ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Методы непрерывной оптимизации»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»*

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2025*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2025

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 5
3. **Тематический план** 7
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** 9
6. **Материально-техническое обеспечение** 9
7. **Методические и оценочные материалы** 11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Методы непрерывной оптимизации» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Методы непрерывной оптимизации» позволяет студентам широко применять полученные знания в различных областях, таких как экономика, инженерия и информатика, что позволяет эффективно решать практические задачи. Кроме того, знание этих методов способствует развитию аналитического мышления и навыков решения комплексных проблем.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 2 или 3 курсе в 3 или 5 семестре на выбор, доступна после успешного освоения дисциплин (модулей): «Математический анализ» и «Линейная алгебра и геометрия» либо дисциплины (модуля) «Основы математического анализа и линейной алгебры».

Цель изучения дисциплины (модуля): заключается в освоении студентами основных техник и алгоритмов, позволяющими находить оптимальные решения в различных задачах, связанных с максимизацией или минимизацией функций.

Задачи изучения дисциплины (модуля) направлены на формирование у студентов следующих знаний, умений и навыков:

— формирование умения вычислять обратное распространение ошибки, определять задана ли задача на выпуклом множестве, определять свойства функционала, обобщать градиент выпуклых функций на негладкие функции, строить двойственные задачи, а также строить двойственные задачи через сопряженные функции, аналитически искать минимум функционала с ограничениями;

— формирование знаний о численных методах оптимизации, изучение различных методов численной оптимизации и изучение их сходимости, изучение влияния гиперпараметров на методы;

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основы матрично-векторного дифференцирования;
— свойства выпуклых множеств и выпуклых функций;
— понятие субградиента;
— свойства сопряженных функций;
— основы теории двойственности;
— условия Каруша–Куна–Таккера;
— основные методы численной оптимизации;
— условия сходимости численных методов;
— влияние гиперпараметров на эффективность методов оптимизации.

уметь:

— выполнять матрично-векторное дифференцирование;
— определять выпуклость множества и функционала;

— применять субградиентный аппарат к негладким функциям;
— строить двойственные задачи;
— находить минимум функционала с ограничениями;
— применять численные методы оптимизации;
— проводить вычислительные эксперименты;
— подбирать гиперпараметры численных методов.

владеть:

— навыками анализа задач выпуклой оптимизации;
— навыками построения двойственных моделей;
— навыками применения условий Каруша–Куна–Таккера;
— навыками использования численных методов оптимизации;
— навыками интерпретации результатов решения оптимизационных задач.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
УК-2.	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1.	Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач
		УК-2.2.	Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения
		УК-2.3.	Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области

		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта, включая соблюдение норм информационной безопасности

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары (практические занятия)			
1	Базовые понятия и дифференцирование	2	2		10	Домашние задания
2	Выпуклость, гладкость и условия оптимальности	14	14	2	58	Домашние задания, Контрольная работа
3	Проекционные и геометрические методы	4	4		16	Домашние задания
4	Ограниченная оптимизация и методы множителей	6	6		24	Домашние задания
5	Стохастика и распределенные методы	4	4	2	16	Домашние задания, Контрольная работа
	Экзамен			2		
Итого:		***30***	***30***	***6***	***124***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Базовые понятия и дифференцирование	Базовые понятия и дифференцирование
2	Выпуклость, гладкость и условия оптимальности	Выпуклость, гладкость и условия оптимальности Проекционные и геометрические методы Ограниченная оптимизация и методы множителей Стохастика и распределенные методы Ускорение и оптимальные методы. Сопряженные функции Метод сопряженных градиентов. Двойственность по Лагранжу Метод Ньютона и квазиньютоновские методы. Теорема Каруша-Куна-Таккера Субградиентный метод, адаптивные методы. Классисческие виды оптимизационных задач
3	Проекционные и геометрические методы	Проекция и алгоритм Франк-Вульфа Метод зеркального спуска
4	Ограниченная оптимизация и методы множителей	Метод штрафных функций. ADMM Метод внутренней точки Седловые задачи
5	Стохастика и распределенные методы	Методы редукции дисперсии Распределенная оптимизация

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Токарев, В. В. Методы оптимизации : учебник для вузов / В. В. Токарев. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 440 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04712-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/585737.

2. Сухарев, А. Г. Методы оптимизации : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 367 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3859-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/507818.

3. ончаров, В. А. Методы оптимизации : учебник для вузов / В. А. Гончаров. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 191 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-16112-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/582526.

Дополнительная литература:

1. Сухарев, А. Г. Методы оптимизации : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 367 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3859-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/507818.

2. Терсенов, А. С. Лекции по прикладному функциональному анализу : учебник для вузов / А. С. Терсенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 83 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18812-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/568927.

3. Максимова, О. Д. Основы математического анализа: неравенства и оценки : учебное пособие для вузов / О. Д. Максимова. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 185 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08224-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/541118.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического

обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;
— механическими калькуляторами;
— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		

Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Методы непрерывной оптимизации» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания и контрольные работы, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар – это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы – получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины и продемонстрировать навыки их практического применения.

Бонусные баллы — это оценки, которые студенты могут получить за выполнение дополнительных заданий.

Формат бонусных баллов позволяет студентам улучшить общую оценку по дисциплине (модулю) и стимулирует углубленное изучение материал

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Методы непрерывной оптимизации»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***экзамена***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Методы непрерывной оптимизации» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
Домашнее задание	20%	Набор задач по темам недели
Контрольная работа	40%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Экзамен	40%	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по дисциплине (модулю)

В рамках изучения дисциплины (модуля) возможно получение бонусных баллов.

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Методы непрерывной оптимизации»: «0,2 × среднее за домашние задания + 0,4 × среднее за контрольные работы + 0,4 × экзамен».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1.

Классы множеств

ЗАДАЧА 1 — **2 балла**

Проверь, выпукло ли множество

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \colon x_1 \leqslant 2x_2 \leqslant \cdots \leqslant dx_d \right\}.$$

ЗАДАЧА 2 — **2 балла**

Проверь, выпукло ли множество

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 1 \right\}.$$

ЗАДАЧА 3 — **2 балла**

Проверь, выпукло ли множество

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 \leqslant x_2 \leqslant x_1 + 4 \right\}.$$

ЗАДАЧА 4 — **2 балла**

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^d$ и $\|\cdot\|$ — произвольная норма на $\mathbb{R}^d$. Для $a \geqslant 0$ зададим множество

$$S_a = \{ x \colon \operatorname{dist}(x, S) \leqslant a \}, \text{ где } \operatorname{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} \|x - y\|.$$

Множество S_a называется **расширенным на a относительно S**. Докажи, что если S выпукло, то S_a также выпукло.

ЗАДАЧА 5 — **2 балла**

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^d$ и $\|\cdot\|$ — произвольная норма на $\mathbb{R}^d$. Для $a \geqslant 0$ зададим множество

$$S_{-a} = \{ x \colon B(x, a) \subset S \},$$

где $B(x, a)$ — открытый шар. Множество S_{-a} называется **суженным на a относительно S**. Докажи, что если S выпукло, то S_{-a} также выпукло.

ЗАДАЧА 6 — **2 балла**

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^d$ и $x^0 \in X$. Докажи, что множество

$$K(X, x^0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \colon y^\top x^0 \geqslant y^\top x \, \forall x \in X \right\}$$

является выпуклым конусом.

Домашнее задание 2.

Субдифференциал и субградиент

ЗАДАЧА 1 — **2,5 балла**

Найди субдифференциал функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \max\left\{-x, x, x^2\right\}.$$

ЗАДАЧА 2 — **2,5 балла**

Найди субдифференциал функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = |x - 2| + |x + 2| + |x - 1| + x^2.$$

ЗАДАЧА 3 — **2,5 балла**

Найди субдифференциал функции $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \log\left(1 + e^{\|x\|_1}\right).$$

ЗАДАЧА 4 — **2,5 балла**

Найди субдифференциал функции $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \left(\max\left(0, \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c\right)\right)^3.$$

Здесь $A \in \mathbb{S}^d_{++}$, $b \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧА 5 — **2,5 балла**

Найди субдифференциал функции $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{d} \max(0, x_i)\right)^2.$$

Домашнее задание 3.

Оптимизация для всех! Задачи на дом. Неделя 4

ЗАДАЧА 1 — **2 балла**

Докажите, что эта функция выпукла:

$$f(x,y,z) = z\log\left(e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}}\right) + (z-2)^2 + e^{\frac{1}{x+y}}$$

где функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ имеет область определения, определённую как:

$$\text{dom } f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y > 0, z > 0\}.$$

ЗАДАЧА 2 — **1 балл**

Центр масс тела является важным понятием в физике (механике). Для системы материальных точек с массами m_i и координатами x_i, центр масс определяется как:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{\sum_{i=1}^k m_i}$$

Центр масс тела не всегда лежит внутри тела. Например, центр масс бублика находится в его отверстии. Докажи, что центр масс системы материальных точек лежит в выпуклой оболочке множества этих точек.

ЗАДАЧА 3 — **1 балл**

Докажи, что $\mathbf{conv}\{xx^\top : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\} = \{A \in \mathbb{S}^n_+ : \text{tr}(A) = 1\}$.

ЗАДАЧА 4 — **1 балл**

Докажи, что множество $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x_1} \leqslant x_2\}$ является выпуклым.

ЗАДАЧА 5 — **1 балл**

Рассмотрим функцию $f(x) = x^d$, где $x \in \mathbb{R}_+$. Заполни следующую таблицу + или -. Объясни свои ответы (с доказательствами).

d	Выпуклая	Вогнутая	Строго выпуклая	μ-сильно выпуклая
$-2, x \in \mathbb{R}_{++}$				
$-1, x \in \mathbb{R}_{++}$				
0				
0.5				
1				
$\in (1;2)$				
2				
> 2				

Докажи, что функция энтропии, определённая как

$$f(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log(x_i),$$

с $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n_{++} : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, является строго вогнутой.

ЗАДАЧА 7 — **2 балла**

Докажи, что максимум выпуклой функции f над многогранником $P = \text{conv}\{v_1, \ldots, v_k\}$ достигается в одной из его вершин, т. е.

$$\sup_{x \in P} f(x) = \max_{i=1,\ldots,k} f(v_i).$$

Более сильное утверждение: максимум выпуклой функции над замкнутым ограниченным выпуклым множеством достигается в крайней точке, т. е. точке в множестве, которая не является выпуклой комбинацией любой другой точки в множестве (тебе не нужно его доказывать). *Подсказка:* Предположи, что утверждение неверно, и используй неравенство Йенсена.

ЗАДАЧА 8 — **1 балл**

Докажи, что два определения μ-сильно выпуклых функций эквивалентны:

1. $f(x)$ является μ-сильно выпуклой $\iff$ для любых $x_1, x_2 \in S$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ для некоторого $\mu > 0$:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2$$
2. $f(x)$ является μ-сильно выпуклой $\iff$ существует $\mu > 0$ такое, что функция $f(x) - \frac{\mu}{2}\|x\|^2$ является выпуклой.

Примерные задания для контрольной работы
Контрольная работа

Задание 1: Метод сопряженных градиентов

1. Опишите алгоритм метода сопряженных градиентов. В чем его преимущества по сравнению с методом градиентного спуска?
2. Каковы условия сходимости метода сопряженных градиентов?
3. Приведите пример задачи, где метод сопряженных градиентов будет эффективен.

4. Рассчитайте несколько шагов метода сопряженных градиентов для функции $f(x)=x^2+2y^2$ с начальной точкой $(x_0, y_0)=(1,1)$.
5. В чем разница между полным и неполным методом сопряженных градиентов?

Задание 2: Метод Ньютона и квазиньютоновские методы

6. Объясните, как работает метод Ньютона. Какова его сходимость?
7. Какие проблемы могут возникнуть при использовании метода Ньютона?
8. Опишите, как работают квазиньютоновские методы, и приведите пример одного из них.
9. Рассчитайте шаги метода Ньютона для функции $f(x)=x^2-4x+4$.
10. Как можно улучшить производительность метода Ньютона?

Задание 3: Субградиентный метод и адаптивные методы

1. Определите, что такое субградиентный метод и в каких случаях он применяется.
2. Объясните, как работает адаптивный метод градиентного спуска.
3. Приведите пример функции, для которой субградиентный метод будет полезен.
4. Каковы основные преимущества и недостатки субградиентного метода?
5. Рассчитайте обновление параметров с использованием субградиентного метода для функции $f(x)=|x|$.

Задание 4: Проекция и алгоритм Франк-Вульфа

6. Опишите, что такое проекция на выпуклую оболочку и как она используется в оптимизации.
7. Как работает алгоритм Франк-Вульфа? Приведите его шаги.
8. В каких случаях алгоритм Франк-Вульфа может быть предпочтительнее других методов?
9. Приведите пример задачи, где алгоритм Франк-Вульфа может быть успешно применен.
10. Какова сложность алгоритма Франк-Вульфа в зависимости от размерности задачи?

Задание 5: Метод зеркального спуска

1. Объясните, как работает метод зеркального спуска и в каких случаях он применяется.
2. Какие преимущества дает метод зеркального спуска по сравнению с обычными методами градиентного спуска?
3. Приведите пример задачи, где метод зеркального спуска будет эффективен.
4. Какова сложность метода зеркального спуска?
5. Рассчитайте шаги метода зеркального спуска для функции $f(x)=05(x-3)^2$ с начальной точкой $x0=0$.

Задание 6: Метод штрафных функций и ADMM

6. Что такое метод штрафных функций и как он работает?
7. Объясните, как работает метод ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers).
8. В каких случаях метод ADMM может быть предпочтительнее других методов?
9. Приведите пример задачи, где применение метода штрафных функций будет уместным.
10. Каковы основные преимущества и недостатки методов штрафных функций и ADMM?

Задание 7: Метод внутренней точки

1. Опишите, как работает метод внутренней точки и в каких случаях он применяется.
2. Какова сложность метода внутренней точки для линейных программ?
3. Приведите пример задачи, где метод внутренней точки будет эффективен.
4. Какие проблемы могут возникнуть при использовании метода внутренней точки?
5. Рассчитайте шаги метода внутренней точки для простой задачи оптимизации.

Задание 8: Седловые задачи

6. Определите, что такое седловая задача и приведите пример.
7. Каковы условия оптимальности для седловых задач?

8. Объясните, как можно решить седловую задачу с помощью метода градиентного спуска.
9. Приведите пример применения седловых задач в экономике или теории игр.
10. Каковы основные трудности, возникающие при решении седловых задач?

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Какова основная идея метода Ньютона для нахождения экстремумов функции? a) Использование только первого производного b) Использование первого и второго производных c) Использование только второго производного d) Использование численных методов	b	УК-1
2.	Какой из следующих методов является квазиньютоновским? a) Метод градиентного спуска b) Метод Бройдена-Флетчера-Голдфарба-Шанно (BFGS) c) Метод Ньютона d) Метод субградиентов	b	УК-1
3.	В каких случаях целесообразно использовать субградиентный метод? a) Для гладких функций b) Для невыпуклых функций c) Для выпуклых, но не гладких функций d) Для всех типов функций	c	УК-1
4.	Какова основная цель метода зеркального спуска? a) Минимизация функции без ограничений b) Поиск оптимального решения в выпуклой оболочке c) Преобразование задачи оптимизации в задачу с ограничениями d) Устранение необходимости вычисления градиента	b	УК-1
5.	Какой из следующих подходов является основным в методе внутренней точки? a) Поиск экстремума на границе области допустимых решений b) Постепенное приближение к границе области допустимых решений c) Использование штрафных функций для обработки ограничений d) Применение метода Лагранжа для нахождения оптимума	b	УК-2
6.	Какой метод оптимизации основан на использовании производных для нахождения локальных минимумов и максимумов?	Метод Ньютона	УК-2
7.	Как называется метод, который используется для уменьшения дисперсии в стохастических методах оптимизации?	Редукция дисперсии	УК-2
8.	Какой алгоритм оптимизации использует случайные градиенты для обновления параметров модели?	SGD/ Стохастический градиентный спуск	УК-2

9.	Какой метод используется для нахождения локального минимума в ограниченных областях с использованием проекций?	Алгоритм Франк-Вульфа	ОПК-1
10.	Как называется подход, который сочетает в себе стохастическую оптимизацию и методы ускорения для повышения эффективности?	Ускорение	ОПК-1
11.	Какой класс методов оптимизации использует вторые производные для улучшения сходимости?	Квазиньютоновские методы	ОПК-1
12.	Какой термин используется для описания уменьшения вариации оценок в процессе оптимизации?	Дисперсия	ОПК-1
13.	Какой метод используется для нахождения оптимального решения в задачах с ограничениями, основанный на градиентных методах?	Проекция	ПК-1