

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета  
АНО ВО «Центральный университет»  
«24» июнь 2025 г.  
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
«Теория вероятностей и математическая статистика»**

**Направление подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**Направленность (профиль) подготовки:** Программа двух дипломов НИУ  
ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»

**Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Срок освоения программы:** 4 года

**Год набора:** 2025

**Москва  
2025**

## Содержание

<b>1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Перечень планируемых результатов обучения</b> .....	<b>5</b>
<b>3. Тематический план</b> .....	<b>6</b>
<b>4. Содержание дисциплины (модуля)</b> .....	<b>7</b>
<b>5. Учебно-методическое обеспечение</b> .....	<b>8</b>
<b>6. Материально-техническое обеспечение</b> .....	<b>9</b>
<b>7. Методические и оценочные материалы</b> .....	<b>10</b>

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория вероятностей и математическая статистика» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Теория вероятностей и математическая статистика» позволяет студентам освоить фундаментальные принципы и методы анализа случайных процессов и данных, что необходимо для проектирования и оптимизации технических систем, а также для принятия обоснованных решений в условиях неопределенности. Кроме того, эта дисциплина (модуль) помогает развить навыки критического мышления, решения проблем и принятия обоснованных решений на основе данных, что является важнейшим навыком для будущих специалистов.

### Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в обязательную часть Блока 1.

Дисциплина (модуль) изучается на 2 курсе в 3 семестре.

**Цель изучения дисциплины (модуля):** заключается в освоении навыков и знаний, необходимых для анализа и обработки данных, принятия обоснованных решений в условиях неопределенности и разработки математических моделей для решения практических задач в различных областях.

### Задачи изучения дисциплины (модуля):

— формирование знаний о концепции вероятностного пространства и основных аксиом вероятности, условной вероятности, разнообразных распределениях случайных величин и их свойств;

— освоение умений расчёта основных параметров случайных величин, разработки стратегии на основе статистических данных и оценочного анализа, решения задач на сходимость случайных величин, включая использование закона больших чисел работы с вероятностными неравенствами;

— формирование навыков практического применения вероятностных моделей к реальным задачам и сценариям, работы с моделями многомерных распределений, использования моделей теории вероятностей для анализа и решения практических задач в различных областях.

### В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

#### **знать:**

- концепции вероятностного пространства и основных аксиом вероятности;
- классическую модель вероятности и примеров её применения;
- условную вероятность и уметь применять формулу полной вероятности;
- теоремы Байеса и её практических приложений;
- независимость событий и случайных величин, их различных характеристик;
- разнообразные распределения случайных величин и их свойств;
- основные и продвинутое теоремы теории вероятностей, включая закон больших чисел и центральную предельную теорему;

#### **уметь:**

- формулировать вероятностные задачи и проводить их анализ;

- эффективно использовать теорему Байеса для решений задач в неизвестных условиях;
- рассчитывать основные параметры случайных величин;
- работать с вероятностными неравенствами, такими как неравенства Маркова и Чебышёва, для оценивания вероятностей;
- решать задачи на сходимость случайных величин, включая использование закона больших чисел;
- проводить расчет и анализ вероятностей в многомерных вероятностных пространствах;
- планировать вычисления и интерпретации результатов в контексте задач статистики;

***владеть:***

- навыком практического применения вероятностных моделей к реальным задачам и сценариям;
- навыком работы с моделями многомерных распределений;
- способностью разрабатывать и использовать случайные модели для управления неопределенностями;
- способностью интерпретировать и визуализировать результаты вероятностного анализа;
- умением разрабатывать стратегии на основе статистических данных и оценочного анализа;
- готовностью к исследованию и разработке алгоритмов для вероятностных расчетов;
- навыком использования моделей теории вероятностей для анализа и решения практических задач в различных областях.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

### 3. Тематический план

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятель ная работа	
Лек ции	Семинары (практические занятия)					
1	Комбинаторика	1	2		6	Домашние задания
2	Дискретное вероятностное пространство	1	2		6	Домашние задания, контрольная работа
3	Условная вероятность	1	2		6	Домашние задания
4	Дискретные случайные величины I	1	2		6	Домашние задания, контрольная работа
5	Дискретные случайные величины II	1	2		6	Домашние задания Подготовка к семинару
6	Аксиоматика Колмогорова	1	2		6	Домашние задания
7	Общее понятие случайной величины, абсолютно непрерывные случайные величины I	1	2		6	Домашние задания Подготовка к семинару
8	Абсолютно непрерывные случайные величины II	1	2		6	Домашние задания Подготовка к семинару
9	Характеристические функции и центральная предельная теорема	1	2		6	Домашние задания Подготовка к семинару
10	Описательная статистика	1	2		6	Домашние задания
11	Точечные оценки и их свойства	1	2		6	Домашние задания
12	Интервальные оценки и их свойства	1	2		7	Подготовка к семинару
13	Проверка гипотез	1	2		7	Домашние задания
14	Линейная регрессия и гауссовские вектора	1	2		7	Подготовка к семинару
15	Условное математическое ожидание. Value at Risk	1	2		7	Подготовка к семинару
	<i>Экзамен</i>				6	
	<b>Итого:</b>	<b>30</b>	<b>60</b>		<b>6</b>	<b>94</b>
	<b>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</b>	<b>190</b>				
	<b>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</b>	<b>5</b>				

#### 4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Комбинаторика	Определение. Биномиальные коэффициенты. Их свойства. Бином Ньютона. Выбор элементов.
2	Дискретное вероятностное пространство	Дискретное вероятностное пространство. Свойства вероятности. Классическое вероятностное пространство. Геометрическая вероятность.
3	Условная вероятность	Условная вероятность, независимость попарная и в совокупности, формула умножения, формула полной вероятности, формула Байеса
4	Дискретные случайные величины I	Определение. Классические распределения. Дискретный случайный вектор. Независимость. Распределение суммы и разности независимых случайных величин
5	Дискретные случайные величины II	Математическое ожидание. Свойства математического ожидания. Дисперсия. Ковариация. Корреляция. Связь независимости и некоррелируемости. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Пуассона
6	Аксиоматика Колмогорова	Вероятностное пространство. Вероятностная мера и ее свойства. Борелевская сигма-алгебра и мера Лебега. Примеры и свойства вероятностных пространств
7	Общее понятие случайной величины, абсолютно непрерывные случайные величины I	Определение случайной величины. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Абсолютно непрерывные случайные величины и плотность распределения. Свойства и применение плотности. Классические распределения. Случайный вектор. Плотность совместного распределения. Независимость случайных величин.
8	Абсолютно непрерывные случайные величины II	Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция. Расчет в абсолютно непрерывном случае. Матрица ковариации и ее свойства.
9	Характеристические функции и центральная предельная теорема	Определение характеристических функций. Свойства характеристических функций. Взаимно-однозначное соответствие. Центральная предельная теорема
10	Описательная статистика	Генеральная совокупность. Выборки. Вариационный ряд. Характеристики выборки. Гистограмма. Эмпирическая функция распределения. Выборочная квантиль. Теорема Колмогорова
11	Точечные оценки и их свойства	Несмещенность оценки. Оценки среднего и среднеквадратического отклонения. Состоятельность оценки. Функция правдоподобия. Оценка методом максимального правдоподобия. Оценка методом моментов. Неравенство Крамера-Рао. Эффективные оценки
12	Интервальные оценки и их свойства	Доверительная вероятность. Доверительный интервал. Построение доверительного интервала. Распределение Стьюдента
13	Проверка гипотез	Статистическая гипотеза. Альтернатива. Ошибки 1-го и 2-го рода. Критическое множество. Мощность критерий Лемма Неймана-Пирсона, критерий Хи-квадрат
14	Линейная регрессия и гауссовские вектора	Задача линейной регрессии в вероятностной постановке и ее статистическое оценивание. Теорема Гаусса-Маркова. Проверка значимости параметров линейной регрессии и значимость линейной регрессии в целом. Определение гауссовского случайного вектора
15	Условное математическое ожидание. Value at Risk	Определение, свойства условного математического ожидания и примеры. Неравенство Йенсена. Условное математическое ожидание и линейная регрессия в случае гауссовского случайного вектора. Риск и монетарные меры риска. Value at Risk, экономический смысл, свойства. Параметрический, исторический VaR, расчет VaR методом Монте Карло. Актуальность бэкстестинга оценок. Тесты для адекватности оценки.

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

### **Основная литература:**

1. Малугин, В. А. Теория вероятностей : учебник для вузов / В. А. Малугин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 266 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06964-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563987>.

### **Дополнительная литература:**

1. Энатская, Н. Ю. Теория вероятностей : учебник для вузов / Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 204 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01338-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561149>.

### **Основная литература:**

2. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели : учебник для вузов / В. Д. Мятлев, Л. А. Панченко, Г. Ю. Ризниченко, А. Т. Терехин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 321 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01698-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561493>

3. Калинина, В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Н. Калинина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 472 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02471-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/510903>.

4. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10004-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/565694>.

5. Прохоров, Ю. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для вузов / Ю. В. Прохоров, Л. С. Пономаренко. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 219 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-20239-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/557837>

### **Дополнительная литература:**

2. Энатская, Н. Ю. Теория вероятностей : учебник для вузов / Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 204 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01338-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561149>.

3. Малугин, В. А. Теория вероятностей : учебник для вузов / В. А. Малугин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 266 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06964-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563987>.

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	<a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp">https://elibrary.ru/defaultx.asp</a>
2.	База данных для IT-специалистов	<a href="https://habr.com">https://habr.com</a>
3.	База данных ScienceDirect	<a href="https://www.sciencedirect.com">https://www.sciencedirect.com</a>
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	<a href="https://minobrnauki.gov.ru/">https://minobrnauki.gov.ru/</a>
5.	Федеральный портал «Российское образование»	<a href="https://www.edu.ru/">https://www.edu.ru/</a>
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	<a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	<a href="http://school-collection.edu.ru/">http://school-collection.edu.ru/</a>
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	<a href="http://fcior.edu.ru/">http://fcior.edu.ru/</a>

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
<b>Операционные системы:</b>		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Браузеры:</b>		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Офисные приложения:</b>		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Программное обеспечение для планирования и учета времени:</b>		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления проектами:</b>		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы управления базами данных:</b>		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы резервного копирования (backup):</b>		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
<b>Справочно-правовые системы:</b>		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
<b>Средства антивирусной защиты:</b>		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
<b>Среды разработки:</b>		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Пакеты программных средств и библиотек:</b>		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления библиографической информацией:</b>		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Сервисы и службы:</b>		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Теория вероятностей и математическая статистика» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, домашние задания и контрольные работы, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично

фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Семинар* — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

### **Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

**Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Теория вероятностей и математическая статистика»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме **экзамена**, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

<b>Десятибалльная оценка</b>	<b>Пятибалльная оценка</b>	<b>Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)</b>
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном.
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Теория вероятностей и математическая статистика» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
Домашние задания	20%	Набор задач по темам недели
Аудиторная работа	20%	Активная работа студентов на семинарах
Контрольные работы	30%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Экзамен	30%	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по дисциплине (модулю)

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Теория вероятностей и математическая статистика»:**  $0,20 \times \text{среднее за домашние задания} + 0,20 \times \text{среднее за аудиторную работу} + 0,3 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,30 \times \text{экзамен}$ .

## **Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)**

### **Примерные вопросы для подготовки к семинарам**

#### **Комбинаторика**

1. Что такое биномиальный коэффициент и как он определяется?
2. Какие основные свойства биномиальных коэффициентов вы знаете?
3. Как формулируется и доказывается бином Ньютона?
4. В чем разница между размещениями, перестановками и сочетаниями?
5. Как вычислить количество способов выбрать  $k$  элементов из  $n$  без учета порядка?
6. Как использовать формулу биномиального коэффициента для решения комбинаторных задач?
7. Приведите пример задачи на вычисление числа сочетаний и решите её.

#### **Дискретное вероятностное пространство**

1. Что такое дискретное вероятностное пространство?
2. Какие аксиомы вероятности выполняются в дискретном пространстве?
3. Что такое классическое вероятностное пространство?
4. Как определяется вероятность события в классической модели?
5. Что такое геометрическая вероятность и в чем её отличие от классической?
6. Приведите пример задачи на вычисление геометрической вероятности.
7. Какие свойства вероятности важны для построения вероятностной модели?

#### **Условная вероятность**

1. Как определяется условная вероятность события?
2. Что такое независимость двух событий?
3. Чем отличается попарная независимость от независимости в совокупности?
4. Сформулируйте и объясните формулу умножения вероятностей.
5. Как формулируется и применяется формула полной вероятности?
6. Что такое формула Байеса и где она используется?
7. Приведите пример применения формулы Байеса на практике.

#### **Дискретные случайные величины I**

1. Что такое дискретная случайная величина?
2. Какие классические дискретные распределения вы знаете?
3. Что такое дискретный случайный вектор?
4. Как определяется независимость случайных величин?
5. Как найти распределение суммы двух независимых дискретных случайных величин?
6. Как определить распределение разности двух независимых случайных величин?
7. Приведите пример задачи на вычисление распределения суммы дискретных случайных величин.

#### **Дискретные случайные величины II**

1. Что такое математическое ожидание дискретной случайной величины?
2. Какие основные свойства математического ожидания?
3. Как определяется дисперсия и что она характеризует?
4. Что такое ковариация и корреляция?

5. В чем разница между независимостью и некоррелируемостью?
6. Сформулируйте неравенство Маркова и приведите пример его применения.
7. Что утверждает закон больших чисел и какова суть теоремы Пуассона?

### **Аксиоматика Колмогорова**

1. Что такое вероятностное пространство по Колмогорову?
2. Какие свойства имеет вероятностная мера?
3. Что такое борелевская сигма-алгебра?
4. Как связана мера Лебега с вероятностной мерой?
5. Приведите пример вероятностного пространства с борелевской сигма-алгеброй.
6. Какие аксиомы должны выполняться для вероятностной меры?
7. Почему аксиоматика Колмогорова важна для теории вероятностей?

### **Общее понятие случайной величины, абсолютно непрерывные СВ I**

1. Как определяется случайная величина?
2. Что такое функция распределения и какие у неё свойства?
3. Что означает абсолютная непрерывность случайной величины?
4. Как связана плотность распределения с функцией распределения?
5. Какие классические распределения являются абсолютно непрерывными?
6. Что такое случайный вектор и плотность совместного распределения?
7. Как определяется независимость случайных величин через плотность совместного распределения?

### **Абсолютно непрерывные случайные величины II**

1. Как вычисляется математическое ожидание для абсолютно непрерывной случайной величины?
2. Как определяется дисперсия в абсолютно непрерывном случае?
3. Что такое ковариация и корреляция в контексте абсолютно непрерывных СВ?
4. Как формируется матрица ковариации и какие у неё свойства?
5. Почему матрица ковариации является симметричной и положительно полуопределённой?
6. Как использовать матрицу ковариации для оценки зависимости между компонентами вектора?
7. Приведите пример расчёта матрицы ковариации для двух случайных величин.

### **Характеристические функции и центральная предельная теорема**

1. Что такое характеристическая функция случайной величины?
2. Какие основные свойства характеризующих функций вы знаете?
3. Как доказывается взаимно-однозначное соответствие между характеристической функцией и распределением?
4. В чем суть центральной предельной теоремы (ЦПТ)?
5. Какие условия необходимы для применения ЦПТ?
6. Как используется характеристическая функция при доказательстве ЦПТ?
7. Приведите пример применения центральной предельной теоремы на практике.

### **Описательная статистика**

1. Что такое генеральная совокупность и выборка?
2. Как строится вариационный ряд?
3. Какие характеристики выборки являются основными?
4. Что такое гистограмма и как она строится?
5. Как определяется эмпирическая функция распределения?
6. Что такое выборочная квантиль и как её вычислить?

7. Как формулируется теорема Колмогорова об эмпирической функции?

#### **Точечные оценки и их свойства**

1. Что означает несмещенность оценки?
2. Как оцениваются среднее и среднеквадратическое отклонение выборки?
3. Что такое состоятельность оценки?
4. Как определяется функция правдоподобия?
5. В чем суть метода максимального правдоподобия?
6. Как работает метод моментов для оценки параметров?
7. Что утверждает неравенство Крамера-Рао и как оно связано с эффективностью оценки?

#### **Интервальные оценки и их свойства**

1. Что такое доверительная вероятность?
2. Как определяется доверительный интервал?
3. Какие методы построения доверительных интервалов вы знаете?
4. Как используется распределение Стьюдента в построении интервалов?
5. Чем отличается доверительный интервал для среднего от интервала для дисперсии?
6. Как влияет уровень доверия на ширину интервала?
7. Приведите пример построения доверительного интервала для среднего значения.

#### **Проверка гипотез**

1. Что такое статистическая гипотеза и альтернатива?
2. Какие ошибки первого и второго рода существуют?
3. Что такое критическое множество?
4. Как определяется мощность критерия?
5. В чем суть леммы Неймана-Пирсона?
6. Как применяется критерий хи-квадрат для проверки гипотез?
7. Приведите пример задачи на проверку гипотез с использованием критерия хи-квадрат.

#### **Линейная регрессия и гауссовские вектора**

1. Как формулируется задача линейной регрессии в вероятностной постановке?
2. Что утверждает теорема Гаусса-Маркова?
3. Как проводится статистическое оценивание параметров линейной регрессии?
4. Какие методы проверки значимости параметров регрессии существуют?
5. Как оценивается значимость всей модели линейной регрессии?
6. Что такое гауссовский случайный вектор?
7. Каковы основные свойства гауссовских векторов?

#### **Условное математическое ожидание. Value at Risk**

1. Как определяется условное математическое ожидание?
2. Какие основные свойства условного математического ожидания?
3. Как применяется неравенство Йенсена к условному математическому ожиданию?
4. Как связаны условное математическое ожидание и линейная регрессия для гауссовских векторов?
5. Что такое Value at Risk (VaR) и каков его экономический смысл?
6. Какие методы расчёта VaR существуют (параметрический, исторический, Монте-Карло)?
7. Почему важен бэктестинг оценок VaR и какие тесты применяются для проверки адекватности?

## Примерные домашние задания

### Домашнее задание

#### Домашнее задание по теме «Точечные и интервальные оценки»

##### 1. ВАРИАНТ 1

ЗАДАЧА 1	<b>2,5 балла</b> Имеются две независимые выборки: $X_i \sim N(a, 1)$ и $Y_i \sim U[-b, b]$ . По ним построена выборка $Z_i = X_i + Y_i$ . Найди по ней оценку параметра $\theta = (a, b)$ методом моментов.
ЗАДАЧА 2	<b>2,5 балла</b> Для выборки с распределением $P_\theta(X_1 = 5) = \frac{1}{\theta}, \quad P_\theta(X_1 = 2) = \frac{\theta - 1}{\theta}, \quad \theta \in \Theta = (1, +\infty)$ найди оценку параметра $\theta$ методом максимального правдоподобия.
ЗАДАЧА 3	<b>2,5 балла</b> Для выборки с распределением $U[\theta, \theta + 6]$ построй доверительный интервал с помощью статистики $\bar{X}$ .
ЗАДАЧА 4	<b>2,5 балла</b> Для выборки из распределения с плотностью $p_\theta(x) = \frac{4x^3}{16\theta^4} I\{x \in [0, 2\theta]\}$ построй <b>точный</b> доверительный интервал уровня доверия $\gamma = 0,9$ для параметра $\theta$ с помощью статистики $X_{(n)}$ .

##### 2. ВАРИАНТ 2

ЗАДАЧА 1	<b>2,5 балла</b> Имеются две независимые выборки: $X_i \sim \text{Exp}(1/a)$ и $Y_i \sim N(0, b)$ . По ним построена выборка $Z_i = X_i + Y_i$ . Найди по ней оценку параметра $\theta = (a, b)$ методом моментов.
ЗАДАЧА 2	<b>2,5 балла</b> Для выборки с распределением $P_\theta(X_1 = 3) = \frac{1}{\theta}, \quad P_\theta(X_1 = 7) = \frac{\theta - 1}{\theta}, \quad \theta \in \Theta = (1, +\infty)$ найди оценку параметра $\theta$ методом максимального правдоподобия.
ЗАДАЧА 3	<b>2,5 балла</b> Для выборки с распределением $U[-\theta, \theta]$ построй доверительный интервал с помощью статистики $\bar{X}$ .
ЗАДАЧА 4	<b>2,5 балла</b> Для выборки из распределения с плотностью $p_\theta(x) = \frac{3x^2}{27\theta^3} I\{x \in [0, 3\theta]\}$ построй <b>точный</b> доверительный интервал уровня доверия $\gamma = 0,95$ для параметра $\theta$ с помощью статистики $X_{(n)}$ .

## Домашнее задание

### Домашнее задание по теме «Абсолютно непрерывные случайные величины I»

#### 1. ВАРИАНТ 1

ЗАДАЧА 1

2,5 балла

Пусть плотность случайной величины имеет следующий вид:

$$g(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in [1, 3]; \\ 0, & x \notin [1, 3]. \end{cases}$$

Найти  $c$ ,  $P(1,5 \leq \xi \leq 2,5)$ ,  $F(x)$ .

ЗАДАЧА 2

2,5 балла

Пусть плотность случайного вектора  $(\xi, \eta)$  имеет следующий вид:

$$g(x, y) = \begin{cases} c(x + y^2), & x \in [1, 2], y \in [1, 2]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Проверить, являются ли случайные величины независимыми, и найти  $F_\xi(x)$ ,  $F_\eta(y)$  — функции распределения каждой из случайных величин, в него входящих.

ЗАДАЧА 3

2,5 балла

Пусть  $\xi$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[-2, 0]$ . Найти плотность случайной величины  $\eta = \xi^2 - 1$ .

ЗАДАЧА 4

2,5 балла

Пусть  $\xi, \eta$  — независимые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение с параметрами  $\lambda > \mu$ . Найти распределение случайной величины  $\zeta = \xi + \eta$ .

#### 2. ВАРИАНТ 2

ЗАДАЧА 1

2,5 балла

Пусть плотность случайной величины имеет следующий вид:

$$g(x) = \begin{cases} cx^3, & x \in [-2, 0]; \\ 0, & x \notin [-2, 0]. \end{cases}$$

Найти  $c$ ,  $P(-1,5 \leq \xi < -0,5)$ ,  $F(x)$ .

ЗАДАЧА 2

2,5 балла

Пусть плотность случайного вектора  $(\xi, \eta)$  имеет следующий вид:

$$g(x, y) = \begin{cases} cx^2y^2, & x \in [1, 2], y \in [1, 2]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Проверить, являются ли случайные величины независимыми, и найти  $F_\xi(x)$ ,  $F_\eta(y)$  — функции распределения каждой из случайных величин, в него входящих.

ЗАДАЧА 3

2,5 балла

Пусть  $\xi$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ . Найти плотность случайной величины  $\eta = \ln \xi$ .

ЗАДАЧА 4

2,5 балла

Пусть  $\xi, \eta$  — независимые одинаково распределённые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ . Найти распределение случайной величины  $\zeta = \xi - \eta$ .

## Домашнее задание

### Домашнее задание по теме «Дискретные случайные величины I»

#### 1. ВАРИАНТ 1

ЗАДАЧА 1

2,5 балла

Пусть случайная величина принимает значения 1, 2, 3, 4 с одинаковой вероятностью. Найти  $P(\xi \geq 2)$ ,  $P(\xi < 3)$ .

ЗАДАЧА 2

2,5 балла

Пусть вектор  $(\xi, \eta)$  имеет следующее распределение:

$\xi/\eta$	-1	0	1	2
0	$c/8$	$c/16$	$3c/16$	$c/8$
1	$c/4$	$c/8$	$3c/8$	$c/4$
2	$c/3$	$c/6$	$c/2$	$c/3$

Найти распределение  $c$ , проверить независимость  $\xi$  и  $\eta$ .

ЗАДАЧА 3

2,5 балла

Пусть  $\xi, \eta$  — независимые одинаково распределённые случайные величины, имеющие геометрическое распределение с параметром  $p$ . Найти распределение случайной величины  $\zeta = \xi - \eta$ .

ЗАДАЧА 4

2,5 балла

Кубик бросается 2 раза. Обозначим через  $X$  — минимальное выпавшее значение, а  $Y$  — максимальное выпавшее значение. Найти совместное распределение  $(X, Y)$ .

## Примерные задания по контрольной работе

### Контрольная работа №1

#### Вариант 3

ЗАДАЧА 1

2 балла

В первой урне 2 чёрных и 5 белых шаров, во второй — 3 белых и 1 чёрный шар. Из первой урны переложили во вторую 2 шара. Найти вероятность того, что при вытягивании 2 шаров из второй урны ровно один окажется белым.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим 3 гипотезы:

- $A_0$  — переложили 2 черных шара,  $P(A_0) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$ ;
- $A_1$  — переложили 1 черный шар и 1 белый шар,  $P(A_1) = \frac{C_2^1 C_5^1}{C_7^2} = \frac{10}{21}$ ;
- $A_2$  — переложили 2 белых шара,  $P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_7^2} = \frac{10}{21}$ .

За данную часть решения ставится 0,5 балла. Если эта часть неверна, то далее проверка не осуществляется. Рассмотрим вероятности нашего события при гипотезах:

- $P(C|A_0) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2} = \frac{3}{5}$ ;
- $P(C|A_1) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{8}{15}$ ;
- $P(C|A_2) = \frac{C_3^2 C_4^0}{C_7^2} = \frac{1}{3}$ .

За данную часть решения ставится 0,5 балла. Тогда

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_0)P(C|A_0) + P(A_1)P(C|A_1) + P(A_2)P(C|A_2) \\ &= \frac{1}{21} \cdot \frac{3}{5} + \frac{10}{21} \cdot \frac{8}{15} + \frac{10}{21} \cdot \frac{1}{3} = \frac{139}{315}. \end{aligned}$$

За данную часть решения ставится 1 балл. При наличии арифметических ошибок, не влияющих на ход решения, за каждую из них снижается 0,1 балла.

ЗАДАЧА 2

2 балла

Электрическая цепь составлена по схеме, приведённой на рисунке.



Событие  $A_i$  состоит в том, что вышел из строя участок  $a_i$ . Записать выражение для события  $C$ , заключающегося в том, что цепь работает, и посчитать  $P(C)$ , если события  $(A_i)_{i=1,\dots,5}$  независимы в совокупности и  $P(A_i) = \frac{1}{2}$ .

РЕШЕНИЕ

Для того чтобы цепь работала необходимо чтобы работали  $a_1$  участок и один из  $a_3, a_4$  или одновременно  $a_4$  и  $a_5$ . Таким образом, событие  $C$  записывается в следующем виде:

$$C = \bar{A}_1(\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 \cup \bar{A}_4 \bar{A}_5)$$

За данную часть решения ставится 1 балл. Если найдено событие, что цепь разомкнута, то это 0,3 балла.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\bar{A}_1) \cdot \left( P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5) - P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) \right. \\ &\quad \left. - P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5) - P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5) + P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) = \frac{13}{16} \end{aligned}$$

За данную часть решения ставится 1 балл. При наличии арифметических ошибок, не влияющих на ход решения, за каждую из них снижается 0,1 балла.

ЗАДАЧА 3

2 балла

Пусть плотность случайного вектора имеет следующий вид:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} c(x + y), & x \in [0, 1], y \in [0, 1]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти  $c$  и проверить независимость компонент случайного вектора.

РЕШЕНИЕ

В силу нормировки

$$c \int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy = c = 1; c = 1.$$

За данную часть решения ставится 1 балл.

Так как совместная плотность распределения  $x + y$  не может быть представлена в виде произведения функций  $f(x)$  и  $g(y)$  при  $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$ , то случайные величины не являются независимыми. За данную часть решения также ставится 1 балл.

ЗАДАЧА 4

2 балла

Случайная величина  $\xi$  принимает значения  $-1, 0, +1$  с вероятностями  $1/3, 1/2, 1/6$  соответственно. Пусть  $\eta = \xi^2$ . Найти:

1.  $E\eta$ ;
2.  $\text{Var}\eta$ ;
3.  $\text{Var}\xi$ ;
4.  $\text{cov}(\eta, \xi)$ .

РЕШЕНИЕ

$$E\eta = 1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

За данную часть решения ставится 0,5 балла.

$$E\eta^2 = 1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\text{Var}\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

За данную часть решения ставится 0,5 балла.

$$E\xi^2 = E\eta = \frac{1}{2},$$

$$E\xi = -1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{6} = -\frac{1}{3},$$

$$\text{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18}.$$

За данную часть решения ставится 0,5 балла.

$$E\eta\xi = -1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{6} = -\frac{1}{3},$$

$$E\xi = -1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{6} = -\frac{1}{3},$$

$$\text{cov}(\eta, \xi) = E\eta\xi - E\eta E\xi = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

За данную часть решения ставится 0,5 балла.

ЗАДАЧА 5

2 балла

Пусть в книге из 500 страниц содержится 100 опечаток. Используя приближение Пуассона, оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице будет не менее 3 опечаток, а также того, что не будет ни одной опечатки.

### Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Какой из следующих методов используется для проверки гипотез? а) Регрессия б) ANOVA в) Корреляция г) Все вышеперечисленные	d	ОПК-1
2.	Что такое закон больших чисел? а) Сумма случайных величин стремится к нулю б) Среднее значение выборки стремится к математическому ожиданию в) Дисперсия выборки стремится к нулю г) Все вышеперечисленные	b	ОПК-1
3.	Как называется функция, которая описывает вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение в заданном интервале?	Функция плотности вероятности	ОПК-1
4.	Какой термин используется для описания среднего значения случайной величины?	Математическое ожидание	ОПК-1

5.	Что измеряет дисперсия случайной величины?	Разброс	ОПК-1
6.	Как называется распределение, которое описывает время между событиями в процессе, где события происходят с постоянной средней скоростью?	Экспоненциальное распределение	ОПК-1
7.	Как называется мера, которая показывает, насколько две случайные величины изменяются вместе?	Ковариация	ПК-1
8.	Какой метод статистического анализа используется для проверки предположений о параметрах распределения?	Статистический тест	ПК-1
9.	Как называется процесс, в котором данные визуализируются для облегчения их анализа и интерпретации?	Графическое представление	ПК-1
10.	Какой термин используется для описания функции, которая дает вероятность того, что случайная величина примет значение меньше или равно заданному?	Функция распределения	ПК-1
11.	Как называется метод, который используется для оценки зависимости одной переменной от другой?	Регрессионный анализ	ПК-1
12.	Какой термин описывает случайные величины, которые имеют нормальное распределение?	Гауссовские	ПК-1