ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**
**«Теория стохастического оптимального управления»**

**Направление подготовки:** *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

**Направленность (профиль) подготовки:** *Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»*

**Квалификация (степень) выпускника:** *бакалавр*

**Форма обучения:** *очная*

**Срок освоения программы:** *4 года*

**Год набора:** *2025*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

**Москва**
**2025**

**Содержание**

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** ..... 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** ..... 3
3. **Тематический план** ..... 7
4. **Содержание дисциплины (модуля)** ..... 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** ..... 9
6. **Материально-техническое обеспечение** ..... 9
7. **Методические и оценочные материалы** ..... 11

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория стохастического оптимального управления» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Теория стохастического оптимального управления» обеспечивает глубокое понимание стохастических процессов, которые лежат в основе современных математических моделей, используемых для анализа неопределённости и случайности в сложных системах. Эта дисциплина способствует развитию навыков компьютерного моделирования и симуляции случайных явлений, что критично для применения в областях, таких как финансовый анализ, машинное обучение, оптимизация алгоритмов и обеспечение информационной безопасности, где точные предсказания и управление рисками невозможны без учёта стохастических факторов.

**Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин (модулей): «Математический анализ. Часть 1», «Математический анализ. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» или «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 1», «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2».

**Цель изучения дисциплины (модуля):** формирование у студентов фундаментальных знаний о математических моделях стохастических процессов, включая методы анализа и решения стохастических дифференциальных уравнений, для применения в задачах компьютерного моделирования.

**Задачи изучения дисциплины (модуля)**:

— ознакомить студентов с основными понятиями и методами стохастического анализа, включая Теория стохастического оптимального управления и их свойства;

— развить умения формулировать и решать задачи моделирования случайных процессов в различных прикладных областях, таких как финансовая математика и машинное обучение;

— обучить применению численных методов и компьютерных технологий для симуляции и анализа стохастических систем;

— сформировать навыки критической оценки и интерпретации результатов стохастического моделирования с учётом особенностей стохастических процессов.

**В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:**

***знать:***

— основные принципы оптимального управления в стохастических системах, включая постановки задач с дискретным и непрерывным временем, конечным и бесконечным горизонтом;

— уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB): связь со стохастическими дифференциальными уравнениями и нелинейными уравнениями в частных производных;

— основы динамического программирования: принцип оптимальности Беллмана и его применения для дискретных и непрерывных систем;

— ключевые теоремы: принцип максимума Понтрягина, теоремы о разделении (separation theorem) и принцип определенной эквивалентности (certainty equivalence principle);

— применения в финансах и экономике (управление портфелем, задача Мертона) и современных областях (моделирование в страховании, управления робототехническими;

***уметь:***

— формулировать и решать задачу стохастического оптимального управления для систем, описываемых СДУ, в том числе использовать метод динамического программирования для построения оптимальных стратегий;

— выводить и решать уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB) для простых случаев (LQG-задача, задача управления портфелем);

— применять принцип максимума Понтрягина для получения необходимых условий оптимальности в стохастических системах;

— анализировать устойчивость решений СДУ и применять методы стохастической оптимизации для систем с полной и неполной информацией;

— вычислять чувствительность решений, использовать методы аппроксимации для задач большой размерности (приближенное динамическое программирование);

***владеть:***

— методами динамического программирования и принципа максимума для поиска синтеза оптимального управления в стохастических системах;

— аппаратом стохастического исчисления Ито для анализа управляемых диффузионных процессов;

— навыками работы с линейно-квадратично-гауссовскими задачами (LQG) и их численной реализацией в Python/MATLAB;

— методами анализа сходимости и построения аппроксимаций (например, для задач с большим пространством состояний);

— терминологией и подходами современной теории стохастического управления (including robust control).

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

| Компетенция | Содержание компетенции | Индикатор компетенции | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| УК-1. | Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1. | Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности. |
| | | УК-1.2. | Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем |
| | | УК-1.3. | Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации |
| УК-2. | Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений | УК-2.1. | Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач |
| | | УК-2.2. | Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения |
| | | УК-2.3. | Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями |
| ОПК-1. | Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики | ОПК-1.1. | Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области |
| | | ОПК-1.2. | Умеет анализировать и формулировать математические |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и доступной форме |
| | | ОПК-1.3. | Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи |
| ПК-1. | Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук | ПК-1.1. | Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов. |
| | | ПК-1.2. | Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты. |
| | | ПК-1.3. | Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач |
| ПК-2. | Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности | ПК-2.1. | Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности |
| | | ПК-2.2. | Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности |
| | | ПК-2.3. | Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта, включая соблюдение норм информационной безопасности |

## 3. Тематический план

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Трудоемкость, академические часы | | | | ТКУ (текущий контроль успеваемости) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Очная форма* | | | | |
| | | Аудиторная работа | | Контроль | Самостоятельная работа | |
| | | Лекции | Семинары | | | |
| 1 | Динамическое программирование | 5 | 5 | | 20 | Домашнее задание, аудиторная работа |
| 2 | Непрерывное время и HJB | 5 | 5 | 2 | 20 | Домашнее задание, аудиторная работа Контрольная работа |
| 3 | LQG и принцип максимума | 5 | 5 | | 20 | Домашнее задание, аудиторная работа |
| 4 | Применения в финансах | 5 | 5 | | 20 | Домашнее задание, аудиторная работа |
| 5 | Неполная информация и устойчивость | 6 | 6 | 2 | 20 | Домашнее задание, аудиторная работа |
| 6 | Оптимальная остановка и приближения | 2 | 2 | 2 | 10 | Домашнее задание, аудиторная работа Контрольная работа |
| 7 | Применение стохастического оптимального управления | 2 | 2 | | 10 | Домашнее задание, аудиторная работа |
| | ***Зачет с оценкой*** | | | 4 | | Коллоквиум |
| | ***Итого:*** | ***30*** | ***30*** | ***10*** | ***120*** | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)*** | | ***190*** | | | | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)*** | | ***5*** | | | | |

## 4. Содержание дисциплины (модуля)

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Содержание дисциплины (модуля) по темам |
|---|---|---|
| 1 | Динамическое программирование | Принцип оптимальности Беллмана<br>Дискретные задачи. Уравнение Беллмана |
| 2 | Непрерывное время и HJB | Управляемые СДУ. Формула Ито<br>Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB) |
| 3 | LQG и принцип максимума | Линейно-квадратичный регулятор (LQR).<br>LQG. Уравнение Риккати<br>Стохастический принцип максимума Понтрягина |
| 4 | Применения в финансах | Задача Мертона об оптимальном портфеле |
| 5 | Неполная информация и устойчивость | Теорема о разделении. Фильтр Калмана.<br>Устойчивость стохастических систем |
| 6 | Оптимальная остановка и приближения | Уравнение для задачи остановки. Примеры<br>Approximate Dynamic Programming<br>Робастное управление. H∞-подход. |
| 7 | Применение стохастического оптимального управления | Управление портфелем или роботом<br>Сравнительный анализ методов. Применение в финансах и робототехнике |

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

***Основная литература:***

1. Аверина, Т. А. Алгоритмы статистического моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой : учебное пособие / Т. А. Аверина. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. - 288 с. – ISBN 978-5-9729-2443-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2226612.

2. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 276 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01748-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/536889.

3. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02086-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/537767.

***Дополнительная литература:***

1. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1 : Факты, модели: В 2 т.: Сборник научных трудов / Ширяев А.Н. - Москва :МЦНМО, 2016. - 440 с.: ISBN 978-5-4439-2391-5. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/970044

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;

— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

| № | Наименование портала (издания, курса, документа) | Ссылка |
|---|---|---|
| 1. | Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека | https://elibrary.ru/defaultx.asp |
| 2. | База данных для IT-специалистов | https://habr.com |
| 3. | База данных ScienceDirect | https://www.sciencedirect.com |
| 4. | Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации | https://minobrnauki.gov.ru/ |
| 5. | Федеральный портал «Российское образование" | https://www.edu.ru/ |
| 6. | Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" | http://window.edu.ru/ |
| 7. | Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов | http://school-collection.edu.ru/ |
| 8. | Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов | http://fcior.edu.ru/ |

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

| Наименование ПО | Производство | Лицензионное / свободно распространяемое |
|---|---|---|
| **Операционные системы:** | | |
| Microsoft Imagine (Windows Client, Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Браузеры:** | | |
| Яндекс.Браузер | отечественное | свободно распространяемое |
| Google Chrome | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Офисные приложения:** | | |
| Microsoft Imagine (Visio, OneNote) | зарубежное | лицензионное |
| TeXstudio | зарубежное | свободно распространяемое |
| Adobe Acrobat Reader | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Программное обеспечение для планирования и учета времени:** | | |
| Toggle app | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления проектами:** | | |
| Microsoft Imagine (Project) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы управления базами данных:** | | |
| Microsoft Imagine (SQL Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы резервного копирования (backup):** | | |
| Acronis Backup Advanced for HyperV | зарубежное | лицензионное |

Электронный документ

| | | |
|---|---|---|
| **Справочно-правовые системы:** | | |
| КонсультантПлюс: справочно-правовая система | отечественное | лицензионное |
| **Средства антивирусной защиты:** | | |
| Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition | отечественное | лицензионное |
| **Среды разработки:** | | |
| Visual Studio Code | зарубежное | свободно распространяемое |
| Bash (Unix shell) | зарубежное | свободно распространяемое |
| Anaconda | зарубежное | свободно распространяемое |
| Robotic Operating System | зарубежное | свободно распространяемое |
| CopelliaSim | зарубежное | свободно распространяемое |
| Google Colaboratory | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Пакеты программных средств и библиотек:** | | |
| AutoPsy | зарубежное | свободно распространяемое |
| Interactive Disassembler (IDA) | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления библиографической информацией:** | | |
| Zotero | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Сервисы и службы:** | | |
| Bind | зарубежное | свободно распространяемое |
| Docker | зарубежное | свободно распространяемое |

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Теория стохастического оптимального управления» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, аудиторная работа, домашние задания, контрольная работа, коллоквиум, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Семинар* – это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с

требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Аудиторная работа* – активная работа студента на семинаре или лекции, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в аудиторной работе студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения, аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы – получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Коллоквиум* – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

**Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

**Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Теория стохастического оптимального управления»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

| **Десятибалльная оценка** | **Пятибалльная оценка** | **Оценка за зачет** | **Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)** |
|---|---|---|---|
| 10 | Отлично | Зачтено | Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает |
| 9 | Отлично | Зачтено | |
| 8 | Отлично | Зачтено | |

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| | | | на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами. |
| 7 | Хорошо | Зачтено | Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами. |
| 6 | Хорошо | Зачтено | |
| 5 | Удовлетворительно | Зачтено | Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные |
| 4 | Удовлетворительно | Зачтено | |

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| | | | формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования. |
| 3 | Не сдан | Не зачтено | Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы. |
| 2 | Не сдан | Не зачтено | |
| 1 | Не сдан | Не зачтено | |

Дисциплина (модуль) «Теория стохастического оптимального управления» оценивается следующим образом:

| Активность | Вес | Количество | Описание |
|---|---|---|---|
| Домашние задания | 25% | 10 | Набор задач по темам недели |
| Аудиторная работа | 15% | 15 | Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре или лекции. |
| Контрольная работа | 35% | 2 | Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время |
| Зачет с оценкой | 25% | 1 | Коллоквиум - устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее. |

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Теория стохастического оптимального управления»:** «0,25 × среднее за домашние задания + 0,15 × среднее за аудиторную работу + 0,35 × среднее за контрольные работы + 0,25 × зачет с оценкой».

**Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)**
**Примерные домашние задания**
**Домашнее задание 1**

1. **Принцип максимума Понтрягина.** Сравните принцип максимума Понтрягина с методом HJB. Для детерминированного случая управления выведите условия оптимальности и объясните, как они переносятся на стохастические системы. Приведите пример задачи быстродействия и решите ее с помощью принципа максимума.
2. **Принцип максимума Понтрягина.** Для стохастической системы dXt=utdt+dWt, целевой функции E[∫0T(Xt2+ut2)dt], выведите сопряженную систему и условия оптимальности. Приведите численный пример решения на конечном интервале.
3. **Линейно-квадратичное управление.** Постановьте задачу LQG: линейная система dXt=(AXt+But)dt+CdWt, квадратичная целевая функция. Решите через HJB, объяснив разделение. Приведите пример из робототехники и реализуйте управление с обратной связью.
4. **Линейно-квадратичное управление.** Для финансового примера (управление портфелем) с шумом наблюдения решите LQG. Объясните связь с фильтром Калмана и реализуйте численное решение на Python (предоставьте код и анализ результатов).

5. **Модель Мертона.** В модели Мертона для оптимального управления портфелем (риск vs доходность) выведите эллиптическое уравнение Беллмана на бесконечном горизонте. Рассчитайте оптимальное распределение активов для простых параметров ($\mu=0.1$, $\sigma=0.2$, $r=0.05$, коэффициент риска Аверса 2). Приведите численный пример и обсудите границу эффективности.

**Домашнее задание 3**

1. **Стохастические дифференциальные игры.** Постановьте задачу для двух игроков в стохастической игре: система $dX_t=(u_t-v_t)dt+dW_t$, целевые функции $E[\int_0^T(X_t^2+u_t^2-v_t^2)dt]$. Определите равновесие Нэша и выведите уравнение Беллмана для игр. Приведите пример конкуренции фирм на рынке.
2. **Стохастические дифференциальные игры.** Для примера с двумя игроками решите задачу численно, моделируя равновесие Нэша. Объясните, как стохастические игры связаны с управлением с неполной информацией, и реализуйте простую симуляцию на Python.
3. **Управление с неполной информацией.** Опишите фильтр Калмана для линейной системы с шумом наблюдения. Примените к задаче слежения за движущимся объектом: система $dX_t=u_t dt+dW_t$, наблюдение $dY_t=X_t dt+dV_t$. Выведите уравнения фильтра и приведите численный пример.
4. **Управление с неполной информацией.** Для POMDP (частично наблюдаемые марковские процессы) объясните оптимальную политику. Приведите пример из навигации и обсудите связь с принципом максимума Понтрягина. Реализуйте простое численное решение на Python.
5. **Эргодическое управление.** Для равномерно эргодической системы $dX_t=(u_t-X_t)dt+dW_t$ выведите эргодическое уравнение Беллмана для управления "в среднем". Приведите пример из экономики (управление запасами) и рассчитайте среднюю стоимость для стационарной политики. Объясните связь с бесконечным горизонтом.

**Примерные задания для семинаров**

1. Что такое стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) и как оно отличается от обычного дифференциального уравнения?
2. Приведите пример управляемого процесса, связанного с управлением портфелем инвестиций.
3. Как связаны СДУ с уравнениями в частных производных (УрЧП) в контексте задач оптимизации?
4. Опишите основные компоненты задачи стохастического управления: состояние, управление и целевую функцию.
5. Приведите пример задачи управления ресурсами, где используется СДУ.
6. Что такое марковское свойство в контексте управляемых стохастических процессов?
7. Как броуновское движение используется в моделях стохастического управления?
8. Объясните понятие "оптимального управления" в стохастической среде.
9. Приведите пример, где неполная информация влияет на выбор управления в СДУ.
10. Как связаны принципы стохастического управления с задачами из финансовой математики?

**Примерные задания для контрольной работы**

1. **Введение в стохастическое управление.** Определите стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) и объясните его ключевые компоненты. Приведите пример управляемого процесса для задачи управления ресурсами, записав СДУ в явном виде и обосновав его связь с уравнениями в частных производных.

2. **Введение в стохастическое управление.** Рассмотрите задачу управления портфелем: рисковый актив $dSt=\mu Stdt+\sigma StdWt$, безрисковый с доходностью r. Запишите СДУ для капитала $dXt=(rXt+ut(\mu-r))dt+ut\sigma dWt$. Объясните, как марковское свойство влияет на выбор управления.

3. **Динамическое программирование.** Для управляемого диффузионного процесса на интервале [0, T] выведите параболическое уравнение Беллмана. Интерпретируйте функцию стоимости и принцип оптимальности. Приведите численный пример решения простой задачи с квадратичной функцией затрат.

4. **Динамическое программирование.** Решите задачу управления инвестициями: целевая функция $E[\int 0Tut2dt+XT2]$, где $dXt=(rXt+ut(\mu-r))dt+ut\sigma dWt$. Выведите уравнение Беллмана и опишите шаги нахождения оптимального управления.

5. **Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана.** Для задачи с квадратичной функцией затрат (линейно-квадратичное управление) выведите HJB-уравнение. Объясните алгоритм Беллмана–Ховарда и реализуйте численное решение на Python с использованием scipy (предоставьте ключевые фрагменты кода).

6. **Принцип максимума Понтрягина.** Сравните принцип максимума Понтрягина с методом HJB. Для детерминированного случая управления выведите условия оптимальности и объясните их перенос на стохастические системы. Приведите пример задачи быстродействия и решите ее.

7. **Принцип максимума Понтрягина.** Для системы $dXt=utdt+dWt$, целевой функции $E[\int 0T(Xt2+ut2)dt]$, выведите сопряженную систему и условия оптимальности. Приведите численный расчет для T=1.

8. **Линейно-квадратичное управление.** Постановьте задачу LQG: линейная система $dXt=(AXt+But)dt+CdWt$, квадратичная целевая функция. Решите через HJB и объясните разделение. Приведите пример из робототехники.

9. **Численные методы.** Сравните алгоритм Беллмана–Ховарда для эллиптических уравнений и метод конечных разностей для HJB. Реализуйте простое численное решение на Python для задачи из темы 5 (предоставьте код и анализ сходимости).

**Примерные задания для коллоквиума**

1. Что такое постановка задачи в стохастических дифференциальных играх?
2. Как определяется равновесие Нэша в стохастических системах?
3. Приведите пример конкуренции фирм на рынке как стохастической игры.
4. Что такое "игрок" в контексте стохастических дифференциальных игр?
5. Как выводится уравнение Беллмана для игр?
6. Приведите пример, где равновесие Нэша приводит к оптимальному управлению.
7. Как численно моделировать стохастические игры на Python?
8. Что такое "смешанная стратегия" в стохастических играх?
9. Приведите пример из экологии, где применяются стохастические игры.
10. Как стохастические игры связаны с управлением с неполной информацией?

**Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

| № п/п | Задание | Ответ | Компетенция |
|---|---|---|---|
| 1 | Укажите основное понятие, связанное со стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) в теме введения в стохастическое управление. | Стохастическое дифференциальное уравнение | УК-1 |
| 2 | Найдите количество основных компонентов в управляемом процессе из темы введения в стохастическое управление. | Три | УК-1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | Укажите тип связи между СДУ и уравнениями в частных производных (УрЧП) из темы введения в стохастическое управление. | Итó | УК-1 |
| 4 | Назовите пример задачи управления ресурсами из темы введения в стохастическое управление. | Управление портфелем | УК-1 |
| 5 | Укажите временной интервал для управляемых диффузионных процессов в теме динамического программирования. | Конечный | УК-2 |
| 6 | Найдите тип уравнения Беллмана в теме динамического программирования. | Параболическое | УК-2 |
| 7 | Укажите принцип, используемый в выводе уравнения Беллмана из темы динамического программирования. | Оптимальности | УК-2 |
| 8 | Назовите задачу, решаемую в практике темы динамического программирования. | Управление инвестициями | УК-2 |
| 9 | Укажите алгоритм для параболических уравнений из темы уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB). | Беллмана–Ховарда | ОПК-1 |
| 10 | Найдите тип функции затрат в примерах темы HJB. | Квадратичная | ОПК-1 |
| 11 | Укажите инструмент для численной реализации из темы HJB. | Python | ОПК-1 |
| 12 | Назовите метод сравнения в теме принципа максимума Понтрягина. | HJB | ОПК-1 |
| 13 | Укажите количество условий оптимальности в теме принципа максимума Понтрягина. | Два | ПК-1 |
| 14 | Найдите пример задачи в теме принципа максимума Понтрягина. | Быстродействия | ПК-1 |
| 15 | Укажите связь с детерминированным случаем из темы принципа максимума Понтрягина. | Перенос | ПК-1 |
| 16 | Назовите постановку задачи в теме линейно-квадратичного управления. | LQG | ПК-2 |
| 17 | Укажите метод решения в теме линейно-квадратичного управления. | HJB | ПК-2 |
| 18 | Найдите приложение из темы линейно-квадратичного управления. | Робототехника | ПК-2 |
| 19 | Укажите модель в теме модели Мертона. | Мертона | ПК-1 |
| 20 | Найдите тип горизонта в теме модели Мертона. | Бесконечный | ПК-1 |