
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Дополнительные главы математического анализа»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Математика и компьютерные науки

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2025

**Москва
2025**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	7
5. Учебно-методическое обеспечение	8
6. Материально-техническое обеспечение	8
7. Методические и оценочные материалы	10

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Дополнительные главы математического анализа» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и компьютерные науки, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Дополнительные главы математического анализа» обеспечивает глубокое понимание расширенных методов анализа, необходимых для решения сложных математических и прикладных задач. Это способствует развитию аналитического мышления и формирует прочную основу для дальнейшего изучения и применения современных математических моделей в науке и технике.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и компьютерные науки и входит в обязательную часть Блока 1.

Дисциплина (модуль) изучается на 3 курсе в 6 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование углублённых знаний и навыков применения расширенных методов математического анализа для решения комплексных задач в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— изучить обобщенные функции, меры и интеграл Лебега как инструменты для работы с функциями и распределениями, что позволит анализировать сходимость, пределы и интегралы в более общих пространствах;

— освоить основы функционального анализа, включая линейные операторы, для моделирования и решения задач в области численных методов и алгоритмов;

— развить навыки применения дифференциальных уравнений, вариационного исчисления и гармонического анализа в контексте компьютерных наук, таких как обработка сигналов и оптимизация;

— подготовить студентов к самостоятельному исследованию и интеграции аналитических методов в проекты по машинному обучению, криптографии и теоретической информатике.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- основные свойства и условия сходимости рядов Фурье;
- классификацию особенностей и характер поведения интегралов с параметрами;
- основные понятия "Теория функций комплексного переменного": аналитичность, регулярность, особенности функций комплексного переменного;
- теоремы Коши, формулу Коши, теорему Морера и их следствия;
- связь между преобразованием Фурье и свёрткой, а также с линейными дифференциальными уравнениями;

уметь:

- строить и исследовать ряды Фурье для периодических функций, в том числе с разрывами;
- применять критерии равномерной, абсолютной и точечной сходимости рядов Фурье;
- вычислять интегралы с параметрами и проверять условия корректности перестановки пределов (Лейбниц, теорема Фубини и др.);
- вычислять остатки и применять метод вычетов в комплексных интегралах;

— определять особенности (полюсы, существенные особенности, точки разветвления) и классифицировать поведение функций в этих точках;

— выполнять прямое и обратное преобразование Фурье для типичных функций;

владеть:

— навыками аналитического разложения функций в ряды Фурье и применения ортогональных базисов;

— методику анализа параметрически заданных интегралов, в том числе с осциллирующими и особенными ядрами;

— инструментарием комплексного анализа для вычисления интегралов по замкнутым и незамкнутым контурам;

— методами продолжения аналитических функций и исследования их глобального поведения;

— навыками использования преобразования Фурье для анализа частотных характеристик сигналов.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
УК-2.	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1.	Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач
		УК-2.2.	Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения
		УК-2.3.	Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области
		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и

			представлять результаты в понятной и доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен определять общие формы и закономерности области машинного обучения	ПК-1.1.	Знает основные теоретические концепции и принципы, относящиеся к области машинного обучения, а также ключевые закономерности и модели, которые помогают в анализе и интерпретации данных
		ПК-1.2.	Умеет проводить систематический анализ области разработки, выявлять и формулировать общие закономерности и тенденции, а также применять методы исследования для получения новых знаний и понимания
		ПК-1.3.	Имеет практический опыт работы в области машинного обучения, включая участие в научных проектах, исследованиях или практических заданиях, где были выявлены и описаны общие формы и закономерности
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта, включая соблюдение норм информационной безопасности

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары (практические занятия)			
1	Функциональный анализ и ряды Фурье	20	20		20	Коллоквиум, Домашние задания
2	Интегралы, зависящие от параметра, и специальные функции	20	20	2	20	Коллоквиум, Домашние задания, Контрольная работа
3	Основы теории функций комплексного переменного	20	20	2	20	Коллоквиум, Домашние задания, Контрольная работа
	<i>Зачет с оценкой</i>			6		
	<i>Итого:</i>	<i>60</i>	<i>60</i>	<i>10</i>	<i>60</i>	
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</i>	<i>190</i>				
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</i>	<i>5</i>				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Функциональный анализ и ряды Фурье	Элементы функционального анализа: метрические пространства. Нормированные пространства. Элементы функционального анализа: гильбертовы пространства. Ряды Фурье по ортогональным системам. Тригонометрические ряды Фурье. Достаточные условия сходимости ряда Фурье. Различные виды сходимости ряда Фурье
2	Интегралы, зависящие от параметра, и специальные функции	Определённый интеграл с параметром. Несобственный интеграл с параметром: равномерная сходимость. Непрерывность интеграла по параметру. В-функция и Г-функция Эйлера. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Свертка
3	Основы теории функций комплексного переменного	Функции комплексного переменного. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Комплексное интегрирование. Ряды Тейлора и Лорана. Особые точки и их классификация. Теория вычетов и её применение для нахождения интегралов. Регулярные ветви многозначных функций

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562116>.

2. Садовничая И. В. Математический анализ: определенный интеграл : учебник для вузов / И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 430 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-20655-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/558520>.

3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : учебник и практикум для вузов / А. П. Потапов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 507 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19121-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/569097>.

Дополнительная литература:

1. Никитин А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560461>.

2. Попова И. Н. Анализ временных рядов : учебник для вузов / И. Н. Попова ; ответственный редактор В. В. Ковалев. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 74 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18394-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/568821>.

3. Капкаева Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое

Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Дополнительные главы математического анализа» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, коллоквиумы, домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов, планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Дополнительные главы математического анализа»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме **зачета с оценкой**, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать,
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Дополнительные главы математического анализа» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	13	Набор задач по темам недели

Активность	Вес	Количество	Описание
Коллоквиум	15%	14	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Контрольные работы	30%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Зачет с оценкой	35%	1	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по курсу

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Дополнительные главы математического анализа»: $\langle 0,2 \times \text{среднее за домашние задания} + 0,15 \times \text{среднее за коллоквиум} + 0,3 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,35 \times \text{зачет с оценкой} \rangle$.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

Домашнее задание по теме «Коэффициенты Фурье»

1. Найдите коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n разложения функции $f(x)=x$ на интервале $[-\pi, \pi]$.
2. Для функции $f(x)=\cos(3x)$ определите коэффициенты Фурье при разложении на интервале $[-\pi, \pi]$.
3. Рассчитайте коэффициенты Фурье для функции $f(x)=|x|$ на интервале $[-\pi, \pi]$.
4. Докажите, что для чётной функции $f(x)$ все коэффициенты b_n равны нулю.
5. Постройте частичную сумму ряда Фурье (до $n=5$) для функции $f(x)=x^2$ на интервале $[-\pi, \pi]$ и постройте график.

Домашнее задание по теме «Зависимость интеграла от параметра»

1. Исследуйте непрерывность функции:

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx.$$

2. Докажите дифференцируемость по параметру α функции:

$$G(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cos t dt,$$

и найдите $G'(\alpha)$.

3. Исследуйте сходимость интеграла:

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at}}{1+t^2} dt,$$

и найдите область значений параметра α , где интеграл существует.

4. Найдите производную по параметру α функции:

$$J(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1 + \alpha \sin x) dx.$$

5. Исследуйте зависимость от параметра α интеграла:

$$K(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx.$$

Домашнее задание по теме «Свойства преобразования»

1. Докажите линейность преобразования Фурье: если $F[f](\omega)$ и $F[g](\omega)$ — преобразования функций f и g , то для любых констант a, b $F[af+bg](\omega) = aF[f](\omega) + bF[g](\omega)$.

2. Исследуйте, как сдвиг функции во временной области влияет на её преобразование Фурье.

3. Докажите формулу масштабирования преобразования Фурье: если $fa(t) = f(at), a \neq 0$,

то

$$F[fa](\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

4. Найдите преобразование Фурье производной функции $f'(t)$ через преобразование Фурье $F[f](\omega)$.

5. Докажите, что преобразование Фурье чётной функции является вещественной и чётной функцией, а преобразование Фурье нечётной функции — мнимой и нечётной.

Примерные вопросы для подготовки к семинарам

Вопросы к семинару по теме «Теорема Коши»

1. Как формулируется теорема Коши для дифференцируемых функций?
2. В чём отличие теоремы Коши от теоремы Лагранжа о среднем значении?
3. Какие условия необходимы для применения теоремы Коши?
4. Как теорема Коши используется для доказательства теоремы Лагранжа?
5. Приведите пример функции, для которой выполняется теорема Коши, и поясните её применение.

Вопросы к семинару по теме «Представление функций в частотной области»

1. Что такое преобразование Фурье и как оно связано с представлением функции в частотной области?
2. Как интерпретируется спектр функции в частотной области?
3. Какие свойства преобразования Фурье важны для анализа сигналов?
4. Чем отличаются прямое и обратное преобразования Фурье?
5. Как представление функции в частотной области помогает решать дифференциальные уравнения?

Вопросы к семинару по теме «Разложение периодических функций»

1. Что такое ряд Фурье и для каких функций он применяется?
2. Какие условия Дирихле обеспечивают сходимость ряда Фурье?
3. Как вычисляются коэффициенты разложения периодической функции в ряд Фурье?
4. В чём разница между разложением в тригонометрический ряд и комплексный ряд Фурье?
5. Как разложение в ряд Фурье используется для анализа и синтеза сигналов?

Примерные темы для коллоквиума

Коллоквиум 1

Коллоквиум 1

1. Определение метрического пространства и его основные свойства.
2. Примеры метрических пространств в функциональном анализе.
3. Определение нормированного пространства и связь с метрическим пространством.
4. Основные примеры нормированных пространств.
5. Определение гильбертова пространства и его отличие от нормированного пространства.
6. Основные свойства скалярного произведения в гильбертовом пространстве.
7. Понятие ортогональной системы в гильбертовом пространстве.
8. Определение и свойства рядов Фурье по ортогональным системам.
9. Формула разложения функции в ряд Фурье.
10. Тригонометрические ряды Фурье: определение и примеры.
11. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке и в среднем.
12. Различие между точечной, равномерной и слабо-равномерной сходимостью ряда Фурье.
13. Принцип Парсеваля и его значение.
14. Обобщение рядов Фурье на другие ортогональные системы.
15. Применение рядов Фурье в решении дифференциальных уравнений.

Коллоквиум 2

1. Определение определённого интеграла с параметром.
2. Условия равномерной сходимости интеграла с параметром.
3. Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.
4. Правила интегрирования и дифференцирования интеграла по параметру.
5. Определение β -функции и её свойства.
6. Определение и свойства Γ -функции Эйлера.
7. Связь β -функции и Γ -функции.
8. Интеграл Фурье: определение и основные свойства.
9. Преобразование Фурье: определение и примеры.
10. Свойства преобразования Фурье (линейность, сдвиг, масштабирование).
11. Обратное преобразование Фурье.
12. Свертка функций: определение и свойства.
13. Теорема свертки для преобразования Фурье.
14. Применение интегралов с параметром в решении дифференциальных уравнений.
15. Использование специальных функций в математической физике.

Коллоквиум 3

1. Определение функции комплексного переменного и её области определения.
2. Условие дифференцируемости функции комплексного переменного (условия Коши–Римана).
3. Аналитические функции и их свойства.
4. Комплексное интегрирование: определение и основные свойства.
5. Формула Коши для комплексных интегралов.
6. Ряды Тейлора для аналитических функций.
7. Ряды Лорана и их применение.
8. Классификация особых точек: устранимые, полюса, существенные особенности.
9. Определение и свойства вычетов функции.
10. Теорема о вычетах и её применение для вычисления интегралов.

11. Принцип аргумента и его использование.
12. Регулярные ветви многозначных функций: определение и примеры.
13. Конформные отображения и их свойства.
14. Логарифмическая функция как пример многозначной функции.
15. Применение теории функций комплексного переменного в математической физике и инженерии.

Примерные задания для контрольной работы

Контрольная работа № 1

1. Найдите коэффициенты Фурье функции $f(x)=x$ на интервале $[-\pi, \pi]$.
2. Докажите ортогональность функций $\sin nx$ и $\cos mx$ на $[-\pi, \pi]$.
3. Исследуйте сходимость ряда Фурье для функции $f(x)=|x|$ на $[-\pi, \pi]$.
4. Разложите функцию $f(x)=x^2$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$.
5. Используйте ряд Фурье для решения задачи теплопроводности с заданными краевыми условиями.

6. Докажите формулу дифференцирования под знаком интеграла для функции

$$F(\alpha) = \int_0^1 e^{-\alpha x} \sin x \, dx.$$

7. Исследуйте непрерывность функции

$$G(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{1+t^2} dt.$$

8. Найдите производную по параметру α функции

$$H(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1 + \alpha \sin x) \, dx.$$

9. Используйте интегрирование по параметру для вычисления интеграла

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx.$$

10. Докажите дифференцируемость функции $F(\alpha)$, заданной интегралом с параметром.

11. Исследуйте условия сходимости ряда Фурье для кусочно-гладкой функции.
12. Найдите ряд Фурье для функции, заданной кусочно на отрезке $[-\pi, \pi]$.
13. Используйте ортогональность тригонометрических функций для вычисления коэффициентов Фурье.
14. Решите дифференциальное уравнение с помощью разложения решения в ряд Фурье.
15. Объясните, как условия Дирихле влияют на сходимость ряда Фурье.

Контрольная работа № 2

1. Дайте определение аналитической функции в комплексной плоскости.
2. Выведите формулы Коши-Римана для функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
3. Проверьте, является ли функция $f(z) = z^2 + \bar{z}$ аналитической.
4. Вычислите интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z-a}, \quad |a| < 1.$
5. Докажите теорему Коши для простого замкнутого контура.
6. Используя формулу Коши, найдите значение функции внутри круга, если известны значения на контуре.
7. Выведите выражение для комплексного дифференциала и объясните его геометрический смысл.
8. Найдите прямое и обратное преобразования Фурье функции

$$f(t) = e^{-at^2}, a > 0.$$

9. Докажите линейность преобразования Фурье.
10. Исследуйте, как сдвиг функции во временной области отражается в частотной области.
11. Используйте преобразование Фурье для решения дифференциального уравнения второго порядка.
12. Объясните связь между преобразованием Фурье и спектральным анализом сигналов.
13. Вычислите преобразование Фурье производной функции $f'(t)$ через $F[f](\omega)$.
14. Докажите, что преобразование Фурье чётной функции является вещественной и чётной.
15. Приведите пример применения обратного преобразования Фурье в обработке сигналов.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Назовите тип пространства, в котором определена норма и оно полно.	Банахово пространство	УК-1
2	Вычислите коэффициент a_0 в ряде Фурье для функции $f(x) = x$ на интервале $[-\pi, \pi]$.	0	УК-1
3	Как называется пространство, где определено скалярное произведение, и оно полно.	Гильбертово пространство	УК-1
4	Найдите значение интеграла $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.	1	УК-1
5	Назовите метод разложения функций по ортогональным системам.	Ряд Фурье	УК-1
6	Вычислите коэффициент a_n в ряде Фурье для $f(x) = \sin(x)$ на $[-\pi, \pi]$.	0	УК-1
7	Как называется условие, при котором ряд Фурье сходится к функции.	Условие Дирихле	УК-2
8	Найдите значение бета-функции $B(1,1)$.	1	УК-2
9	Назовите тип сходимости ряда Фурье, когда частичные суммы приближают функцию.	Точечная сходимость	УК-2
10	Вычислите интеграл $\int_0^1 x dx$.	0.5	УК-2
11	Как называется интеграл, зависящий от параметра, с равномерной сходимостью.	Несобственный интеграл	УК-2
12	Найдите вычет функции $1/z$ в точке $z=0$.	1	УК-2
13	Назовите функцию, используемую для вычисления определённых интегралов.	Бета-функция	ОПК-1
14	Вычислите значение гамма-функции $\Gamma(1)$.	1	ОПК-1
15	Как называется преобразование, переводящее функцию в частотную область.	Преобразование Фурье	ОПК-1
16	Найдите коэффициент b_n в ряде Фурье для $f(x) = \cos(x)$ на $[-\pi, \pi]$.	0	ОПК-1
17	Назовите операцию свёртки двух функций в интеграле Фурье.	Свертка	ОПК-1
18	Вычислите интеграл $\int_{-1}^1 1 dx$.	2	ОПК-1
19	Как называется функция, дифференцируемая в комплексной плоскости.	Голоморфная функция	ПК-1
20	Найдите вычет функции $1/(z-1)$ в точке $z=1$.	1	ПК-1
21	Назовите ряд, разлагающий функцию в окрестности точки.	Ряд Тейлора	ПК-1
22	Вычислите коэффициент a_0 в ряде Фурье для $f(x) = 1$ на $[-\pi, \pi]$.	1	ПК-1

23	Назовите интеграл, вычисляемый с помощью вычетов.	Контурный интеграл	ПК-2
24	Найдите значение интеграла $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$.	2	ПК-1
25	Назовите теорему, используемую для вычисления интегралов по контуру.	Теорема о вычетах	ПК-2
26	Вычислите вычет функции e^z/z в точке $z=0$.	1	ПК-2