

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета  
АНО ВО «Центральный университет»  
«07» марта 2024 г.  
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
«Вычислительная линейная алгебра»**

**Направление подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**Направленность (профиль) подготовки:** Математика и компьютерные науки

**Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Срок освоения программы:** 4 года

**Год набора:** 2024

**Москва  
2024**

## Содержание

<b>1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Перечень планируемых результатов обучения</b> .....	<b>5</b>
<b>3. Тематический план</b> .....	<b>7</b>
<b>4. Содержание дисциплины (модуля)</b> .....	<b>8</b>
<b>5. Учебно-методическое обеспечение</b> .....	<b>9</b>
<b>6. Материально-техническое обеспечение</b> .....	<b>10</b>
<b>7. Методические и оценочные материалы</b> .....	<b>11</b>

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Вычислительная линейная алгебра» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и компьютерные науки, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Вычислительная линейная алгебра» необходимо, так как матричные операции лежат в основе многих алгоритмов машинного обучения, обработки данных и компьютерной графики, обеспечивая эффективное решение сложных вычислительных задач.

Эта дисциплина способствует развитию понимания численных методов и оптимизации, что критично для специалистов в области искусственного интеллекта, анализа больших данных и программного обеспечения, повышая их профессиональную компетентность и востребованность.

### Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и компьютерные науки и входит в обязательную часть Блока 1.

Дисциплина (модуль) изучается на 3 курсе в 6 семестре.

**Цель изучения дисциплины (модуля):** формирование у студентов фундаментальных навыков работы с матрицами и векторами для решения задач линейной алгебры, необходимых в прикладной математике и компьютерных технологиях.

### Задачи изучения дисциплины (модуля):

— изучить основные операции с матрицами, включая сложение, умножение, вычисление обратной матрицы и определителя, для понимания их свойств и использования в линейных системах;

— освоить численные методы решения матричных уравнений, такие как LU-разложение и сингулярное разложение, для анализа и решения задач с большой размерностью;

— проанализировать практические приложения матричных вычислений в машинном обучении, компьютерной графике и оптимизации, включая работу с векторами и тензорами в алгоритмах;

— реализовать матричные алгоритмы на языках программирования, например Python или MATLAB, для интеграции теоретических знаний в проекты по математике и компьютерным наукам.

### В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

#### **знать:**

— базовые операции, нормы матриц, спектральные свойства;

— принципы малоранговых приближений матриц (SVD, метод Эххарта-Янга);

— свойства структурированных матриц (Тёплица, Вандермонда) и применение быстрого преобразования Фурье (FFT);

— классификацию, основные прямые (LU, QR) и итерационные (Якоби, Гаусса-Зейделя, градиентные) методы;

— области применимости и критерии выбора методов (точность, сложность, устойчивость);

#### **уметь:**

— находить собственные значения и векторы, сингулярные разложения (SVD);

- формировать оптимальные малоранговые аппроксимации матриц;
- использовать быстрое преобразование Фурье для умножения структурированных матриц на вектор;
- решать СЛАУ прямыми (LU-факторизация) и простейшими итерационными методами;
- оценивать сходимость итерационных методов для СЛАУ;

***владеть:***

- навыками представления и анализа задач в матричной форме;
- техникой сингулярного разложения и быстрого преобразования Фурье;
- практикой реализации и применения базовых прямых и итерационных алгоритмов;
- умением оценивать вычислительную сложность матричных алгоритмов;
- способностью обоснованно выбирать численный метод для конкретной задачи.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализация математических моделей в профессиональной деятельности
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов

	результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

### 3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
Лекции	Семинары					
1	Основы матричного анализа	2	2		8	Домашнее задание Подготовка к семинару
2	Сингулярное разложение (SVD)	2	2		8	Домашнее задание
3	Малоранговые приближения	2	2		8	Домашнее задание Контрольная работа
4	QR-разложение	2	2		8	Домашнее задание Контрольная работа
5	Быстрое преобразование Фурье (FFT)	2	2		8	Домашнее задание Подготовка к семинару
6	Структурированные матрицы	2	2		8	Подготовка к семинару
7	Прямые методы решения СЛАУ	2	2		9	Домашнее задание Контрольная работа
8	Итерационные методы	2	2		9	Домашнее задание Контрольная работа
9	Метод сопряжённых градиентов	2	2		9	Домашнее задание Подготовка к семинару
10	Предобуславливание	2	2		9	Подготовка к семинару
11	Собственные значения	3	3		9	Домашнее задание Контрольная работа
12	Матричная экспонента	3	3	2	9	Домашнее задание Контрольная работа
13	Численная устойчивость	3	3		9	Домашнее задание Подготовка к семинару
14	Прикладные задачи	3	3		9	Подготовка к семинару
	<i>Зачет с оценкой</i>			4		
	<b>Итого:</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>6</b>	<b>120</b>	
	<b>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</b>	<b>190</b>				
	<b>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</b>	<b>5</b>				

#### 4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Основы матричного анализа	Векторные и матричные нормы. Операции с матрицами: сложение, умножение, транспонирование. Практика: реализация базовых операций в Python (NumPy)
2	Сингулярное разложение (SVD)	Теория SVD: сингулярные значения и векторы. Применение для анализа данных. Практикум: SVD для изображений
3	Малоранговые приближения	Теорема Эккарта-Янга. CUR-разложение. Практика: сжатие данных
4	QR-разложение	Отражения Хаусхолдера. Применение для решения СЛАУ. Практика: реализация QR-разложения
5	Быстрое преобразование Фурье (FFT)	Основы FFT. Умножение матриц с помощью FFT. Практикум: обработка сигналов
6	Структурированные матрицы	Тёплицевы и циркулянтные матрицы. Эффективные алгоритмы умножения. Кейс: финансовые приложения
7	Прямые методы решения СЛАУ	LU-разложение. Метод Гаусса. Практика: решение систем в Python
8	Итерационные методы	Метод Якоби. Метод Гаусса-Зейделя. Практикум: сравнение сходимости
9	Метод сопряжённых градиентов	Основы метода. Применение для симметричных матриц. Практика: решение задач теплообмена
10	Предобуславливание	Идея предобуславливания. Простые предобуславливатели. Практикум: ускорение сходимости
11	Собственные значения	Степенной метод. Метод обратных итераций. Практика: анализ колебаний
12	Матричная экспонента	Определение и свойства. Вычисление через ряд Тейлора. Приложения в дифференциальных уравнениях
13	Численная устойчивость	Обусловленность задач. Ошибки округления. Практикум: анализ устойчивости
14	Прикладные задачи	Обработка изображений. Финансовые модели. Работа над проектами

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

### ***Основная литература:***

1. Аверина, Т. А. Алгоритмы статистического моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой : учебное пособие / Т. А. Аверина. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. - 288 с. – ISBN 978-5-9729-2443-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2226612>.

2. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 276 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01748-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/536889>.

3. Воропаева, О. Ф. Основы численного анализа динамических систем : учебник для вузов / О. Ф. Воропаева. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 164 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18818-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/568925>.

4. Численные методы : учебник и практикум для вузов / под редакцией У. Г. Пирумова. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-03141-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/510769>.

### ***Дополнительная литература:***

1. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1 : Факты, модели: В 2 т.: Сборник научных трудов / Ширяев А.Н. - Москва :МЦНМО, 2016. - 440 с.: ISBN 978-5-4439-2391-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/970044>

2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М. : Вильямс, 2009. — 784 с.

3. Лубягина, Е. Н. Линейная алгебра : учебник для вузов / Е. Н. Лубягина, Е. М. Вечтомов. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 150 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10594-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/565745>.

4. Татарников, О. В. Линейная алгебра : учебник для вузов / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнева ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 273 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19275-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/556226>.

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	<a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp">https://elibrary.ru/defaultx.asp</a>
2.	База данных для IT-специалистов	<a href="https://habr.com">https://habr.com</a>
3.	База данных ScienceDirect	<a href="https://www.sciencedirect.com">https://www.sciencedirect.com</a>
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	<a href="https://minobrnauki.gov.ru/">https://minobrnauki.gov.ru/</a>
5.	Федеральный портал «Российское образование»	<a href="https://www.edu.ru/">https://www.edu.ru/</a>
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	<a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	<a href="http://school-collection.edu.ru/">http://school-collection.edu.ru/</a>
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	<a href="http://fcior.edu.ru/">http://fcior.edu.ru/</a>

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
<b>Операционные системы:</b>		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное

<b>Браузеры:</b>		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Офисные приложения:</b>		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Программное обеспечение для планирования и учета времени:</b>		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления проектами:</b>		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы управления базами данных:</b>		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы резервного копирования (backup):</b>		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
<b>Справочно-правовые системы:</b>		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
<b>Средства антивирусной защиты:</b>		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
<b>Среды разработки:</b>		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Пакеты программных средств и библиотек:</b>		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления библиографической информацией:</b>		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Сервисы и службы:</b>		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Вычислительная линейная алгебра» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его

преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Семинар* — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

*Аудиторная работа* – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

### **Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

**Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Вычислительная линейная алгебра»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме **зачета с оценкой**, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	<p>Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.</p>
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	
7	Хорошо	Зачтено	<p>Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.</p>
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	<p>Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки,</p>
4	Удовлетворительно	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Вычислительная линейная алгебра» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	13	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	30%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Аудиторная работа	15%	1	Ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Зачет с оценкой	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время, возможен дополнительный устный экзамен

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Вычислительная линейная алгебра»** « $0,2 \times$  среднее за домашние задания +  $0,3 \times$  среднее за контрольные работы +  $0,15 \times$  за аудиторную работу +  $0,35 \times$  зачет с оценкой».

**Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)**

**Примерные вопросы для семинаров**

**1. Основы матричного анализа (Векторные и матричные нормы. Операции с матрицами: сложение, умножение, транспонирование. Практика: реализация базовых операций в Python (NumPy))**

1. Что такое векторная норма и какие основные виды норм вы знаете?
2. Как определяется матричная норма и чем она отличается от векторной?
3. Объясните, как выполняется сложение двух матриц, и какие условия должны выполняться?
4. Что такое умножение матриц и какова его ассоциативность?
5. Как работает транспонирование матрицы и какие свойства оно имеет?
6. Как вычислить евклидову норму вектора?
7. Чем отличаются нормы L1, L2 и бесконечности для векторов?
8. Какие матричные нормы являются субмультипликативными?
9. Приведите пример сложения двух матриц размерности 2x2.
10. Как умножить две матрицы A и B, если размеры A - 3x2, B - 2x4?
11. Что такое транспонированная матрица и как она обозначается?
12. Как реализовать сложение матриц в NumPy?
13. Напишите код на Python для умножения двух матриц с помощью NumPy.
14. Как транспонировать матрицу в NumPy и что возвращает метод .T?

15. Какие ошибки могут возникнуть при умножении матриц неподходящих размеров?

## **2. Сингулярное разложение (SVD) (Теория SVD: сингулярные значения и векторы. Применение для анализа данных. Практикум: SVD для изображений)**

1. Что такое сингулярное разложение матрицы (SVD)?
2. Как определяются сингулярные значения и сингулярные векторы в SVD?
3. Какие свойства имеет SVD для любой матрицы?
4. Как выглядит полное SVD в виде произведения  $U$ ,  $\Sigma$  и  $V^T$ ?
5. Чем отличается SVD от спектрального разложения симметричной матрицы?
6. Как применяется SVD для снижения размерности данных?
7. Объясните, как SVD используется в анализе главных компонент (PCA).
8. Как вычислить ранг матрицы с помощью SVD?
9. Приведите пример SVD для простой матрицы  $2 \times 2$ .
10. Как SVD помогает в обработке изображений?
11. Напишите код на Python для выполнения SVD с помощью NumPy.
12. Как использовать SVD для сжатия изображения (пример с grayscale)?
13. Какие сингулярные значения важны для аппроксимации матрицы?
14. Как интерпретировать матрицы  $U$ ,  $\Sigma$  и  $V$  в контексте SVD?
15. Какие приложения SVD есть в рекомендательных системах?

## **3. Малоранговые приближения (Теорема Эккарта-Янга. CUR-разложение. Практика: сжатие данных)**

1. Что такое малоранговое приближение матрицы?
2. В чём суть теоремы Эккарта-Янга?
3. Как вычисляется оптимальное малоранговое приближение с помощью SVD?
4. Что такое CUR-разложение и чем оно отличается от SVD?
5. Как выбираются строки и столбцы в CUR-разложении?
6. Какие преимущества имеет CUR-разложение перед SVD?
7. Как применяется малоранговое приближение для сжатия данных?
8. Объясните, как измеряется ошибка в малоранговом приближении.
9. Приведите пример малорангового приближения для матрицы  $3 \times 3$ .
10. Как CUR-разложение используется в анализе больших данных?
11. Напишите код на Python для малорангового приближения с SVD.
12. Как реализовать CUR-разложение в практике?
13. Какие метрики используются для оценки качества сжатия?
14. Как малоранговые приближения помогают в машинном обучении?
15. Какие ограничения есть у теоремы Эккарта-Янга?

## **4. QR-разложение (Отражения Хаусхолдера. Применение для решения СЛАУ. Практика: реализация QR-разложения)**

1. Что такое QR-разложение матрицы?
2. Как работает метод отражений Хаусхолдера в QR-разложении?
3. Какие свойства имеет QR-разложение для квадратных матриц?
4. Как применяется QR-разложение для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)?
5. Чем отличается QR-разложение от LU-разложения?
6. Как вычисляется  $Q$  и  $R$  в QR-разложении?
7. Что такое Givens-вращения и как они связаны с QR?
8. Объясните, как QR используется в методе наименьших квадратов.
9. Приведите пример QR-разложения для матрицы  $2 \times 2$ .
10. Как QR-разложение помогает в вычислении собственных значений?
11. Напишите код на Python для QR-разложения с помощью NumPy.
12. Как реализовать отражения Хаусхолдера вручную?

13. Какие численные преимущества имеет QR-разложение?
14. Как решить СЛАУ с помощью QR-разложения?
15. Какие ошибки могут возникнуть при вычислении QR?

#### **5. Быстрое преобразование Фурье (FFT) (Основы FFT. Умножение матриц с помощью FFT. Практикум: обработка сигналов)**

1. Что такое преобразование Фурье и как оно связано с FFT?
2. В чём принцип быстрого преобразования Фурье (FFT)?
3. Как вычисляется DFT и как FFT ускоряет этот процесс?
4. Какие основные алгоритмы FFT вы знаете (например, Cooley-Tukey)?
5. Как применяется FFT для умножения больших матриц?
6. Что такое циркулянтная свёртка и как она связана с FFT?
7. Объясните, как FFT используется в обработке сигналов.
8. Как обратное FFT восстанавливает сигнал?
9. Приведите пример FFT для простого сигнала (массив из 4 элементов).
10. Как FFT помогает в анализе частот?
11. Напишите код на Python для FFT с помощью NumPy.
12. Как реализовать умножение матриц через FFT?
13. Какие приложения FFT есть в аудио- и видеопроцессинге?
14. Как FFT используется в решении дифференциальных уравнений?
15. Какие ограничения имеет FFT для нестепенных размеров массивов?

#### **6. Структурированные матрицы (Тёплицевы и циркулянтные матрицы. Эффективные алгоритмы умножения. Кейс: финансовые приложения)**

1. Что такое тёплицева матрица и какие её свойства?
2. Чем отличается циркулянтная матрица от тёплицевой?
3. Как вычисляется умножение циркулянтных матриц с помощью FFT?
4. Какие эффективные алгоритмы умножения существуют для структурированных матриц?
5. Как применяется циркулянтная матрица в свёрточных операциях?
6. Объясните, как тёплицевы матрицы используются в финансовом моделировании.
7. Что такое Toeplitz-системы и как их решать?
8. Как циркулянтные матрицы связаны с полиномами?
9. Приведите пример циркулянтной матрицы 3x3.
10. Как FFT ускоряет операции с циркулянтными матрицами?
11. Напишите код на Python для умножения циркулянтной матрицы.
12. Какие приложения структурированных матриц есть в экономике?
13. Как решать СЛАУ с тёплицевой матрицей?
14. Какие преимущества имеют структурированные матрицы в больших системах?
15. Как моделировать временные ряды с помощью циркулянтных матриц?

#### **7. Прямые методы решения СЛАУ (LU-разложение. Метод Гаусса. Практика: решение систем в Python)**

1. Что такое LU-разложение и как оно получается?
2. Как работает метод Гаусса для решения СЛАУ?
3. Чем отличается LU-разложение от метода Гаусса?
4. Какие условия нужны для применения LU-разложения?
5. Как вычисляются матрицы L и U в LU-разложении?
6. Объясните, как решать СЛАУ с помощью LU-разложения.
7. Что такое pivoting в методе Гаусса и зачем оно нужно?
8. Как метод Гаусса связан с LU?
9. Приведите пример LU-разложения для матрицы 3x3.
10. Как оценить сложность метода Гаусса?

11. Напишите код на Python для LU-разложения с NumPy.
12. Как решить СЛАУ методом Гаусса в коде?
13. Какие численные проблемы возникают в прямых методах?
14. Как LU используется в итерационных методах?
15. Какие альтернативы методу Гаусса существуют?

#### **8. Итерационные методы (Метод Якоби. Метод Гаусса-Зейделя. Практикум: сравнение сходимости)**

1. Что такое итерационные методы решения СЛАУ и чем они отличаются от прямых?
2. Как работает метод Якоби?
3. В чём суть метода Гаусса-Зейделя и чем он отличается от Якоби?
4. Какие условия сходимости для итерационных методов?
5. Как вычисляется итерация в методе Якоби?
6. Объясните, как метод Гаусса-Зейделя ускоряет сходимость.
7. Что такое релаксация в итерационных методах?
8. Как сравнить скорость сходимости Якоби и Гаусса-Зейделя?
9. Приведите пример применения метода Якоби к простой СЛАУ.
10. Как оценить ошибку в итерационных методах?
11. Напишите код на Python для метода Якоби.
12. Как реализовать метод Гаусса-Зейделя в практике?
13. Какие матрицы подходят для этих методов?
14. Как сравнить сходимость на практике (критерии)?
15. Какие недостатки имеют итерационные методы?

#### **9. Метод сопряжённых градиентов (Основы метода. Применение для симметричных матриц. Практика: решение задач теплообмена)**

1. Что такое метод сопряжённых градиентов (CG)?
2. Как работает CG для решения СЛАУ с симметричными матрицами?
3. Какие свойства матрицы нужны для применения CG?
4. Как вычисляются направления поиска в CG?
5. Объясните, как CG минимизирует квадратичную форму.
6. Как применяется CG в задачах теплообмена?
7. Чем CG отличается от метода градиентного спуска?
8. Как CG связан с методом наименьших квадратов?
9. Приведите пример CG для простой симметричной матрицы.
10. Как оценить сходимость CG?
11. Напишите код на Python для метода CG.
12. Как моделировать теплообмен с помощью CG?
13. Какие преимущества имеет CG для больших систем?
14. Как предобуславливание улучшает CG?
15. Какие ограничения метода CG?

#### **10. Предобуславливание (Идея предобуславливания. Простые предобуславливатели. Практикум: ускорение сходимости)**

1. Что такое предобуславливание и зачем оно нужно?
2. Как идея предобуславливания улучшает сходимость итерационных методов?
3. Какие простые предобуславливатели вы знаете (например, диагональный)?
4. Что такое Якоби-предобуславливатель?
5. Как применяется неполное LU-разложение как предобуславливатель?
6. Объясните, как предобуславливание влияет на число обусловленности.
7. Как измерить эффективность предобуславливателя?
8. Какие предобуславливатели используются в CG?
9. Приведите пример простого предобуславливания.

10. Как предобуславливание ускоряет сходимость в практике?
11. Напишите код на Python для диагонального предобуславливания.
12. Как реализовать ILU-предобуславливатель?
13. Какие приложения предобуславливания в физике?
14. Как сравнить разные предобуславливатели?
15. Какие вызовы возникают при выборе предобуславливателя?

### **11. Собственные значения (Степенной метод. Метод обратных итераций. Практика: анализ колебаний)**

1. Что такое собственные значения и собственные векторы?
2. Как работает степенной метод для вычисления доминирующего собственного значения?
3. В чём суть метода обратных итераций?
4. Как применяется сдвиг в методах собственных значений?
5. Объясните, как анализировать колебания с помощью собственных значений.
6. Чем отличается QR-алгоритм от степенного метода?
7. Как вычислять все собственные значения?
8. Приведите пример степенного метода для матрицы  $2 \times 2$ .
9. Как метод обратных итераций находит собственные векторы?
10. Как собственные значения используются в анализе систем?
11. Напишите код на Python для степенного метода.
12. Как моделировать колебания с собственными значениями?
13. Какие численные проблемы возникают в этих методах?
14. Как оценить точность вычисления собственных значений?
15. Какие приложения собственных значений в инженерии?

### **12. Матричная экспонента (Определение и свойства. Вычисление через ряд Тейлора. Приложения в дифференциальных уравнениях)**

1. Что такое матричная экспонента и как она определяется?
2. Какие свойства имеет матричная экспонента?
3. Как вычисляется матричная экспонента через ряд Тейлора?
4. Чем отличается матричная экспонента от скалярной?
5. Как применяется матричная экспонента в решении дифференциальных уравнений?
6. Что такое матричная логарифма и как она связана с экспонентой?
7. Как вычислить  $e^A$  для диагонализируемой матрицы?
8. Объясните, как матричная экспонента используется в системах ODE.
9. Приведите пример вычисления  $e^A$  для простой матрицы.
10. Какие численные методы для матричной экспоненты?
11. Напишите код на Python для матричной экспоненты.
12. Как матричная экспонента моделирует динамику систем?
13. Какие свойства коммутирования важны для экспоненты?
14. Как оценить ошибку в приближении ряда Тейлора?
15. Какие приложения матричной экспоненты в квантовой механике?

### **13. Численная устойчивость (Обусловленность задач. Ошибки округления. Практикум: анализ устойчивости)**

1. Что такое численная устойчивость алгоритма?
2. Как определяется обусловленность задачи?
3. Какие виды ошибок округления возникают в вычислениях?
4. Чем отличается прямая ошибка от обратной?
5. Как обусловленность влияет на точность решения СЛАУ?
6. Объясните, как анализировать устойчивость метода.
7. Что такое машинная точность и как она связана с ошибками?

8. Как оценить обусловленность матрицы?
9. Приведите пример плохо обусловленной матрицы.
10. Как ошибки округления накапливаются в итерациях?
11. Напишите код на Python для анализа обусловленности.
12. Как улучшить устойчивость алгоритма?
13. Какие метрики используются для оценки устойчивости?
14. Как устойчивость влияет на выбор метода?
15. Какие примеры неустойчивых задач вы знаете?

#### 14. Прикладные задачи (Обработка изображений. Финансовые модели. Работа над проектами)

1. Как матричные вычисления применяются в обработке изображений?
2. Какие алгоритмы используются для сжатия изображений с матрицами?
3. Как моделировать финансовые риски с помощью матриц?
4. Объясните, как SVD применяется в рекомендательных системах.
5. Как матрицы используются в моделировании портфелей?
6. Какие проекты можно реализовать по обработке сигналов?
7. Как FFT помогает в анализе финансовых временных рядов?
8. Объясните, как решать задачи оптимизации в финансах с матрицами.
9. Приведите пример проекта по сжатию изображений.
10. Как матричные методы используются в машинном зрении?
11. Напишите план проекта по финансовому моделированию.
12. Как реализовать анализ данных в проекте?
13. Какие инструменты (библиотеки) нужны для проектов?
14. Как оценить результаты прикладных задач?
15. Какие этические аспекты возникают в прикладных проектах?

### Примерные задания по контрольной работе

#### Контрольная работа №1

##### 1. Тема: Основы матричного анализа

Вычислите спектральную норму матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Объясните, что такое векторные нормы и как они связаны с матричными нормами. Приведите пример транспонирования и умножения матриц вручную.

##### 2. Тема: Сингулярное разложение (SVD)

Докажите, что для любой матрицы  $A$  существует SVD  $A = U\Sigma V^T$ . Вычислите SVD для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  вручную. Как сингулярные значения используются для анализа данных, например, в снижении размерности?

##### 3. Тема: Малоранговые приближения

Сформулируйте теорему Экарта-Янга. Вычислите приближение ранга 1 для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  с помощью SVD. Сравните CUR-разложение и SVD по эффективности для сжатия больших данных.

##### 4. Тема: QR-разложение

Опишите процесс QR-разложения с использованием отражений Хаусхолдера. Выполните QR-разложение для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  и объясните, как оно применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

##### 5. Тема: Быстрое преобразование Фурье (FFT)

Объясните принцип работы FFT и его преимущество над дискретным преобразованием Фурье (DFT). Как FFT используется для умножения больших матриц? Приведите пример умножения двух полиномов с помощью FFT.

**6. Тема: Структурированные матрицы**

Определите тёплицевы и циркулянтные матрицы. Приведите пример циркулянтной матрицы 4x4 и объясните, как эффективные алгоритмы умножения (на основе FFT) работают для них. Как такие матрицы применяются в финансовых приложениях?

**7. Тема: Прямые методы решения СЛАУ**

Решите систему  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$  методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. Выполните LU-разложение матрицы системы и объясните его преимущества.

**8. Тема: Итерационные методы**

Сравните методы Якоби и Гаусса-Зейделя по скорости сходимости. Примените метод Якоби к системе  $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$  (выполните 3 итерации вручную с начальным приближением  $x_0 = 0, y_0 = 0$ ). Когда итерационные методы предпочтительны перед прямыми?

## Примерные домашние задания Домашнее задание 1

**1. Тема: Основы матричного анализа**

Вычислите евклидову норму вектора  $v = [3, 4, 5]$ . Затем реализуйте сложение двух матриц  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$  в Python с использованием NumPy. Напишите код и результат.

**2. Тема: Сингулярное разложение (SVD)**

Объясните, что такое сингулярные значения и векторы в SVD. Приведите пример SVD для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , вычислив U,  $\Sigma$  и  $V^T$  вручную (без кода). Как SVD применяется для снижения размерности данных?

**3. Тема: QR-разложение**

Выполните QR-разложение матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  с помощью отражений Хаусхолдера. Напишите шаги вычисления и результат. Как это разложение используется для решения СЛАУ?

**4. Тема: Быстрое преобразование Фурье (FFT)**

Объясните принцип FFT на примере массива [1, 0, 0, 1]. Как FFT может быть использовано для умножения двух полиномов? Напишите код на Python для выполнения FFT этого массива с помощью NumPy.

**5. Тема: Прямые методы решения СЛАУ**

Решите систему уравнений  $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$  методом Гаусса. Затем реализуйте LU-разложение для матрицы системы в Python и решите её с помощью NumPy.

**6. Тема: Метод сопряжённых градиентов**

Опишите основы метода сопряжённых градиентов (CG) для симметричных матриц. Примените CG для решения системы  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  (выполните 2-3 итерации вручную). Как CG используется в задачах теплообмена?

## Домашнее задание 2

### Задание 2. Итерационные методы (Тема 8)

**Теоретическое объяснение:** Опишите метод Якоби и метод Гаусса-Зейделя, сравните их сходимость.

**Расчёты:** Выполните 2 итерации метода Якоби для системы  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

**Код в Python:** Реализуйте метод Гаусса-Зейделя для той же системы с NumPy и сравните сходимость за 5 итераций.

### Задание 3. Метод сопряжённых градиентов (Тема 9)

**Теоретическое объяснение:** Объясните основы метода сопряжённых градиентов и его применение для симметричных матриц.

**Расчёты:** Выполните 1 итерацию метода сопряжённых градиентов для системы из Задания 2.

**Код в Python:** Напишите код для решения задачи теплообмена (простая сетка 2x2) методом сопряжённых градиентов с NumPy.

### Задание 4. Предобуславливание (Тема 10)

**Теоретическое объяснение:** Опишите идею предобуславливания и простые предобуславливатели.

**Расчёты:** Для матрицы  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  примените диагональный предобуславливатель и вычислите улучшенную матрицу.

**Код в Python:** Реализуйте предобуславливание для ускорения метода Якоби в NumPy.

### Задание 5. Собственные значения (Тема 11)

**Теоретическое объяснение:** Опишите степенной метод и метод обратных итераций для нахождения собственных значений.

**Расчёты:** Найдите доминирующее собственное значение матрицы  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  за 2 итерации степенного метода.

**Код в Python:** Реализуйте степенной метод для той же матрицы с NumPy.

### Задание 6. Матричная экспонента (Тема 12)

**Теоретическое объяснение:** Объясните определение матричной экспоненты и её вычисление через ряд Тейлора.

**Расчёты:** Вычислите матричную экспоненту для  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (приближённо до 3-го члена ряда).

**Код в Python:** Напишите код для вычисления матричной экспоненты с помощью SciPy для той же матрицы.

## Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Вычислите спектральную норму матрицы $A = \text{diag}(3, 1)$ .	3 норма	ОПК-1
2	Вычислите число обусловленности матрицы $A = \text{diag}(1, 10)$ в 2-норме.	10 число	ОПК-1
3	Для матрицы ранга 1 с сингулярным значением 5 укажите норму Фробениуса.	5 норма	ОПК-1
4	Для симметричной положительно определённой матрицы с собственными значениями 2 и 8 укажите минимальное собственное значение.	2 значение	ОПК-1
5	Вычислите детерминант верхнетреугольной матрицы с диагональю (2,3,4).	24 детерминант	ОПК-1
6	Для ортогональной матрицы укажите значение нормы 2.	1 норма	ОПК-1
7	Вычислите радиус спектра матрицы с собственными значениями -2 и 5.	5 радиус	ОПК-1
8	При QR-разложении ортогональная матрица Q имеет условное число в 2-норме, равное чему.	1 число	ОПК-4
9	Для метода Якоби с матрицей, у которой спектральный радиус матрицы итерации равен 0.5, укажите значение радиуса.	0.5 радиус	ОПК-4
10	Для метода сопряжённых градиентов при условии SPD-матрицы укажите знак собственных значений.	положительные значения	ОПК-4
11	При FFT длины 8 укажите асимптотическую сложность алгоритма.	$n \log n$ сложность/ $O(n \log n)$ сложность	ОПК-4

12	Для LU-разложения невырожденной матрицы укажите детерминант при диагонали U (1,2,3).	6 детерминант	ОПК-4
13	Для преобуславливания, уменьшающего число обусловленности с 100 до 10, укажите новое число.	10 число	ОПК-4
14	Для степенного метода при доминирующем собственном значении 7 укажите предел итераций.	7 значение	ПК-1
15	Для матричной экспоненты $e^{At}$ при $A=0$ укажите результат.	1 матрица	ПК-1
16	Для метода обратных итераций при сдвиге, равном собственному значению 4, укажите предел.	4 значение	ПК-1
17	Для системы $Ax=b$ при $A=I$ укажите решение при $b=(1,2)$ .	(1,2) решение	ПК-1
18	Для циркулянтной матрицы укажите тип базиса, в котором она диагонализируется.	Фурье базис	ПК-1
19	При малоранговом приближении с сохранением сингулярного значения 10 укажите спектральную норму ошибки при отброшенных значениях 2 и 1.	2 норма	ПК-1
20	Для SVD матрицы с сингулярными значениями 5 и 3 укажите норму Фробениуса.	$\sqrt{34}$ норма	ПК-1
21	Для метода Гаусса без выбора главного элемента при плохой обусловленности укажите характер ошибки.	рост погрешности	ПК-1