ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Стохастические дифференциальные уравнения»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2025*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2025

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 5
3. **Тематический план** 7
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** 9
6. **Материально-техническое обеспечение** 9
7. **Методические и оценочные материалы** 11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Стохастические дифференциальные уравнения» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Стохастические дифференциальные уравнения» обеспечивает глубокое понимание стохастических процессов, которые лежат в основе современных математических моделей, используемых для анализа неопределённости и случайности в сложных системах. Эта дисциплина способствует развитию навыков компьютерного моделирования и симуляции случайных явлений, что критично для применения в областях, таких как финансовый анализ, машинное обучение, оптимизация алгоритмов и обеспечение информационной безопасности, где точные предсказания и управление рисками невозможны без учёта стохастических факторов.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор.

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у студентов фундаментальных знаний о математических моделях стохастических процессов, включая методы анализа и решения стохастических дифференциальных уравнений, для применения в задачах компьютерного моделирования.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— ознакомить студентов с основными понятиями и методами стохастического анализа, включая стохастические дифференциальные уравнения и их свойства;

— развить умения формулировать и решать задачи моделирования случайных процессов в различных прикладных областях, таких как финансовая математика и машинное обучение;

— обучить применению численных методов и компьютерных технологий для симуляции и анализа стохастических систем;

— сформировать навыки критической оценки и интерпретации результатов стохастического моделирования с учётом особенностей стохастических процессов.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основы теории случайных процессов.
— определение броуновского движения и винеровского процесса.
— понятие стохастического интеграла Ито.
— формулу Ито и её применение.
— основные классы СДУ и методы их решения.;

уметь:

— строить простые стохастические модели.
— применять формулу Ито для преобразования процессов;
— решать линейные СДУ;
— моделировать случайные процессы численно;

— анализировать решения СДУ в финансовых приложениях;

владеть:

— навыками работы с стохастическим исчислением;

— методами численного решения СДУ (на Python/R);

— терминологией теории случайных процессов;

— основами моделирования в финансах (например, геометрическое броуновское движение);

— принципами построения мартингалов.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
УК-2.	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1.	Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач
		УК-2.2.	Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения
		УК-2.3.	Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области
		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические

			задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта, включая соблюдение норм информационной безопасности

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары			
1	Введение в случайные процессы. Броуновское движение	2	4		7	Домашнее задание Подготовка к семинару
2	Винеровский процесс и его свойства	2	4		7	Домашнее задание
3	Стохастический интеграл Ито	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
4	Формула Ито и её применение	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
5	Линейные стохастические дифференциальные уравнения	2	4		7	Домашнее задание Подготовка к семинару
6	Численные методы решения СДУ (схема Эйлера)	2	4		7	Подготовка к семинару
7	Модели с прыжками (процессы Леви)	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
8	Приложения в финансах: модель Блэка-Шоулза	2	4		7	Домашнее задание Контрольная работа
9	Мартингалы и их свойства	2	4		7	Домашнее задание Подготовка к семинару
10	Уравнение Фоккера-Планка	2	4		7	Подготовка к семинару
11	Стохастическая устойчивость	2	4		6	Домашнее задание Контрольная работа
12	Многомерные СДУ	2	4	2	6	Домашнее задание Контрольная работа
13	Цепи Маркова и их связь с СДУ	2	4		6	Домашнее задание Подготовка к семинару
14	Практикум по численному моделированию	4	8		6	Подготовка к семинару
	Зачет с оценкой			4		
	Итого:	***30***	***60***	***6***	***94***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

Электронный документ

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Введение в случайные процессы. Броуновское движение	Определение случайного процесса. Примеры: пуассоновский процесс, броуновское движение. Свойства броуновского движения: независимость приращений, непрерывность траекторий. Моделирование броуновского движения в Python (библиотека numpy). Навык: генерация траекторий, визуализация.
2	Винеровский процесс и его свойства	Формальное определение винеровского процесса. Марковское свойство. Теорема о непрерывности траекторий. Навык: проверка свойств на смоделированных данных.
3	Стохастический интеграл Ито	Определение интеграла Ито для простых процессов. Сравнение с интегралом Стратоновича. Примеры вычисления: $\int_0^t W_s , dW_s$. Навык: численное вычисление стохастических интегралов.
4	Формула Ито и её применение	Формулировка формулы Ито для скалярного случая. Примеры: $d(e^{W_t})$, $d(W_t^2)$. Применение в финансах: геометрическое броуновское движение. Навык: решение задач на преобразование процессов.
5	Линейные стохастические дифференциальные уравнения	Линейные СДУ: $dX_t = a X_t , dt + b X_t , dW_t$. Решение методом интегрирующего множителя. Пример: модель Орнштейна-Уленбека. Навык: аналитическое решение и моделирование.
6	Численные методы решения СДУ (схема Эйлера)	Явная и неявная схемы Эйлера. Сходимость и устойчивость. Практика: реализация на Python для уравнения $dX_t = \mu X_t , dt + \sigma X_t , dW_t$. Навык: написание кода для численного решения.
7	Модели с прыжками (процессы Леви)	Введение в процессы Леви: составные пуассоновские процессы. Модель Мертона (скачки в ценах акций). Навык: моделирование процесса с прыжками.
8	Приложения в финансах: модель Блэка-Шоулза	Вывод уравнения Блэка-Шоулза из СДУ. Формула ценообразования опционов. Навык: расчет цены опциона в Python.
9	Мартингалы и их свойства	Определение мартингала. Примеры: винеровский процесс, стохастический интеграл. Теорема Дуба (о остановке). Навык: проверка мартингального свойства.
10	Уравнение Фоккера-Планка	Связь СДУ и уравнений в частных производных. Решение уравнения Фоккера-Планка для простых случаев. Навык: анализ плотности распределения решения СДУ.
11	Стохастическая устойчивость	Определение устойчивости по Ляпунову для СДУ. Критерии устойчивости. Примеры из физики (стохастические колебания). Навык: оценка устойчивости численными методами.
12	Многомерные СДУ	Системы СДУ: матричная запись. Коррелированные броуновские движения. Пример: модель Хестона. Навык: моделирование двумерных процессов.
13	Цепи Маркова и их связь с СДУ	Определение цепи Маркова: дискретные и непрерывные случаи. Переходные вероятности и матрица переходов. Связь с СДУ: аппроксимация дискретными процессами (пример: бинарные модели). Финансы: кредитные рейтинги (модель Jarrow-Turnbull). Алгоритмы: PageRank, MCMC. Навык: моделирование цепи Маркова в Python (библиотека networkx или numpy).
14	Практикум по численному моделированию	Решение реальных задач: Калибровка модели по данным. Оптимизация параметров. Навык: работа с реальными данными (котировки акций).

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Аверина, Т. А. Алгоритмы статистического моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой : учебное пособие / Т. А. Аверина. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. - 288 с. – ISBN 978-5-9729-2443-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2226612.

2. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 276 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01748-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/536889.

3. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02086-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/537767.

4. Кожевникова, И. А. Стохастическое моделирование процессов : учебник для вузов / И. А. Кожевникова, И. Г. Журбенко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 148 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09989-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/563642.

5. Муратова, Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для вузов / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 524 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19174-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560212.

Дополнительная литература:

1. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1 : Факты, модели: В 2 т.: Сборник научных трудов / Ширяев А.Н. - Москва :МЦНМО, 2016. - 440 с.: ISBN 978-5-4439-2391-5. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/970044.

2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М. : Вильямс, 2009. — 784 с.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;
— механическими калькуляторами;
— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое

Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Стохастические дифференциальные уравнения» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Стохастические дифференциальные уравнения»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным
4	Удовлетворительно	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			набором методов исследования.
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Стохастические дифференциальные уравнения» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	13	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	30%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Аудиторная работа	15%	1	Ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Зачет с оценкой	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время, возможен дополнительный устный экзамен

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Стохастические дифференциальные уравнения»: «0,2 × среднее за домашние задания + 0,3 × среднее за контрольные работы + 0,15 × за аудиторную работу + 0,35 × зачет с оценкой».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)

Примерные вопросы для семинаров

Введение в случайные процессы. Броуновское движение

1. Дайте определение случайного процесса и приведите примеры, включая пуассоновский процесс и броуновское движение.
2. Перечислите основные свойства броуновского движения, такие как независимость приращений и непрерывность траекторий.
3. Объясните, что такое траектория случайного процесса, и как она связана с броуновским движением.
4. Приведите пример моделирования броуновского движения в Python с использованием библиотеки numpy.
5. Как можно визуализировать траектории броуновского движения? Опишите шаги.
6. Что такое пуассоновский процесс и как он отличается от броуновского движения?
7. Рассчитайте математическое ожидание и дисперсию приращения броуновского движения за время t.
8. Объясните, почему броуновское движение является марковским процессом.
9. Как генерировать случайные приращения для моделирования броуновского движения в коде?
10. Приведите практический пример применения броуновского движения в физике или биологии.

Винеровский процесс и его свойства

1. Дайте формальное определение винеровского процесса.
2. Объясните марковское свойство винеровского процесса и приведите пример.
3. Что утверждает теорема о непрерывности траекторий винеровского процесса?
4. Как проверить марковское свойство на смоделированных данных винеровского процесса?
5. Рассчитайте вероятность того, что винеровский процесс достигнет уровня a за время t.
6. Опишите свойства симметрии винеровского процесса относительно времени.
7. Как связаны винеровский процесс и стандартное броуновское движение?
8. Приведите пример численной проверки непрерывности траекторий в Python.
9. Что такое гауссовский процесс и как он связан с винеровским?
10. Объясните, почему винеровский процесс имеет бесконечную вариацию.

Стохастический интеграл Ито

1. Дайте определение стохастического интеграла Ито для простых процессов.
2. Сравните интеграл Ито и интеграл Стратоновича, указав ключевые различия.
3. Приведите пример вычисления интеграла ∫0tWs dWs∫0*tWsdWs*.
4. Объясните, почему традиционный интеграл Римана не подходит для стохастических процессов.
5. Как численно вычислить стохастический интеграл Ито в Python?
6. Рассчитайте значение интеграла ∫012Ws dWs∫012*WsdWs* для простого случая.
7. Что такое квадратичная вариация и как она связана с интегралом Ито?
8. Приведите пример, где интеграл Ито отличается от интеграла Стратоновича.
9. Опишите свойства стохастического интеграла Ито (линейность, изометрия).
10. Как применить интеграл Ито для моделирования случайных возмущений в динамических системах?

Формула Ито и её применение

1. Сформулируйте формулу Ито для скалярного случая.
2. Приведите пример применения формулы Ито к процессу d(eWt)*d*(*eWt*).
3. Рассчитайте дифференциал для d(Wt2)*d*(*Wt*2) с использованием формулы Ито.
4. Объясните применение формулы Ито в геометрическом броуновском движении.
5. Как формула Ито помогает в решении задач преобразования стохастических процессов?
6. Приведите пример из финансов: как формула Ито используется в моделировании цен акций.
7. Рассчитайте d(ln⁡(Xt))*d*(ln(*Xt*)) для геометрического броуновского движения.
8. Что такое диффузионный член в формуле Ито и почему он важен?
9. Примените формулу Ито к процессу d(tWt)*d*(*tWt*).
10. Объясните, как формула Ито связана с цепным правилом для стохастических процессов.

Линейные стохастические дифференциальные уравнения

1. Запишите общее уравнение линейной СДУ вида dXt=aXt dt+bXt dWt*dXt=aXtdt+bXt dWt*.
2. Объясните метод интегрирующего множителя для решения линейных СДУ.
3. Приведите пример решения модели Орнштейна-Уленбека.
4. Как моделировать траектории линейной СДУ в Python?

5. Рассчитайте аналитическое решение для dXt=−aXt dt+b dWt$dXt=-aXtdt+bdWt$.
6. Что такое стационарное распределение для модели Орнштейна-Уленбека?
7. Приведите прикладной пример линейной СДУ в физике (например, стохастические колебания).
8. Как проверить сходимость численного решения линейной СДУ?
9. Объясните роль коэффициентов a и b в поведении решения линейной СДУ.
10. Рассчитайте математическое ожидание и дисперсию решения линейной СДУ.

Численные методы решения СДУ (схема Эйлера)

1. Опишите явную схему Эйлера для решения СДУ.
2. В чём разница между явной и неявной схемами Эйлера?
3. Объясните понятия сходимости и устойчивости для схемы Эйлера.
4. Реализуйте схему Эйлера на Python для уравнения dXt=μXt dt+σXt dWt$dXt=\mu Xt\,dt+\sigma XtdWt$.
5. Как выбрать шаг дискретизации для схемы Эйлера, чтобы обеспечить точность?
6. Рассчитайте ошибку схемы Эйлера для простого случая.
7. Приведите пример, где схема Эйлера неустойчива.
8. Как визуализировать результаты численного решения СДУ?
9. Сравните схему Эйлера с более точными методами, такими как схема Милштейна.
10. Объясните, как схема Эйлера аппроксимирует стохастический интеграл.

Модели с прыжками (процессы Леви)

1. Дайте введение в процессы Леви и приведите примеры.
2. Объясните, что такое составной пуассоновский процесс.
3. Опишите модель Мертона для скачков в ценах акций.
4. Как моделировать процесс Леви с прыжками в Python?
5. Рассчитайте вероятность прыжка в составном пуассоновском процессе.
6. Приведите пример применения процессов Леви в финансах.
7. Чем процессы Леви отличаются от диффузионных процессов?
8. Как оценить параметры модели Мертона по историческим данным?
9. Объясните роль прыжков в моделировании финансовых кризисов.
10. Приведите численный пример генерации траектории с прыжками.

Приложения в финансах: модель Блэка-Шоулза

1. Как вывести уравнение Блэка-Шоулза из СДУ?
2. Сформулируйте формулу ценообразования опционов по Блэку-Шоулзу.
3. Реализуйте расчет цены опциона в Python с использованием модели Блэка-Шоулза.
4. Объясните роль волатильности в формуле Блэка-Шоулза.
5. Рассчитайте цену европейского колл-опциона для заданных параметров.
6. Как модель Блэка-Шоулза связана с геометрическим броуновским движением?
7. Приведите пример калибровки параметров модели по рыночным данным.
8. Объясните допущения модели Блэка-Шоулза.
9. Как расширить модель Блэка-Шоулза для учёта дивидендов?
10. Рассчитайте греки опциона (дельта, гамма) на основе формулы Блэка-Шоулза.

Мартингалы и их свойства

1. Дайте определение мартингала.
2. Приведите примеры мартингалов, включая винеровский процесс и стохастический интеграл.

3. Сформулируйте теорему Дуба о остановке для мартингалов.
4. Как проверить мартингальное свойство на примере смоделированного процесса?
5. Объясните, чем мартингал отличается от субмартингала и супермартингала.
6. Рассчитайте условное математическое ожидание для мартингала.
7. Приведите прикладной пример мартингалов в теории игр.
8. Как мартингалы используются в финансовой математике?
9. Объясните квадратичную вариацию мартингала.
10. Приведите пример, где процесс не является мартингалом.

Уравнение Фоккера-Планка

1. Объясните связь между СДУ и уравнением Фоккера-Планка.
2. Как решить уравнение Фоккера-Планка для простых случаев?
3. Приведите пример анализа плотности распределения решения СДУ.
4. Рассчитайте уравнение Фоккера-Планка для геометрического броуновского движения.
5. Что такое стационарное решение уравнения Фоккера-Планка?
6. Как численно решить уравнение Фоккера-Планка?
7. Объясните роль дрейфа и диффузии в уравнении Фоккера-Планка.
8. Приведите пример из физики, где применяется уравнение Фоккера-Планка.
9. Как уравнение Фоккера-Планка помогает в прогнозировании распределений?
10. Рассчитайте плотность для модели Орнштейна-Уленбека с использованием Фоккера-Планка.

Стохастическая устойчивость

1. Дайте определение стохастической устойчивости по Ляпунову для СДУ.
2. Перечислите критерии стохастической устойчивости.
3. Приведите примеры стохастической устойчивости из физики (стохастические колебания).
4. Как оценить стохастическую устойчивость численными методами?
5. Объясните разницу между детерминированной и стохастической устойчивостью.
6. Рассчитайте критерий устойчивости для линейной СДУ.
7. Приведите пример неустойчивой стохастической системы.
8. Как стохастическая устойчивость связана с теорией вероятностей?
9. Объясните роль шума в стохастической устойчивости.
10. Приведите прикладной пример оценки устойчивости в моделировании.

Многомерные СДУ

1. Запишите систему многомерных СДУ в матричной форме.
2. Объясните, что такое коррелированные броуновские движения.
3. Приведите пример модели Хестона для многомерных СДУ.
4. Как моделировать двумерные стохастические процессы в Python?
5. Рассчитайте ковариационную матрицу для коррелированных броуновских движений.
6. Объясните преимущества многомерных СДУ в моделировании сложных систем.
7. Приведите пример из финансов: многомерные модели волатильности.
8. Как решать системы многомерных СДУ численно?
9. Объясните свойства решений многомерных СДУ.
10. Рассчитайте математическое ожидание для двумерной системы СДУ.

Цепи Маркова и их связь с СДУ

1. Дайте определение цепи Маркова для дискретного и непрерывного случаев.
2. Объясните понятие переходных вероятностей и матрицы переходов.
3. Как связаны цепи Маркова с СДУ через аппроксимацию дискретными процессами?
4. Приведите пример бинарной модели как аппроксимации СДУ.
5. Опишите модель Jarrow-Turnbull для кредитных рейтингов.
6. Как реализовать моделирование цепи Маркова в Python с использованием networkx?
7. Объясните алгоритм PageRank как пример цепи Маркова.
8. Как MCMC (методы Монте-Карло по Маркову) связаны с цепями Маркова?
9. Приведите прикладной пример цепей Маркова в компьютерных науках.
10. Рассчитайте стационарное распределение для простой цепи Маркова.

Практикум по численному моделированию

1. Как калибровать параметры СДУ по реальным данным (например, котировкам акций)?
2. Объясните процесс оптимизации параметров в численном моделировании.
3. Приведите пример работы с реальными данными в Python для СДУ.
4. Как оценить точность численного решения СДУ?
5. Опишите шаги для решения задачи калибровки модели.
6. Рассчитайте параметры геометрического броуновского движения по историческим данным.
7. Как визуализировать сравнение смоделированных и реальных траекторий?
8. Объясните роль кросс-валидации в численном моделировании.
9. Приведите пример оптимизации с использованием метода наименьших квадратов.
10. Как интегрировать данные о рисках в модель СДУ для финансовых приложений?

Примерные задания по контрольной работе

Контрольная работа №1

1. Определите броуновское движение как случайный процесс. Перечислите его ключевые свойства (независимость приращений, непрерывность траекторий, нормальность распределения приращений). Приведите пример генерации траектории в Python с использованием numpy.random.normal.

2. Дайте формальное определение винеровского процесса. Объясните марковское свойство и теорему о непрерывности траекторий. Как проверить марковское свойство на смоделированных данных?

3. Определите стохастический интеграл Ито для простых процессов. Вычислите $\int_0^t W_s\, dW_s$ аналитически и сравните с интегралом Стратоновича. Приведите численное приближение для t=1 с 100 шагами.

4. Сформулируйте формулу Ито для скалярного случая. Примените её к d(eWt) и d(Wt2). Объясните применение в геометрическом броуновском движении для моделирования цен акций.

5. Решите линейную СДУ $dX_t = -3X_t\, dt + 2X_t$ с $X_0 = 1$ методом интегрирующего множителя. Найдите аналитическое решение и математическое ожидание в момент t=1.

6. Опишите явную и неявную схемы Эйлера для СДУ $dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dW_t$. Объясните сходимость и устойчивость. Приведите шаги реализации в Python для $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $X_0 = 1$ на [0,1] с шагом 0.01.

7. Введите понятие процессов Леви и составных пуассоновских процессов. Опишите модель Мертона для цен акций с прыжками. Как смоделировать такую траекторию с интенсивностью $\lambda = 0.2$ и прыжками N(0,0.1)?

8. Сгенерируйте 5 траекторий броуновского движения на [0,1] с шагом 0.01. Объясните, почему среднее квадратичное отклонение растёт как t*t*. Визуализируйте с помощью matplotlib

9. Вычислите ∫0ts dWs∫по формуле Ито. Сравните с численным интегралом по схеме Эйлера (50 шагов). Объясните разницу

Контрольная работа №2

1. Выведите уравнение Блэка-Шоулза из геометрического броуновского движения. Запишите формулу цены европейского колл-опциона. Рассчитайте цену для S=100, K=100, T=1, r=0.05, σ=0.2.

2. Определите мартингал. Докажите, что винеровский процесс является мартингалом. Приведите пример не-мартингала (например, Wt2−). Примените теорему Дуба к остановке в момент достижения уровня.

3. Свяжите СДУ dXt=μ(Xt) dt+σ(Xt) dWt*dXt* с уравнением Фоккера-Планка. Решите его для геометрического броуновского движения и найдите плотность распределения p(x,t) при x>0.

4. Определите стохастическую устойчивость по Ляпунову. Найдите критерии для СДУ dXt=−aXt dt+b dWt*dXt*. Для a=3, b=1 оцените устойчивость и стационарное распределение.

5. Запишите систему многомерных СДУ в матричной форме. Для модели Хестона dSt=μSt dt+vtSt dWt1, dvt=κ(θ−vt) dt+ξvt dWt2 объясните корреляцию броуновских движений.

6. Определите цепь Маркова и матрицу переходов. Свяжите с СДУ через аппроксимацию. Приведите пример модели Jarrow-Turnbull для кредитных рейтингов. Опишите алгоритм MCMC.

7. Опишите калибровку параметров геометрического броуновского движения по реальным котировкам акций методом максимального правдоподобия. Как оптимизировать μ и σ в Python?

8. Рассчитайте дельту и гамму колл-опциона по формуле Блэка-Шоулза для параметров из задания 1. Объясните их экономический смысл.

9. Для модели Орнштейна-Уленбека запишите уравнение Фоккера-Планка и найдите стационарное решение. Как оно связано с нормальным распределением?

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1

1. **Введение в случайные процессы. Броуновское движение**

Сгенерируйте 10 траекторий броуновского движения на интервале [0, 1] с шагом 0.01 с использованием библиотеки numpy в Python. Визуализируйте их на одном графике с помощью matplotlib. Объясните, почему траектории непрерывны, но нигде не дифференцируемы.

2. **Стохастический интеграл Ито**

Вычислите стохастический интеграл ∫01Ws dWs аналитически и сравните с численным приближением по схеме Эйлера (100 шагов). Реализуйте расчет в Python и объясните разницу с интегралом Стратоновича для этого примера.

3. **Линейные стохастические дифференциальные уравнения**

Решите линейную СДУ dXt=−2Xt dt+3Xt с начальным условием X0=1*X*0=1 методом интегрирующего множителя. Найдите аналитическое решение и смоделируйте 50 траекторий на [0, 1] в Python, вычислив математическое ожидание и дисперсию решения в момент t=1.

4. **Модели с прыжками (процессы Леви)**

Реализуйте модель Мертона для цен акций: dSt=μSt dWt+St dNt*dSt*, где Nt — составной пуассоновский процесс с интенсивностью λ=0.1 и прыжками с нормальным распределением (среднее -0.05, дисперсия 0.02). Сгенерируйте траекторию на [0, 1] и объясните влияние прыжков на динамику цены.

5. **Мартингалы и их свойства**

Докажите, что винеровский процесс является мартингалом относительно фильтрации, порожденной им самим. Приведите пример процесса, который не является мартингалом (например, квадратичная вариация), и проверьте это свойство на смоделированных данных в Python (генерация 100 траекторий).

Домашнее задание 2

1. **Винеровский процесс и его свойства**

Проверьте марковское свойство винеровского процесса на смоделированных данных: сгенерируйте траекторию Wt на [0, 2], вычислите условное распределение W2|W1 и подтвердите, что оно нормально с параметрами, зависящими только от W1. Реализуйте в Python и визуализируйте гистограмму.

2. **Формула Ито и её применение**

Примените формулу Ито к процессу dYt=Yt dWt (геометрическое броуновское движение). Найдите дифференциал d(lnYt) и объясните применение в моделировании цен акций. Рассчитайте аналитическое решение для Yt при Y0=100, μ=0.05, σ=0.2 и сравните с численным моделированием.

3. **Численные методы решения СДУ (схема Эйлера)**

Реализуйте явную и неявную схемы Эйлера для СДУ dXt=μXt dt+σXt dWt с параметрами μ=0.1*μ*=0.1, σ=0.3*σ*=0.3, X0=1*X*0=1. Сравните их на интервале [0, 1] с шагом 0.001 по точности и устойчивости. Объясните, когда неявная схема предпочтительнее.

4. **Приложения в финансах: модель Блэка-Шоулза**

Используя формулу Блэка-Шоулза, рассчитайте цену европейского колл-опциона с параметрами: S=100, K=105, T=1, r=0.05, σ=0.2. Реализуйте расчет в Python и объясните влияние каждого параметра на цену. Добавьте расчет дельты опциона.

5. **Уравнение Фоккера-Планка**

Для геометрического броуновского движения dXt=μXt dt+σXt dWt запишите и решите уравнение Фоккера-Планка для плотности распределения p(x,t). Найдите стационарное решение (если существует) и объясните, как оно помогает анализировать долгосрочное поведение процесса.

Домашнее задание 3

1. **Стохастическая устойчивость**

Оцените стохастическую устойчивость по Ляпунову для СДУ dXt=−aXt dt+b dWt (модель Орнштейна-Уленбека). Найдите критерии устойчивости в терминах a и b, смоделируйте 100 траекторий в Python и проанализируйте сходимость к стационарному распределению.

2. **Многомерные СДУ**

Рассмотрите систему многомерных СДУ: dXt=−Xt dt+dWt1, dYt=−Yt dt+0.5dWt2, где W1 и W2 коррелированы с коэффициентом ρ=0.7. Реализуйте моделирование двумерных траекторий на [0, 1] в Python и вычислите ковариационную матрицу в момент t=1.

3. **Цепи Маркова и их связь с СДУ**

Постройте дискретную цепь Маркова как аппроксимацию СДУ $dX_t = -X_t\,dt + dW_t$ с двумя состояниями (бинаризация вокруг 0). Реализуйте моделирование в Python с использованием numpy, вычислите матрицу переходов и стационарное распределение. Свяжите с алгоритмом MCMC.

4. **Практикум по численному моделированию**

Возьмите реальные котировки акций (например, из yfinance для AAPL за последний год). Калибруйте параметры геометрического броуновского движения μ и σ методом максимального правдоподобия. Сравните смоделированные траектории с реальными данными в Python.

5. **Введение в случайные процессы. Броуновское движение**

Расширьте моделирование броуновского движения: сгенерируйте многомерное броуновское движение в 2D-пространстве (независимые компоненты) и визуализируйте 20 траекторий. Объясните свойства независимости приращений и непрерывности в многомерном случае. Добавьте анализ среднего квадратичного отклонения.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Определите броуновское движение как случайный процесс.	Случайный процесс с независимыми приращениями, непрерывными траекториями и нормально распределенными приращениями	УК-1
2	Назовите основное свойство винеровского процесса, связанное с будущим и прошлым.	Марковское свойство	УК-1
3	Назовите схему численного решения СДУ, использующую дискретизацию времени.	Схема Эйлера	УК-2
4	Определите процесс Леви с прыжками.	Составной пуассоновский процесс	ОПК-1
5	Вычислите цену европейского колл-опциона по модели Блэка-Шоулза для S=100, K=100, T=1, r=0.05, σ=0.2.	7.97	ОПК-1
6	Назовите пример мартингала.	Винеровский процесс	ОПК-1
7	Определите критерий стохастической устойчивости по Ляпунову.	Асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном	ПК-1
8	Назовите пример многомерной СДУ с коррелированными броуновскими движениями.	Модель Хестона	ПК-1
9	Определите цепь Маркова.	Случайный процесс без памяти	ПК-2
10	Назовите алгоритм для моделирования цепей Маркова.	MCMC	ПК-2
11	Вычислите математическое ожидание для геометрического броуновского движения dX_t = μ X_t dt + σ X_t dW_t c X_0 = x.	x e^{μ t}	УК-1
12	Назовите метод калибровки параметров СДУ по данным.	Максимальное правдоподобие	УК-1
13	Назовите теорему, связанную с остановкой мартингалов.	Теорема Дуба	УК-2
14	Вычислите стационарное распределение для Орнштейна-Уленбека.	Нормальное распределение с дисперсией $\sigma^2/(2\theta)$	УК-2