
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Линейная алгебра и геометрия (пилот). Часть 2»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Программа двух дипломов НИУ
ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2025

**Москва
2025**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	7
5. Учебно-методическое обеспечение	9
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия (пилот). Часть 2» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) дает развитие аналитического мышления, навыков работы с математическими моделями и понимания пространственных структур, что является основой для дальнейшего изучения более сложных математических и компьютерных дисциплин.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе во 2 семестре. Доступна для изучения после успешного освоения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия (пилот). Часть 1».

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия» имеет два уровня подготовки: основной и пилотный поток. Обучающиеся распределяются на соответствующие уровни по итогам входного тестирования по дисциплине (модулю).

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

- освоение фундаментальных понятий и геометрических интерпретаций линейной алгебры;
- применение алгоритмов и методов для решения вычислительных задач;
- интеграция теории с доказательствами и прикладными моделями.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основные структуры геометрических пространств: евклидовы, эрмитовы, аффинные и проективные — их аксиоматику, инварианты (длина, угол, ориентация, объём) и классификацию;

— ключевые теоремы: спектральную теорему для самосопряжённых и нормальных операторов, теорему о жордановой нормальной форме, теорему Эккарта–Янга, теорему о сингулярных базисах, правило Грама–Шмидта;

— центральные понятия теории операторов: собственные значения и векторы, инвариантные подпространства, минимальный и характеристический многочлены, алгебраическая и геометрическая кратности, лемма о стабилизации;

— основные разложения матриц и операторов: QR, SVD, спектральное разложение, жорданова форма — их условия применимости и геометрический смысл;

— связь абстрактных конструкций с приложениями: метод наименьших квадратов и ортопроекции — в регрессии и аппроксимации; проективные преобразования и однородные координаты — в 3D-графике и компьютерном зрении;

уметь:

— применять ортогонализацию Грама–Шмидта для построения ортонормированных базисов и получать QR-разложение матрицы;

— решать задачи наименьших квадратов с помощью ортогопроекции и матрицы Грама, включая случаи линейной зависимости признаков;

— находить собственные значения и векторы, строить жорданов базис, приводить оператор к жордановой (или диагональной) форме в зависимости от его свойств;

— приводить квадратичные и эрмитовы формы к каноническому виду (главные оси, сигнатура), классифицировать операторы (самосопряжённые, ортогональные, унитарные, нормальные);

— работать с проективными и аффинными координатами: переводить между однородными и неоднородными системами, описывать проективные преобразования, интерпретировать их в контексте 3D-графики (камеры, проекции, трансформации);

владеть:

— геометрической интуицией в многомерных пространствах: интерпретировать операторы как преобразования (растяжения, повороты, отражения), понимать смысл ортогональности, ориентации и объёма в \mathbb{R}^n и \mathbb{C}^n ;

— навыком перехода между представлениями: от абстрактного оператора — к его матрице в разных базисах; от квадратичной формы — к симметрическому оператору и обратно;

— практикой анализа устойчивости и точности: оценивать влияние обусловленности на решение СЛАУ и задач МНК, использовать SVD для низкоранговой аппроксимации и регуляризации;

— культурой строгого доказательства: выводить следствия из определений (например, самосопряжённость \Rightarrow вещественный спектр), доказывать критерии диагонализуемости через инвариантные подпространства;

— языком современной прикладной линейной алгебры: свободно использовать термины ортогопроектор, нормальный оператор, сингулярные числа, фробениусова норма — и понимать их роль в data science, численных методах и компьютерной графике.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности.
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.

	математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
Лекции	Семинары (практические занятия)					
<i>Пилотный поток 2 семестр</i>						
1	Билинейные и квадратичные формы	5	5		20	Домашнее задание
2	Евклидовы пространства	5	5		20	Домашнее задание Контрольная работа
3	Эрмитовы пространства	5	5		22	Домашнее задание Контрольная работа
4	Линейные операторы	5	5		22	Домашнее задание Коллоквиум
5	ЖНФ (жорданова нормальная форма)	5	5		20	Домашнее задание Контрольная работа
6	Проективные пространства	5	5		20	Домашнее задание
	<i>Экзамен</i>			6		
	<i>Итого за 2 семестр:</i>	30	30	6	124	
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</i>	190				
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</i>	5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
<i>Пилотный поток 2 семестр</i>		
1	Билинейные и квадратичные формы	Теорема о двойственности на подпространствах. Матричные характеристики билинейных форм на одном пространстве. Симметричность и кососимметричность. Ограничение билинейной формы. Диагонализуемость симметрических форм. Симметричный Гаусс. Метод Якоби. Билинейные формы над алгебраически замкнутым полем. Билинейные формы над полем вещественных чисел. Сигнатура и ее геометрический смысл. Квадратичные формы. Связь с гессианом. Критерий Сильвестра. Скалярные произведения. Ортогональные и ортонормированные базисы. Задание скалярных произведений в базисах. Ортогональные матрицы.
2	Евклидовы пространства	Евклидовы пространства. Длины и углы. Геометрические теоремы школьной геометрии. Классификация евклидовых пространств. Ортогонализация Грама-Шмидта. QR разложение. Формула Атата для ортопроектора. Метод наименьших квадратов. Матрица Грама и ее свойства. Ориентация вещественного пространства. Ориентированные и не ориентированные объемы.
3	Эрмитовы пространства	Полутора линейные формы над \mathbb{C} . Эрмитовы формы, их сигнатура. Квадратичные формы, поляризация формула. Эрмитовы скалярные произведения. Обзор геометрии эрмитова пространства.

4	Линейные операторы	<p>Линейные операторы. Матрица линейного оператора и правила ее замены. Характеристики линейного оператора. Инвариантные подпространства и ограничение линейного оператора. Собственные значения и векторы, связь со спектром. Лемма о стабилизации. Диагонализуемость оператора. Собственные подпространства. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения и связь между ними. Признак и критерии диагонализуемости линейного оператора. Инвариантные подпространства над \mathbb{R}. Сопряженное линейное отображение. Самосопряжённые (симметрические) операторы. Диагонализуемость самосопряженных операторов в ортонормированном базисе. Приведение квадратичной формы к главным осям. Движения: ортогональные и унитарные операторы. Теорема о каноническом виде движений. Спектральное разложение. Нормальные операторы и их диагонализация. Теорема о сингулярных базисах. SVD для матрицы. Фробениусова норма матрицы и ее свойства. Теорема Эккарта-Янга о низкоранговом приближении.</p>
5	ЖНФ (жорданова нормальная форма)	<p>Разложение пространства с помощью оператора и взаимнопростых многочленов. Геометрический смысл кратности корня характеристического и минимального многочленов. Жорданов базис и жордановой нормальной формы (ЖНФ).</p>
6	Проективные пространства	<p>Проективные пространства и подпространства. Однородные координаты. Аффинные карты и неоднородные координаты. Проективные преобразования. Связь с 3D графикой.</p>

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Татарников, О. В. Линейная алгебра : учебник для вузов / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнеv ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 273 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19275-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/556226>.

2. Шилин, И. А. Линейная алгебра. Задачник : учебное пособие для вузов / И. А. Шилин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 118 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-14382-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/567570>.

3. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 416 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18887-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560611>.

4. Лубягина, Е. Н. Линейная алгебра : учебник для вузов / Е. Н. Лубягина, Е. М. Вечтомов. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 150 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10594-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/565745>.

Дополнительная литература:

1. Бурмиcтpова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмиcтpова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15839-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560017>.

2. Сабитов, И. Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для вузов / И. Х. Сабитов, А. А. Михалев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 258 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08941-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/539950>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и

индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		

Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия (пилот). Часть 2» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, коллоквиумы, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в

обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия (пилот). Часть 2»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия (пилот). Часть 2» в каждом семестре оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
<i>Пилотный поток</i>		
Домашние задания	10%	Набор задач по темам недели
Индивидуальные домашние задания	20%	Индивидуальный набор задач по темам недели
Контрольные работы	20%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	20%	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Экзамен	30%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия (пилот). Часть 2»:

Пилотный поток: « $0,1 \times$ среднее за домашние задания + $0,2 \times$ среднее за индивидуальные домашние задания + $0,2 \times$ среднее за контрольные работы + $0,2 \times$ коллоквиум + $0,3 \times$ экзамен».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные темы к коллоквиуму

Тема «Системы линейных уравнений»

- Совместная и несовместная система
- Определённая и неопределённая система
- Однородная и неоднородная система
- Матрица
- Главная и побочная диагонали
- Элементарные преобразования строк
- Ступенчатый вид матрицы
- Главные и свободные переменные
- Как по ступенчатому виду понять, что система определена?
- Сколько может быть решений у системы линейных уравнений?
- Прямой ход алгоритма Гаусса
- Обратный ход алгоритма Гаусса

Тема «Операции над матрицами»

- Сумма матриц
- Нулевая матрица
- Произведение матрицы на число
- Произведение матриц
- Пример некоммутативности матричного умножения
- Коммутирующие матрицы
- Делители нуля
- Нильпотентные матрицы
- Транспонирование матриц
- Симметричная матрица
- След матрицы
- Блочное умножение матриц
- Умножение на диагональную матрицу
- Транспонирование от произведения матриц
- След от произведения матриц

Тема «Обратные матрицы. Матричные уравнения»

- Единичная матрица
- Обратная матрица
- Матрицы элементарных преобразований *I*, *II*, *III* типов и их обратные
- Подстановка матрицы в многочлен
- Матрицы, коммутирующие с диагональной матрицей с разными числами на диагонали
- Классификация систем линейных уравнений
- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Эквивалентные условия обратимости матрицы
- Подстановка в многочлен матрицы $C^{-1}AC$
- Алгоритм поиска обратной и проверки обратимости
- Алгоритм решения уравнений $AX = B$

- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Только квадратные матрицы обратимы

Тема «LU-разложение»

- LU-разложение

Тема «Векторные пространства»

- Векторное пространство
- Пример векторного пространства отличный от \mathbb{R}^n или матриц
- Подпространство векторного пространства
- Линейная комбинация векторов
- Линейно независимый набор векторов
- Коллинеарные векторы
- Компланарные векторы
- Линейная оболочка системы векторов
- Порождающая система векторов
- Базис
- Размерность векторного пространства
- Координаты вектора в базисе
- Матрица перехода между базисами
- Критерий подпространства
- Достаточное условие линейной зависимости в n -мерном пространстве
- Три эквивалентных условия для базиса в n -мерном пространстве
- Критерий подпространства
- Совпадение размеров базисов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм дополнения линейно независимой системы до базиса

Тема «Определители матриц»

- Определители матрицы 2 на 2 и 3 на 3
- $i j$ -ый минор матрицы
- $i j$ -ое алгебраическое дополнение матрицы
- Невырожденная матрица
- Присоединённая матрица
- Формула разложения определителя по строке
- Изменение определителя при элементарных преобразованиях
- Определитель транспонированной матрицы
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц
- Связь линейной зависимости и определителя
- Линейность определителя по строке
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы (через алгебраические дополнения)
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы
- Определитель Вандермонда

Тема «Фундаментальная система решений»

- Строчный ранг матрицы
- Базисный минор

- Фундаментальная система решений
- Тривиальная оценка на ранг матрицы
- Теорема о базисном миноре
- Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
- Размерность пространства решений однородной системы
- Связь решений однородной и неоднородной системы
- Теорема Кронекера-Капелли
- Размерность ФСР
- Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
- Теорема Кронекера-Капелли

Тема «Сумма и пересечение подпространств»

- Пересечение подпространств
- Пример, когда объединение подпространств — не подпространство
- Сумма подпространств
- Прямая сумма двух подпространств
- Теорема о неполном базисе
- Связь размерности суммы и пересечения подпространств (Формула Грассмана)
- Алгоритм поиска ФСР
- Алгоритм поиска скелетного разложения

Примерные вопросы для семинаров (основной уровень)

2 семестр

Билинейные и квадратичные формы

1. Что такое билинейная форма и как её матрица связана с симметричностью и кососимметричностью?
2. Объясните понятия ортогональных дополнений и невырожденности билинейной формы, и приведите пример невырожденной формы.
3. Докажите теорему о двойственности на подпространствах для билинейных форм.
4. Какие матричные характеристики являются инвариантами билинейной формы (ранг, невырожденность), и почему след не является?
5. Как разложить любую билинейную форму в сумму симметрической и кососимметрической частей?
6. Что происходит с ограничением билинейной формы на подпространство и когда оно невырожденно?
7. Опишите диагонализуемость симметрических форм и метод Якоби для их диагонализации.
8. Классифицируйте симметричные билинейные формы над алгебраически замкнутым полем и над полем вещественных чисел, включая сигнатуру.
9. Свяжите квадратичные формы с билинейными и объясните геометрический смысл сигнатуры.
10. Примените критерий Сильвестра для определения положительной определённости квадратичной формы над \mathbb{R} .

Евклидовы пространства

1. Что такое евклидова норма вектора и неравенство Коши-Буняковского?
2. Как определить угол между векторами в евклидовом пространстве и теорему Пифагора?

3. Опишите процесс ортогонализации Грама-Шмидта и QR-разложение.
4. Что такое проекция и ортопроекция, и приведите формулу БАБА для проектора.
5. Как вычислить расстояние между вектором и подпространством, и угол между ними?
6. Объясните метод наименьших квадратов и его связь с проекциями.
7. Что такое матрица Грама и как она используется для k -мерных объёмов?
8. Как изменяется объём под действием линейного отображения и при смене образующих параллелепипеда?
9. Определите ориентированный n -мерный объём и его связь с определителем.
10. Как классифицировать евклидовы пространства и свести их к школьной геометрии?

Геометрия малых размерностей

1. Как определить угол между двумя прямыми в \mathbb{R}^2 и их параллельность?
2. Опишите проекцию вектора на прямую в \mathbb{R}^3 и формулу для ортопроектора.
3. Решите задачу на нахождение расстояния от точки до плоскости в \mathbb{R}^3 .
4. Как найти угол между вектором и плоскостью в \mathbb{R}^3 ?
5. Приведите пример ортогонализации в \mathbb{R}^2 с помощью Грама-Шмидта.
6. Вычислите объём параллелепипеда, заданного векторами в \mathbb{R}^3 .
7. Как определить, является ли система векторов в \mathbb{R}^2 ортонормированной?
8. Решите геометрическую задачу: найдите проекцию точки на прямую в \mathbb{R}^2 .
9. Опишите вращение в \mathbb{R}^2 как ортогональный оператор и его матрицу.
10. Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями в \mathbb{R}^3 .

Линейные операторы

1. Что такое матрица линейного оператора и как она меняется при смене базиса?
2. Перечислите характеристики линейного оператора: след, определитель, характеристический многочлен и т.д.
3. Объясните критерии обратимости линейного оператора и связь с инвариантными подпространствами.
4. Что такое собственные значения и векторы, и когда оператор диагонализуем?
5. Докажите связь между алгебраической и геометрической кратностями собственных значений.
6. Опишите сопряжённое отображение и самосопряжённые операторы в евклидовом пространстве.
7. Как привести квадратичную форму к главным осям с помощью самосопряжённых операторов?
8. Перечислите семь эквивалентных условий для ортогонального оператора.
9. Опишите теорему о сингулярных базисах (SVD) и её применение к низкоранговому приближению.
10. Как классифицировать ортогональные операторы в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 ?

ЖНФ (жорданова нормальная форма)

1. Что такое утверждение о подстановке оператора во взаимно простые многочлены?

- Объясните теорему о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств.
- Как описать инвариантные подпространства через геометрический смысл кратностей корней?
- Определите жорданов базис и жорданову нормальную форму (ЖНФ).
- Докажите теорему о ЖНФ для нильпотентных операторов и формулу для количества клеток.
- Опишите теорему о ЖНФ для произвольного оператора и разложение Шура.
- Что такое отношение равенства по модулю подпространства и линейная независимость по модулю?
- Приведите алгоритм поиска жорданова базиса "сверху вниз" на примере.
- Как использовать элементарные преобразования цепочек для построения ЖНФ?
- Классифицируйте линейные операторы по их ЖНФ и объясните единственность.

Примерные задания по контрольной работе

1. Реши систему $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Выпиши базис решений (ФСР) соответствующей однородной системы $Ax = 0$;
Найди решения неоднородной системы линейных уравнений $Ax = b$.
Запиши решения неоднородной СЛУ через ФСР, через базис, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Дана матрица $A \in M_3(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Найди LU -разложение для A .
2. Найди разложение A в произведение элементарных матриц.
3. Найди определитель матрицы A .
4. Запиши матрицу линейного оператора поворота на 30 градусов в \mathbb{R}^2 .
5. В пространстве \mathbb{R}^3 заданы векторы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Проверь, что f_1, f_2, f_3 формируют базис в \mathbb{R}^3 .
2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{f_1, f_2, f_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.
3. Найди координаты векторов v_1 и v_2 в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$.
6. Проверь, является ли отображение линейным. $\varphi: \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$, где

$$\varphi(f) = f' + f(2) - fg + (fh)'$$

$$g = 2 + x + x^4, h = x + x^2$$

7. Посчитай определитель матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

Примерные индивидуальные домашние задания (пилотный поток)

Домашнее задание по теме: «Сумма и пересечение подпространств»

1. Для подпространств $U, V \subseteq \mathbb{R}^4$ найди базис их суммы и пересечения, если

$$V = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

2. Проверь, лежит ли подпространство U внутри подпространства W :

$$1. U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} \right);$$

$$2. U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad W = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -3 & -6 & 9 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} y = 0 \right\};$$

$$3. U = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} y = 0 \right\}, \quad W = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} y = 0 \right\}.$$

3. Пусть матрица $A \in M_3(\mathbb{R})$ задана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -4 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

1. Найди LU-разложение для A , в котором L — нижнетреугольная с 1 на диагонали, а U — верхнетреугольная.

2. Найди LU-разложение для A , в котором L — нижнетреугольная, а U — верхнетреугольная с 1 на диагонали.

3. Найди обратные матрицы к L и U из первого пункта.

4. Найди A^{-1} , используя обратные к L и U из первого пункта.

5. Реши систему $Ax = B$, используя LU-разложение, где

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание по теме: «Сингулярное разложение (SVD)»

1. Убедись, что в пространстве \mathbb{R}^2 со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^T y$ оператор, заданный по правилу $\varphi(x) = Ax$, является самосопряжённым, и диагонализируй его в ортонормированном базисе, если

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$$

2. В пространстве \mathbb{R}^2 задан оператор $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ по правилу $\varphi(x) = Ax$. Выясни,

найдётся ли скалярное произведение такое, что оператор φ будет самосопряжён, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Убедись, что в пространстве R^3 со стандартным скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ оператор, заданный по правилу $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, является самосопряжённым, и диагонализируй его в ортонормированном базисе, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) 2 семестр

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Укажите ранг билинейной формы, заданной матрицей 3×3 с тремя ненулевыми собственными значениями.	3	ОПК-1
2	Назовите свойство билинейной формы, если её матрица равна транспонированной матрице.	симметричность	ОПК-1
3	Как называется сумма симметрической и кососимметрической частей билинейной формы?	билинейная форма	ОПК-1
4	Сколько собственных значений у симметрической билинейной формы размерности 4 над C ?	4	ОПК-1
5	Назовите признак квадратичной формы, если её матрица положительно определённа.	положительная определённость	ПК-1
6	Сколько положительных слагаемых в сигнатуре квадратичной формы с индексом положительности 2 и отрицательности 1?	2	ПК-1
7	Как называется метод приведения симметрической матрицы к диагональному виду?	метод Якоби	ОПК-4
8	Укажите число векторов в ортонормированном базисе евклидова пространства размерности 5.	5	ОПК-4
9	Чему равна длина единичного вектора в евклидовом пространстве?	1	ПК-1
10	Как называется неравенство, связывающее скалярное произведение и нормы векторов?	Коши-Буняковского	ПК-1
11	Сколько векторов содержит ортогональная система в R^3 ?	3	ОПК-1
12	Назовите формулу, которая выражает ортопроекцию вектора на подпространство через матрицу оператора.	формула Атата	ОПК-4
13	Как называется процесс построения ортонормированного базиса из линейно независимых векторов?	ортогонализация Грама-Шмидта	ПК-1.3
14	Укажите число измерений пространства, если параллелепипед, построенный на трёх векторах, имеет объём 0.	3	ОПК-1
15	Как называется линейный оператор, заданный матрицей, обратной к данной?	обратный оператор	ОПК-1
16	Сколько собственных значений у диагонализуемого оператора размерности 4 над C ?	4	ПК-1

17	Назовите минимальный многочлен оператора, если его характеристический многочлен равен $(\lambda-2)^3(\lambda+1)$.	$(\lambda-2)^a(\lambda+1)^b$, где $a, b \leq 3$ и $a, b \geq 1$	ПК-1
18	Как называется оператор, равный своему сопряжённому в евклидовом пространстве?	самосопряжённый (симметрический) оператор	ОПК-4
19	Сколько клеток в жордановой нормальной форме нильпотентного оператора размерности 4 с индексом нильпотентности 3?	2	ПК-1
20	Как называется базис, в котором матрица оператора имеет жорданову нормальную форму?	жорданов базис	ПК-1