.3. | Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области профессиональной деятельности, включая соблюдение норм информационной безопасности |
| ПК-3. | Способен применять методы математического и алгоритмического моделирования для решения как теоретических, так и практических задач в рамках профессиональной деятельности | ПК-3.1. | Знает основные методы математического и алгоритмического моделирования, а также их применение для решения теоретических и прикладных задач |
| | | ПК-3.2. | Умеет применять методы математического и алгоритмического моделирования для анализа и решения различных задач в области математики и компьютерных наук |
| | | ПК-3.3. | Имеет опыт использования методов математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач в профессиональной деятельности |

## 3. Тематический план

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Трудоемкость, академические часы | | | | ТКУ (текущий контроль успеваемости) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Очная форма* | | | | |
| | | Аудиторная работа | | Контроль | Самостоятельная работа | |
| | | Лекции | Семинары | | | |
| 1 | Математическая база и мотивация тензорных вычислений | 4 | 4 | | 30 | Домашнее задание Аудиторная работа |
| 2 | Основные операции над тензорами | 10 | 10 | 2 | 30 | Контрольная работа |
| 3 | Тензорные разложения и вычислительная эффективность | 10 | 10 | 2 | 30 | Домашнее задание Аудиторная работа |
| 4 | Прикладные тензорные вычисления | 6 | 6 | 2 | 30 | Контрольная работа |
| | ***Зачет с оценкой*** | | | 6 | | Коллоквиум |
| | ***Итого:*** | ***30*** | ***30*** | ***10*** | ***120*** | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)*** | | ***190*** | | | | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)*** | | ***5*** | | | | |

## 4. Содержание дисциплины (модуля)

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Содержание дисциплины (модуля) по темам |
|---|---|---|
| 1 | Математическая база и мотивация тензорных вычислений | Введение в тензорные вычисления. Повторение линейной алгебры<br>Матрицы как частный случай тензоров<br>Многомерные массивы и формы данных |
| 2 | Основные операции над тензорами | Понятие тензора. Компоненты тензора в базисе<br>Ковариантные и контравариантные индексы. Тензоры порядка 0, 1, 2 и выше.<br>Поэлементные операции<br>Свёртки и сокращение индексов. Контрольная работа 1<br>Тензорное произведение и изменение порядка осей |
| 3 | Тензорные разложения и вычислительная эффективность | Нормы векторов, матриц и тензоров. Норма Фробениуса.<br>Расстояния между тензорами. Потери в задачах машинного обучения.<br>Производные тензорных выражений. Дифференцирование сложной функции в тензорной записи.<br>Основы автоматического дифференцирования. Коллоквиум<br>Тензорные разложения. Сингулярное разложение как матричное разложение. Идея снижения размерности |
| 4 | Прикладные тензорные вычисления | Тензоры в машинном обучении<br>Тензоры в нейронных сетях<br>Оптимизация тензорных вычислений. Контрольная работа 2 |

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

***Основная литература:***

1. Мусин, Ю. Р. Тензорный анализ. Вводный курс с приложениями к анализу и геометрии : учебник для вузов / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 184 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06198-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/585823

2. Фоменко, Т. Н. Высшая математика. Общая алгебра. Элементы тензорной алгебры : учебник и практикум для вузов / Т. Н. Фоменко. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 121 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08097-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/585939

***Дополнительная литература:***

1. Кашапова, Ф. Р. Высшая математика. Общая алгебра в задачах : учебник для вузов / Ф. Р. Кашапова, И. А. Кашапов, Т. Н. Фоменко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 128 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09499-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/585819

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;
— механическими калькуляторами;
— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

| № | Наименование портала (издания, курса, документа) | Ссылка |
|---|---|---|
| 1. | Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека | https://elibrary.ru/defaultx.asp |
| 2. | База данных для IT-специалистов | https://habr.com |
| 3. | База данных ScienceDirect | https://www.sciencedirect.com |
| 4. | Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации | https://minobrnauki.gov.ru/ |
| 5. | Федеральный портал «Российское образование" | https://www.edu.ru/ |
| 6. | Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" | http://window.edu.ru/ |
| 7. | Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов | http://school-collection.edu.ru/ |
| 8. | Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов | http://fcior.edu.ru/ |

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

| Наименование ПО | Производство | Лицензионное / свободно распространяемое |
|---|---|---|
| **Операционные системы:** | | |
| Microsoft Imagine (Windows Client, Server) | зарубежное | лицензионное |

| | | |
|---|---|---|
| **Браузеры:** | | |
| Яндекс.Браузер | отечественное | свободно распространяемое |
| Google Chrome | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Офисные приложения:** | | |
| Microsoft Imagine (Visio, OneNote) | зарубежное | лицензионное |
| TeXstudio | зарубежное | свободно распространяемое |
| Adobe Acrobat Reader | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Программное обеспечение для планирования и учета времени:** | | |
| Toggle app | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления проектами:** | | |
| Microsoft Imagine (Project) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы управления базами данных:** | | |
| Microsoft Imagine (SQL Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы резервного копирования (backup):** | | |
| Acronis Backup Advanced for HyperV | зарубежное | лицензионное |
| **Справочно-правовые системы:** | | |
| КонсультантПлюс: справочно-правовая система | отечественное | лицензионное |
| **Средства антивирусной защиты:** | | |
| Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition | отечественное | лицензионное |
| **Среды разработки:** | | |
| Visual Studio Code | зарубежное | свободно распространяемое |
| Bash (Unix shell) | зарубежное | свободно распространяемое |
| Anaconda | зарубежное | свободно распространяемое |
| Robotic Operating System | зарубежное | свободно распространяемое |
| CopelliaSim | зарубежное | свободно распространяемое |
| Google Colaboratory | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Пакеты программных средств и библиотек:** | | |
| AutoPsy | зарубежное | свободно распространяемое |
| Interactive Disassembler (IDA) | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления библиографической информацией:** | | |
| Zotero | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Сервисы и службы:** | | |
| Bind | зарубежное | свободно распространяемое |
| Docker | зарубежное | свободно распространяемое |

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Основы тензорных вычислений» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, аудиторная работа, контрольные работы и домашние задания, коллоквиум, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его

преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Семинар* — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

*Аудиторная работа* – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Коллоквиум* – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

## Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Основы тензорных вычислений»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

| **Десятибалльная оценка** | **Пятибалльная оценка** | **Оценка за зачет** | **Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)** |
|---|---|---|---|
| 10 | Отлично | Зачтено | Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами. |
| 9 | Отлично | Зачтено | |
| 8 | Отлично | Зачтено | |
| 7 | Хорошо | Зачтено | Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами. |
| 6 | Хорошо | Зачтено | |
| 5 | Удовлетворительно | Зачтено | Студент обладает базовыми знаниями |

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| 4 | Удовлетворительно | Зачтено | по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования. |
| 3 | Не сдан | Не зачтено | Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы. |
| 2 | Не сдан | Не зачтено | |
| 1 | Не сдан | Не зачтено | |

Дисциплина (модуль) «Основы тензорных вычислений» оценивается следующим образом:

| Активность | Вес | Количество | Описание |
|---|---|---|---|
| Домашние задания | 25% | 10 | Набор задач по темам недели |
| Контрольные работы | 35% | 2 | Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время |
| Аудиторная работа | 15% | 15 | Активная работа студента на семинаре или лекции, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии |
| Зачет с оценкой | 25% | 1 | Коллоквиум - устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее |

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Основы тензорных вычислений»:** «0,25× среднее за домашние задания + 0,35× среднее за контрольные работы + 0,15 ×за аудиторную работу + 0,25 ×зачет с оценкой».

**Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)**

**Примерные вопросы для семинаров**

1. Сформулировать определение тензора, его ранг и различие между контравариантными и ковариантными индексами.
2. Объяснить правило Эйнштейна (суммирование по повторяющимся индексам) и привести пример – скалярное произведение двух векторов.
3. Показать, как из произвольного 2-тензора получить симметричную и анти-симметричную части; указать, какие свойства сохраняются.
4. Записать формулу Кронекерова произведения двух матриц $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$; указать размеры полученного тензора.
5. Продемонстрировать, как метрический тензор $g_{ij}$ переводит контравариантный вектор в ковариантный и наоборот (подъём и опускание индексов).
6. Описать свойства тензора Леви-Чивита (полная анти-симметричность, нормировка) и объяснить, почему он удобен для вычисления векторного произведения в трёхмерном пространстве.
7. Объяснить, почему тензор деформации $\varepsilon_{ij}$ симметричен, а тензор вращения $\omega_{ij}$

анти-симметричен.

8. Сравнить разложения CANDECOMP/PARAFAC (CP) и Tucker: указать различия в структуре ядра и факторных матриц.

9. Пояснить, как условие Джонса-Лина «почти-ортогональная проекция» обеспечивает сохранение евклидовых расстояний в случайных проекциях (sketching).

10. Описать преимущества применения тензорных разложений (например, Tensor-Train) при построении компактных сверточных слоёв нейронных сетей.

## Примерные задания по контрольной работе

1. **Тензорные операции**

a) Для векторов $u=(1,2,3)^\top$ и $v=(4,0,-1)^\top$ запишите внешнее (Кронекерово) произведение $u \otimes v$.

b) Сократите тензор $Tijk=AijBjk$ по индексу $j$ (операция контракции) и укажите полученный порядок.

2. **Подъём/опускание индексов**

Дана метрика $gij$=diag(1,2,3). Поднимите индекс у ковариантного вектора $wi$=(2,-1,5) и запишите полученный контравариантный вектор $wi$.

3. **Симметризация/анти-симметризация**

Для тензора $Tij$=(0-221) найдите его симметричную часть $Sij$ и анти-симметричную часть $Aij$.

4. **Тензорный градиент и Гессиан**

Пусть скалярное поле $f(x,y)=x2y+3y2$.

a) Запишите тензор градиента $\partial if$.

b) Запишите тензор Гессиана $\partial i\partial jf$.

5. **Разложение CP**

Тензор порядка 3 размера 2×2×2 задан элементами $Xijk=aibjck$ с векторами $a=(1,2)^\top$, $b=(0,1)^\top$, $c=(3,-1)^\top$.

Укажите его CP-разложение (факторы и ранговый тензор).

6. **Тензор-Тейлор**

Для функции $g(\mathbf{x})=\exp(x1+2x2)$ запишите первое-порядковое тензор-Тейлор-разложение в окрестности точки $\mathbf{x}0=(0,0)$.

7. **Тензорная регрессия (ridge-регуляризация)**

Даны данные $X \in R3\times2$ и целевой вектор $y \in R3$.

a) Запишите нормальное уравнение для решения $w^\wedge$ с L2-регуляризацией $\lambda$.

b) Вычислите $w^\wedge$ при $\lambda=1$ (численные значения).

8. **Случайные проекции**

Сгенерируйте случайную матрицу $R \in R5\times10$ с элементами, распределёнными нормально N(0,1).

a) Вычислите приближённый проекционный образ матрицы $A \in R10\times10$ (заданной) как $A \approx ARR^\top$.

b) Оцените относительную ошибку $\|A-ARR^\top\|F/\|A\|F$.

## Примерные домашние задания

1. **Реализация базовых тензорных операций**

— Напишите функции **outer(u, v)**, **contract(T, axis1, axis2)**, **raise_index(v, g)** и **lower_index(v, g)** для произвольных размеров.

— Протестируйте их на случайных векторах/тензорах и сравните результаты с аналогами из **numpy.einsum**.

2. **Симметризация и анти-симметризация**

— Создайте функцию **symmetrize(T)** и **antisymmetrize(T)** для 2-тензоров.

— Сгенерируйте случайный тензор размера 4×4, проверьте, что **symmetrize(T)+antisymmetrize(T)** восстанавливает исходный тензор.

3. **Тензор-Тейлор для вектор-полей**

— Для функции $h(\mathbf{x})=\sin(x1)\cos(x2)$ реализуйте автоматическое вычисление градиента и Гессиана с помощью **autograd** (или **jax**).

— Сравните полученные тензоры с аналитическими выражениями в точке $(\pi/4,\pi/3)$.

4. **CP-разложение на практике**

— С помощью библиотеки **tensorly** реализуйте CP-разложение тензора размера 30×30×30 (генерируйте случайный тензор ранга 5).

— Оцените погрешность приближения при разных значениях ранга (от 1 до 10) и постройте график «ранг – ошибка».

5. **Tucker-разложение и сжатие изображений**

— Возьмите цветное изображение (например, **astronaut** из **skimage**).

— Представьте его как тензор $H\times W\times 3$ и выполните Tucker-разложение с разными ранговыми параметрами $(r1,r2,r3)$.

— Восстановите изображение и измерьте PSNR относительно оригинала; продемонстрируйте результаты в виде таблицы и нескольких картинок.

6. **Регуляризованная тензорная регрессия**

— Сгенерируйте набор наблюдений $\{(X(i),y(i))\}i=1N$, где каждый $X(i)\in R4\times 4$ и $y(i)\in R$.

— Постройте линейную модель $y(i)=\langle W,X(i)\rangle+\varepsilon$ и найдите коэффициентный тензор $W$ с L2-регуляризацией, решая нормальное уравнение $(\sum X(i)\otimes X(i)+\lambda I)\mathrm{vec}(W)=\sum y(i)\mathrm{vec}(X(i))$.

— Проанализируйте влияние параметра $\lambda$ на переобучение (разбейте данные на обучающую/валидационную части).

7. **Случайные проекции (sketching) для больших матриц**

— Сгенерируйте разрежённую матрицу $A\in R10000\times 5000$ (плотность ≈ 0.1 %).

— Реализуйте алгоритм «Random Gaussian Sketch»: выберите матрицу $R\in R5000\times k$ с $k=200$, вычислите $A'=AR$.

— Оцените качество приближения $A\approx A'R\top$ через относительную ошибку Фробениуса; сравните с обычным SVD-аппроксимацией ранга k.

8. **Применение тензорных методов к графам**

— Сгенерируйте случайный неориентированный граф из 50-й вершин (используйте **networkx**).

— Постройте тензор смежности порядка 3, где третий индекс – тип ребра (например, «дружба», «работа», «семья» – задайте случайно).

— Выполните CP-разложение этого тензора и интерпретируйте полученные факторные матрицы как «сообщества» и «типы связей».

**Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

| № п/п | Задание | Ответ | Компетенция |
|---|---|---|---|
| 1 | укажите определение **тензора** (что хранит в себе многомерный массив чисел). | упорядоченный набор чисел $ai1$ $i2…ik$, где $k$ – порядок (ранг) тензора | УК-6 |
| 2 | назовите, как называется порядок (ранг) тензора, если в нём $k$ индексов. | ранг (order) | УК-6 |
| 3 | укажите различие между **контравариантным** и **ковариантным** индексом (одно слово). | позиция | УК-6 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | запишите **правило преобразования** контравариантных индексов при переходе к новой системе координат $x'i=Aij$ $xj$. | $T'i=AijTj$ | ПК-2 |
| 5 | укажите, как называется **операция согласования (контракции)** двух индексов тензора. | свертка | ПК-3 |
| 6 | запишите формулу **внешнего (каратечного) произведения** двух векторов $u$ и $v$. | $(u⊗v)ij=uivj$ | ПК-2 |
| 7 | назовите **символ Кронекера** $δij$ и его значение (одно слово). | единица | ОПК-1 |
| 8 | назовите **символ Леви-Чивиты** $εijk$ и его основное свойство (одно слово). | полностью-антисимметричный | ОПК-1 |
| 9 | укажите, как называется **правило Эйнштейна** (одним словом). | суммирование | ОПК-1 |
| 10 | запишите **операцию поднятия индекса** с помощью метрического тензора $gij$ для ковариантного вектора $vj$. | $vi=gijvj$ | ПК-1 |
| 11 | укажите, как называется **операция понижения индекса** с помощью $gij$ для контравариантного вектора $wj$. | $wi=gijwj$ | ПК-1 |
| 12 | назовите **третий-порядковый** тензор, часто используемый в механике сплошных сред (одно слово). | деформация | ПК-1 |
| 13 | укажите, как называется **симметризация** тензора $Tij$ (одно слово). | симметрия | ПК-2 |
| 14 | укажите, как называется **анти-симметризация** тензора $Tij$ (одно слово). | антисимметрия | ПК-2 |
| 15 | назовите **разложение ТЕНЗОР-ТЕЙЛОР** первой степени для скалярного поля $f(x)$ (коротко). | $f(x+Δx)=f(x)+∂i$ $fΔxi+O(\|Δx\|2)$ | ПК-2 |
| 16 | укажите, как называется **разложение** тензора $A$ в виде суммы **ранговых** тензоров (одно слово). | CP-разложение | ПК-3 |
| 17 | назовите **метод** вычисления **тензорного разложения Хосаке** (одно слово). | Tucker | ПК-3 |
| 18 | укажите, как называется **тензор** , определяющий внутреннее произведение в римановой геометрии. | метрический | ПК-3 |
| 19 | назовите **физический объект** , описывающий распределение внутренних сил в упругом теле (одно слово). | напряжение | ОПК-1 |
| 20 | укажите **область применения** тензорных вычислений в **машинном обучении** (одно слово). | рекомендация | ПК-1 |