

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета  
АНО ВО «Центральный университет»  
«07» марта 2024 г.  
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
«Математический анализ. Углубленный курс II»**

**Направление подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**Направленность (профиль) подготовки:** Математика и компьютерные науки

**Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Срок освоения программы:** 4 года

**Год набора:** 2024

**Москва  
2024**

## Содержание

<b>1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)</b> .....	3
<b>2. Перечень планируемых результатов обучения</b> .....	5
<b>3. Тематический план</b> .....	7
<b>4. Содержание дисциплины (модуля)</b> .....	8
<b>5. Учебно-методическое обеспечение</b> .....	9
<b>6. Материально-техническое обеспечение</b> .....	9
<b>7. Методические и оценочные материалы</b> .....	11

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математический анализ. Углубленный курс II» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и компьютерные науки, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Математический анализ. Углубленный курс II» является основой для многих других математических дисциплин. Дисциплина (модуль) развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

### Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и компьютерные науки и входит в Блок 1, часть, формируемую участниками образовательных отношений как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе во 2 семестре.

**Цель изучения дисциплины (модуля):** в формировании глубокого понимания алгебраических структур, эрмитовых пространств, а также их применения в различных областях науки и техники.

**Задачи изучения дисциплины (модуля)** направлены на формирование у студентов следующий знаний, умений и навыков:

- знание определений компактного множества и критерий компактности в  $\mathbb{R}^n$ , свойства открытых и замкнутых множеств;
- знание формулы Лагранжа конечных приращений в  $\mathbb{R}^n$ , теорему о неявной функции и их доказательства;
- знание критерий интегрируемости функции, формулу Остроградского, методы вычисления несобственных интегралов (признаки Абеля, Дирихле);
- знание критерий Коши сходимости числовых рядов, признаки Раабе и Гаусса, свойства абсолютно и условно сходящихся рядов;
- знание формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, понятие меры Жордана и методы сведения кратных интегралов к повторным;
- умение доказывать свойства компактных, открытых и замкнутых множеств, применять критерий компактности;
- умение использовать формулу Лагранжа и теорему о неявной функции для анализа функций многих переменных;
- умение вычислять несобственные интегралы с помощью признаков Абеля и Дирихле, применять формулу Остроградского;
- умение исследовать сходимость рядов (включая комплексные) с помощью критерия Коши, признаков Раабе и Гаусса;
- умение применять формулу Тейлора для приближения функций, вычислять кратные интегралы с заменой переменных;
- способность применять методы доказательства теорем о компактности и работы с множествами в  $\mathbb{R}^n$ ;
- способность применять технику дифференцирования сложных функций и анализа экстремумов с помощью матрицы Гессе;
- способность применять навыки интегрирования (включая комплексные методы) и анализа сходимости несобственных интегралов;

- способность применять исчисления рядов, включая перестановку членов (теорема Римана) и умножение рядов;
- способность применять аппарат кратного интегрирования (замена переменных, сведение к повторным интегралам) и применения меры Жордана.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.

	математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

### 3. Тематический план

№п/ п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Контактная работа		Контроль	Самостоя тельная работа	
Лек ции	Семинары (практические занятия)					
1	Компакт; критерий компактности в $R^n$		2		3	Домашнее задание
2	Теорема о неявной вектор-функции		2		3	Домашнее задание
3	Вывод формулы Тейлора		2		3	Домашнее задание Контрольная работа
4	Доказательство достаточного условия безусловного экстремума		2		3	Домашнее задание
5	Подсчёт некоторых неопределённых интегралов с помощью комплексных чисел		2		3	Домашнее задание Контрольная работа
6	Формула Остроградского		2		3	Коллоквиум
7	Вывод критерия интегрируемости функции		4		3	Домашнее задание
8	Вывод формулы длины кривой на плоскости		4		4	Домашнее задание Контрольная работа
9	Абсолютно и условно сходящиеся интегралы		2		3	Домашнее задание
10	Критерий Коши сходимости числового ряда		4		3	Домашнее задание
11	Свойства абсолютно сходящихся рядов		2		4	Домашнее задание
12	Равенство нулю меры Жордана графика интегрируемой функции		2		3	Домашнее задание Контрольная работа
	<i>Зачет</i>				8	
	<i>Итого:</i>		30		8	38
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</i>	76				
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</i>	2				

#### 4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Компакт; критерий компактности в $R^n$	Компакт; критерий компактности в $R^n$ . Свойства открытых и замкнутых множеств — доказательства утверждений. Формула конечных приращений Лагранжа в $R^n$ . Доказательство формулы производной сложной функции
2	Теорема о неявной вектор-функции	Формулировка и условия применимости теоремы. Метод доказательства и использование якобиана. Примеры применения теоремы к системам уравнений
3	Вывод формулы Тейлора	Пример функции, у которой ряд Тейлора существует, но не сходится к функции ни в одной точке Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме
4	Доказательство достаточного условия безусловного экстремума	Достаточное условие экстремума, окаймленная матрица Гессе и ее знакоопределенность. Формулировка достаточного условия экстремума через положительную (отрицательную) определенность матрицы Гессе. Свойства окаймленной матрицы Гессе и критерии знакоопределенности. Примеры применения условия к задачам оптимизации
5	Подсчёт некоторых неопределённых интегралов с помощью комплексных чисел	Использование комплексного анализа для вычисления интегралов. Применение теоремы о вычетах и контурных интегралов. Примеры вычисления классических интегралов с помощью комплексных методов
6	Формула Остроградского	Формулировка формулы и условия её применения. Геометрический смысл и связь с теоремой Гаусса-Остроградского. Примеры использования в вычислении поверхностных интегралов
7	Вывод критерия интегрируемости функции	Формулировка критерия Римана интегрируемости функции. Доказательство и анализ условий интегрируемости. Примеры функций, удовлетворяющих и не удовлетворяющих критерию
8	Вывод формулы длины кривой на плоскости	Формула длины кривой через параметризацию. Связь с интегралом от модуля производной функции. Примеры вычисления длины кривых
9	Абсолютно и условно сходящиеся интегралы	Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов. Главное значение по Коши
10	Критерий Коши сходимости числового ряда	Ряды с комплексными членами Признаки Раабе и Гаусса сходимости числовых рядов
11	Свойства абсолютно сходящихся рядов	Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося числового ряда. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда, – перемножение абсолютно сходящихся числовых рядов
12	Равенство нулю меры Жордана графика интегрируемой функции	Вывод формулы сведения двойного интеграла к повторному Вывод формулы замены переменных в кратном интеграле

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

### *Основная литература:*

1. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562115>.

2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562116>.

### *Дополнительная литература:*

1. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

2. Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560461>.

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;

— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	<a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp">https://elibrary.ru/defaultx.asp</a>
2.	База данных для IT-специалистов	<a href="https://habr.com">https://habr.com</a>
3.	База данных ScienceDirect	<a href="https://www.sciencedirect.com">https://www.sciencedirect.com</a>
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	<a href="https://minobrnauki.gov.ru/">https://minobrnauki.gov.ru/</a>
5.	Федеральный портал «Российское образование»	<a href="https://www.edu.ru/">https://www.edu.ru/</a>
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	<a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	<a href="http://school-collection.edu.ru/">http://school-collection.edu.ru/</a>
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	<a href="http://fcior.edu.ru/">http://fcior.edu.ru/</a>

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
<b>Операционные системы:</b>		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Браузеры:</b>		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Офисные приложения:</b>		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Программное обеспечение для планирования и учета времени:</b>		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления проектами:</b>		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы управления базами данных:</b>		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы резервного копирования (backup):</b>		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
<b>Справочно-правовые системы:</b>		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное

<b>Средства антивирусной защиты:</b>		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
<b>Среды разработки:</b>		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Пакеты программных средств и библиотек:</b>		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления библиографической информацией:</b>		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Сервисы и службы:</b>		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математический анализ. Углубленный курс II» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как практические занятия, коллоквиум, контрольные работы и домашние задания, контроль теоретических знаний, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Участие в семинаре (аудиторная работа)* – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

*Коллоквиум* – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

### **Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

#### **Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Математический анализ. Углубленный курс II»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме *зачета*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Математический анализ. Углубленный курс II» оценивается следующим образом:

Для получения «Зачёта» по углубленному курсу нужно сдать:

- 10 домашних заданий на продвинутом уровне (задания с черной звездочкой);
- 2 из 3 контрольных на основном уровне (задания с красной звездочкой);
- 1 из 2 контрольных на продвинутом уровне (задания с черной звездочкой).

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

### Примерные домашние задания

### Домашнее задание по теме «Экстремумы функций. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши»

#### Производная второго порядка

\*\*\* ЗАДАЧА 1

1,5 балла

\* То же, что и производная второго порядка.

Найди вторую производную\* функции:

а)  $f(x) = \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{1}{x^{99}}$ ;

б)  $f(x) = \cos^2 x$ ;

в)  $f(x) = e^{x^2}$ ;

г)  $f(x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$ ;

д)  $f(x) = x^2 \ln(2x)$ ;

е)  $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1})$ ;

ж)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ ;

з)  $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$ .

\*\*\* ЗАДАЧА 2

1 балл

Одна точка движется по закону

$$s_1(t) = t^3 + \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2},$$

другая — по закону

$$s_2(t) = \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 - 5t,$$

где  $s_1, s_2$  измеряются в метрах,  $t$  — в секундах. Найди ускорения точек в те моменты, когда их скорости равны.

\*\*\* ЗАДАЧА 3

0,5 балла

Найди вторую производную функции, обратной к функции  $y = 2x^3 + 5x^7, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

\*\*\* ЗАДАЧА 4

1 балл

Пусть для функции  $y = f(x)$  известны  $f'(x), f''(x), f'''(x)$ . Найди вторую и третью производные обратной функции  $x = f^{-1}(y)$ , предполагая, что они существуют.

#### Производная высших порядков

\*\*\* ЗАДАЧА 5

1 балл

Найди производную порядка  $n \in \mathbb{N}$  функции на множестве её существования:

а)  $f(x) = \cos x$ ;

б)  $f(x) = \sin^2 x$ ;

в)  $f(x) = \operatorname{ch}^2 x$ ;

г)  $f(x) = \frac{2}{x^2 - 9}$ .

\*\*\*  
ЗАДАЧА 6

1,5 балла

Для функции  $f(x) = \arctg x$  вычислите  $f^{(n)}(0)$ .

\*\*\*  
ЗАДАЧА 7

0,5 балла

Найди производную порядка  $n \in \mathbb{N}$  функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2}.$$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 8

1,5 балла

Найди производные функций порядка  $n \geq 2$ :

а)  $y = (x^2 - 3x)5^x$ ;

в)  $y = \frac{3x+5}{\sqrt{2x+1}}$ ;

б)  $y = x^2 \cos^2 3x$ ;

г)  $y = (x^2 - 2x) \ln(x^2 - x - 2)$ .

\*\*\*  
ЗАДАЧА 9

1,5 балла

Используя формулу Лейбница (??), докажи равенство

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \sin \left( x + \frac{\pi k}{2} \right) = 2^{n/2} \sin \left( x + \frac{\pi n}{4} \right),$$

где  $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ .

\*\*\*  
ЗАДАЧА 10

1 балл

Определите, какого порядка производными обладает в точке  $x = 0$  функция  $y = |x|^3$ .

### Производные высших порядков от параметрически или неявно заданных функций

\*\*\*  
ЗАДАЧА 11

1 балл

Функция  $y = f(x)$  задана параметрически формулами

$$x = \frac{t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^3}. \quad (1)$$

Найди  $y'_x$  и  $y''_{xx}$ .

### Дифференциалы высших порядков

\*\*\*  
ЗАДАЧА 12

0,5 балла

Найди второй дифференциал функции  $y = x^3 e^{-2x}$ , считая  $x$  независимой переменной.

\*\*\*  
ЗАДАЧА 13

0,5 балла

Пусть  $y(x) = x^3$ . Найди  $d^2 y$  в случае,

а)  $x$  — независимая переменная;

б)  $x = t^2$ .

\*\*\* ЗАДАЧА 14

1,2 балла

Найди  $d^2y$  в точке  $(1; 0)$  для функции  $y = y(x)$ , заданной неявно

$$3(y - x + 1) + \operatorname{arctg}(y/x) = 0.$$

### Критические точки

\*\*\* ЗАДАЧА 15

1 балл

Пользуясь определением ?? докажи, что

а) точка  $x = 1/4$  является точкой локального минимума функции  $y(x) = 2x^2 - x - 1$ ;

б) точка  $x = \arccos \frac{4}{5}$  является точкой локального максимума функции  $y(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$ ;

в) все точки из множества  $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$  являются точками локального экстремума функции

$$y(x) = |x| - |x - 2|,$$

но не являются точками строгого локального экстремума.

\* \*\* ЗАДАЧА 16

2 балла

Найди точки экстремума функции:

а)  $y(x) = x^4 + x^2 - 2$ ;

б)  $y(x) = x^2 - 2|x|$ .

### Теорема Ролля

\* \*\* ЗАДАЧА 17

2 балла

Проверь, что для функции  $y(x) = \sqrt{x} - x/3$  на отрезке  $[0; 9]$  выполнены все условия теоремы Ролля. Затем найди все такие  $x \in [0; 9]$ , что  $f'(x) = 0$ .

\* \*\* ЗАДАЧА 18

0,5 балла

Пусть функция  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Проверь, что  $f(0) = f(\pi)$ , но нет числа  $\xi \in (0; \pi)$  такого, что  $f'(\xi) = 0$ . Почему это не противоречит теореме Ролля?

\*\*\* ЗАДАЧА 19

1 балл

Пусть

- функция  $f$  определена и имеет непрерывную производную  $(n - 1)$ -го порядка на отрезке  $[x_0; x_n]$ ;
- функция  $f$  имеет производную  $n$ -го порядка в интервале  $(x_0; x_n)$ ;
- выполнены равенства  $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$ ,  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

Докажи, что в интервале  $(x_0; x_n)$  существует, по меньшей мере одна точка  $\xi$  такая, что  $f^{(n)}(\xi) = 0$ .

## Примерные задания для коллоквиума

### Вариант 1

1. Определение компакта в  $\mathbb{R}^n$ .
2. Критерий компактности в  $\mathbb{R}^n$ .
3. Свойства открытых множеств и доказательство одного из них.
4. Свойства замкнутых множеств и доказательство одного из них.
5. Формула конечных приращений Лагранжа в  $\mathbb{R}^n$ .

6. Доказательство формулы производной сложной функции.
7. Формулировка теоремы о неявной вектор-функции.
8. Метод доказательства теоремы о неявной вектор-функции и роль якобиана.
9. Пример применения теоремы о неявной вектор-функции к системе уравнений.
10. Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
11. Достаточное условие экстремума через знакоопределённость матрицы Гессе.
12. Свойства окаймлённой матрицы Гессе.
13. Применение теоремы о вычетах для вычисления интегралов с помощью комплексных чисел.
14. Формулировка и геометрический смысл формулы Остроградского.

### Вариант 2

1. Формулировка критерия Римана интегрируемости функции.
2. Доказательство критерия интегрируемости.
3. Пример функции, удовлетворяющей критерию Римана, и функции, не удовлетворяющей.
4. Вывод формулы длины кривой на плоскости через параметризацию.
5. Связь длины кривой с интегралом от модуля производной функции.
6. Определения абсолютно и условно сходящихся интегралов.
7. Признаки Абеля и Дирихле для сходимости несобственных интегралов.
8. Понятие главного значения по Коши.
9. Критерий Коши сходимости числового ряда.
10. Особенности рядов с комплексными членами.
11. Признаки Раабе и Гаусса сходимости числовых рядов.
12. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда и её свойства.
13. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда.
14. Равенство нулю меры Жордана графика интегрируемой функции.
15. Вывод формул сведения двойного интеграла к повторному и замены переменных в кратном интеграле.

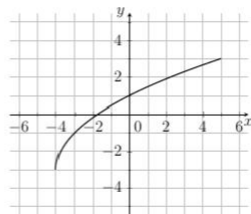
### Примерные задания по контрольной работе

#### Контрольная работа №1

<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <span style="font-size: 0.8em; margin-right: 5px;">***</span> <span style="font-size: 0.8em;">ЗАДАЧА 1</span> </div>	<p><b>0,2 + 0,3 балла</b></p> <p>Пусть <math>f(x) = (x - 5)^3, x \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>а) Найди <math>f^{-1}</math>.</p> <p>б) Пусть функция <math>g</math> такова, что <math>(f \circ g)(x) = 8x^6</math>. Найди <math>g</math>.</p>
---	---

\*\*\* ЗАДАЧА 2 **0,4 + 0,6 балла**

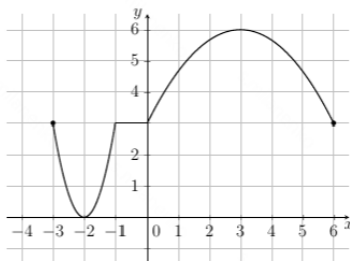
Дан график функции  $y = f(x)$ . Функция определена при  $-4 \leq x \leq 5$ .



- Запиши область определения и множество значений обратной функции  $f^{-1}$ .
- Нарисуй эскиз графика  $f^{-1}$ .

\*\*\* ЗАДАЧА 3 **0,7 + 0,8 балла**

Дан график функции  $y = f(x)$ . Рассмотрим функцию  $h(x) = f(1 - 2x) + 3$ .



- Словами опиши последовательность преобразований для построения  $y = h(x)$ .
- Нарисуй эскиз графика функции  $h(x)$ .

\*\*\* ЗАДАЧА 4 **1 балл**

Нарисуй эскиз графика функции  $y(x) = \arccos\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right)$  на основе анализа интервалов монотонности.

\*\*\* ЗАДАЧА 5 **0,5 балла**

Следующее утверждение верно для функции  $f$ :

$$\exists C: \forall x \in D(f) \exists a \in D(f): |f(a) \cdot f(x)| < C.$$

Следует ли отсюда, что функция  $f(x)$  ограничена? Обоснуй свой ответ.

\*\*\* ЗАДАЧА 6 **0,5 балла**

Следующее утверждение верно для последовательности  $\{a_n\}$ :

$$\forall C > 0 \exists k \in \mathbb{N}: \exists n > k: |a_n| < C.$$

Следует ли отсюда, что последовательность  $\{a_n\}$  ограничена? Обоснуй свой ответ.

\*\*\* ЗАДАЧА 7 **0,5 балла**

Докажи, что последовательность  $a_n = \frac{4n^2 + 6n + 13}{2n + 3}$  является возрастающей, начиная с некоторого номера  $N$ .

\*\*\* ЗАДАЧА 8 **1 балл**

Докажи, используя определение предела последовательности, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n - 7}{5 - 3n} = -4$ .

\*\*\* ЗАДАЧА 9 **0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 балла**

Вычисли пределы

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cos(n) - 5 \sin^2(2n) + 4}{n + 2}; & \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3}{n^2 + 5} - \frac{2n^2}{n - 1} \right); \\ \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 - 2n + 6} \right); & \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n + 4)^n}{(3n - 1)^n}. \end{aligned}$$

\*\*\* ЗАДАЧА 10 **0,5 балла**

Найди предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (3 - \sqrt{15})^n + 10n + 2}{n^2 (4 - \sqrt{15})^n + 8n + 2}$ .

\*\*\* ЗАДАЧА 11 **1 балл**

Докажи, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3^n + n \cdot 2^n} = 3$ .

