ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Функциональный анализ»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2025*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2025

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 5
3. **Тематический план** 7
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** 9
6. **Материально-техническое обеспечение** 9
7. **Методические и оценочные материалы** 11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Функциональный анализ» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Функциональный анализ» имеет фундаментальное значение для развития математического мышления и навыков абстрактного моделирования, что позволяет студентам эффективно решать задачи в области численных методов, оптимизации и машинного обучения. Эта дисциплина (модуль) способствует интеграции теоретических основ с практическими приложениями, такими как анализ больших данных, разработка алгоритмов искусственного интеллекта и моделирование сложных систем.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин (модулей): «Математический анализ. Часть 1», «Математический анализ. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» или «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 1», «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия.

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у студентов глубокого понимания основных концепций и методов функционального анализа для применения в математических моделях, алгоритмах и вычислительных задача.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— изучить основные понятия, такие как банаховы и гильбертовы пространства, линейные операторы и функционалы, для понимания структуры бесконечномерных пространств и их свойств;

— научиться применять методы функционального анализа к решению дифференциальных уравнений, задач оптимизации и спектрального анализа, что формирует основу для численных алгоритмов в компьютерных науках;

— доказательства теорем и анализа сходимости, необходимых для работы с алгоритмами машинного обучения и обработки сигналов;

— научиться моделировать и решать прикладные проблемы в области данных и вычислений.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— нормированные и банаховы пространства: примеры, сходимость по норме, полноту и пополнение;

— компактность: ε-сети, вполне ограниченные множества, конечномерный случай и лемму Рисса;

— ограниченные операторы и функционалы: норму оператора, факторпространства, сопряжённые пространства и теорему Хана—Банаха;

— теоремы Бэра, Банаха—Штейнгауза, Банаха об открытом отображении, об обратном операторе и о замкнутом графике;

— гильбертовы пространства, L^p-пространства, компактные и спектральные операторы, пространства с воспроизводящим ядром, пространства Соболева и расстояния Васерштейна.

уметь:

— проверять полноту, компактность, замкнутость подпространств и эквивалентность норм;

— вычислять нормы функционалов и операторов: диагональных, сдвига, умножения и интегральных;

— применять принцип сжимающих отображений Банаха, теорему Хана—Банаха, теоремы об отделении и основные теоремы Банаха;

— работать с ортогональными проекциями, рядами Фурье, равенством Парсеваля и теоремой Рисса—Фишера;

— применять операторный язык к методу главных компонент, ядерным методам, операторам Беллмана, WGAN и функционалам риска.

владеть:

— языком банаховых и гильбертовых пространств, операторов, двойственности, компактности и спектра;

— техникой строгих доказательств и построения контрпримеров в бесконечномерном анализе;

— методами оценки норм, сходимости, устойчивости и корректности итерационных процедур;

— спектральным подходом к методу главных компонент, интегральным операторам, лапласианам графов и сглаживанию;

— навыком перевода задач машинного обучения, оптимизации, динамического программирования и финансов на язык функционального анализа.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
УК-2.	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1.	Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач
		УК-2.2.	Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения
		УК-2.3.	Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области
		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические

			задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта, включая соблюдение норм информационной безопасности

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары			
1	Нормированные пространства, компактность и операторы	10	20	2	30	Устный опрос Контрольная работа
2	Гильбертовы пространства и пространства L^p	10	20	2	30	Устный опрос Контрольная работа
3	Компактные и спектральные операторы	10	20	2	30	Коллоквиум
	Зачет с оценкой			4		
	Итого:	***30***	***60***	***10***	***90***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Нормированные пространства, компактность и операторы	Нормированные и банаховы пространства. Нормы на векторах, последовательностях, функциях и матрицах. Сходимость по норме, полнота и пополнение. Компактность в нормированных пространствах. ε-сети, вполне ограниченные множества, критерий компактности. Конечномерный случай и лемма Рисса. Подпространства, факторпространства и ограниченные линейные операторы. Факторнорма, норма оператора, диагональные операторы, операторы сдвига и интегральные операторы. Сжимающие отображения. Теорема Банаха о неподвижной точке, метод последовательных приближений, ряд Неймана. Контрольная работа 1. Линейные функционалы и сопряжённые пространства. Теорема Хана—Банаха, каноническое вложение во второе сопряжённое, кратко о рефлексивности. Отделение выпуклых множеств. Геометрическая форма теоремы Хана—Банаха, опорные функционалы.
2	Гильбертовы пространства и пространства L^p	Теорема Бэра и основные теоремы Банаха. Теорема Банаха—Штейнгауза, теорема Банаха об открытом отображении, теорема об обратном операторе, теорема о замкнутом графике. Гильбертовы пространства I. Скалярное произведение, ортогональность, ортогональные дополнения, теорема о проекции, теорема Рисса о представлении функционалов. Контрольная работа 2. Гильбертовы пространства II. Ортонормированные системы, коэффициенты и ряды Фурье, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, теорема Рисса—Фишера. Пространства L^p и двойственность L^p—L^q. Неравенства Гёльдера и Минковского, полнота L^p, теорема Радона—Никодима как внешний результат.
3	Компактные и спектральные операторы	Компактные операторы. Теорема Арцела—Асколи, операторы конечного ранга, интегральные операторы, операторы Гильберта—Шмидта, альтернатива Фредгольма. Коллоквиум. Спектр ограниченного оператора. Резольвентное множество, резольвента, спектральный радиус, спектры диагональных операторов и операторов сдвига, спектральная теорема для компактных самосопряжённых операторов. Гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром. Воспроизводящие ядра, ядерный трюк, теорема о представлении минимизатора, ядерная гребневая регрессия, максимальное среднее расхождение. Пространства Соболева и преобразование Фурье. Обобщённые производные, пространство H^1, нормы Соболева, неравенство Пуанкаре, формула Планшереля. Оптимальный транспорт и расстояния Васерштейна. Задача Монжа—Канторовича, двойственность Канторовича—Рубинштейна, липшицевы функционалы, WGAN.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Осокин, А. Н. Теория информации : учебник для вузов / А. Н. Осокин, А. Н. Мальчуков. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 208 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-16333-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561389.

2. Терсенов, А. С. Лекции по прикладному функциональному анализу : учебник для вузов / А. С. Терсенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 83 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18812-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/568927.

3. Старовойтов, В. Н. Функциональный анализ. Мера и интеграл Лебега : учебник для вузов / В. Н. Старовойтов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 121 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19991-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/569213.

Дополнительная литература:

1. Локтионов, И. К. Численные методы : учебник / И. К. Локтионов, Л. П. Мироненко, В. В. Турупалов ; под общ. ред. канд. техн. наук, проф. В. В. Турупалова. - Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. - 380 с. - ISBN 978-5-9729-0786-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1902598.

2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 3-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09085-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560316.

3. Никитин, А. А. Математический анализ. Сборник задач : учебное пособие для вузов / А. А. Никитин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 353 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8585-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560413.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной

мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;
— механическими калькуляторами;
— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное

Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Функциональный анализ» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, контрольные работ, устные опросы, коллоквиум, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Устный опрос – это форма проверки знаний, при которой студент отвечает на вопросы преподавателя в устной форме, демонстрируя свои знания и понимание темы.

Для успешной подготовки к устному опросу рекомендуется тщательно изучить материалы по теме, включая лекции и учебники; создать список ключевых вопросов и ответов, а также практиковаться в их проговаривании вслух, чтобы улучшить уверенность и четкость изложения. Полезно также обсудить темы с однокурсниками, чтобы получить разные точки зрения и углубить понимание материала.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Функциональный анализ»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Функциональный анализ» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Устный опрос	25%	4	Форма проверки знаний, при которой студент отвечает на вопросы преподавателя в устной форме, демонстрируя свои знания и понимание темы
Контрольные работы	20%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	25%	1	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Зачет с оценкой	30%	1	Итоговая работа - письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время, возможен дополнительный устный экзамен

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Функциональный анализ»: «0,25× среднее за устные опросы + 0,2× среднее за контрольные работы + 0,25 × коллоквиум + 0,3 × зачет с оценкой».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)

Примерные вопросы для устного опроса

Метрические пространства

1. Перечислите аксиомы метрики и объясните, почему они необходимы для определения расстояния между элементами.
2. Приведите пример дискретной метрики на множестве натуральных чисел и покажите, как она работает для двух различных элементов.
3. Опишите метрику в пространстве R^n и укажите, как она связана с евклидовой нормой.
4. Что такое метрика в пространстве C[a,b]? Приведите пример функции и вычислите расстояние между двумя функциями.
5. Определите метрику l^p на последовательностях и объясните, как она зависит от параметра p.
6. Что такое полное метрическое пространство? Приведите пример полного пространства и контрпример неполного.
7. Объясните понятие пополнения метрического пространства и приведите конструкцию пополнения для рациональных чисел.
8. Сформулируйте теорему о вложенных шарах и объясните ее приложения к существованию решений уравнений.
9. Приведите пример неполного метрического пространства и покажите, как его пополнить.
10. Как теорема о вложенных шарах применяется в анализе сходимости последовательностей?

Нормированные пространства

1. Объясните связь между нормой и метрикой в нормированном пространстве.
2. Что такое эквивалентность норм? Приведите пример двух эквивалентных норм на R^2.

3. Опишите пространство L^p и укажите, как оно определяется для функций на отрезке.
4. Сформулируйте неравенство Гёльдера и объясните его роль в анализе интегралов.
5. Приведите неравенство Минковского и покажите его применение к суммам рядов.
6. Что такое пространство l^p? Приведите пример последовательности из l^2.
7. Объясните теорему Рисса о конечномерных подпространствах и ее следствия.
8. Приведите пример нормированного пространства, где все конечномерные подпространства замкнуты.
9. Как неравенство Гёльдера используется в доказательстве полноты L^p?
10. Сравните свойства пространств l^1 и l^∞ с точки зрения их норм.

Теоремы полноты

1. Сформулируйте теорему Бэра о категориях и объясните понятие категории множеств.
2. Приведите приложение теоремы Бэра к существованию непрерывных функций с заданными свойствами.
3. Что такое сжимающее отображение? Приведите пример и объясните принцип сжимающих отображений.
4. Как применяется принцип сжимающих отображений к решению интегральных уравнений?
5. Сформулируйте теорему о продолжении равномерно непрерывных отображений и приведите пример.
6. Объясните, почему равномерная непрерывность важна для продолжения функций.
7. Приведите контрпример, где функция не может быть продолжена равномерно непрерывно.
8. Как теорема Бэра связана с полнотой метрических пространств?
9. Примените принцип сжимающих отображений к нахождению неподвижной точки в R.
10. Объясните роль теорем полноты в доказательстве существования решений дифференциальных уравнений.

Компактность

1. Сформулируйте критерий Хаусдорфа компактности в метрических пространствах.
2. Что такое тотальная ограниченность? Приведите пример тотально ограниченного множества.
3. Объясните теорему Арцела-Асколи и понятие равностепенной непрерывности.
4. Как применяется теорема Арцела-Асколи к компактности в C[a,b]?
5. Покажите, что пространство l^p компактно для конечномерных случаев.
6. Приведите пример компактного множества в R^2 и проверьте его свойства.
7. Объясните связь между компактностью и равностепенной непрерывностью семейства функций.
8. Как критерий Хаусдорфа используется для проверки компактности подмножеств.
9. Приведите контрпример некомпактного множества в C[0,1].
10. Объясните приложения компактности к сходимости последовательностей функций.

Линейные функционалы

1. Сформулируйте теорему Хана-Банаха в вещественном случае и объясните ее смысл.
2. Приведите пример нетривиального продолжения линейного функционала по теореме Хана-Банаха.
3. Что такое теорема Хана-Банаха в комплексном случае? Чем она отличается от вещественного?
4. Объясните следствие теоремы Хана-Банаха о разделении выпуклых множеств.
5. Приведите пример двух выпуклых множеств, разделимых гиперплоскостью.
6. Как теорема Хана-Банаха применяется к существованию непрерывных расширений.
7. Покажите на примере, почему не всякий функционал можно продолжить без потери непрерывности.
8. Объясните роль теоремы Хана-Банаха в двойственных пространствах.
9. Приведите пример линейного функционала на C[a,b] и его продолжение.
10. Как следствие о разделении множеств используется в оптимизации?

Сопряжённые пространства

1. Что такое двойственное пространство? Приведите пример $(l^1)^*$.
2. Объясните слабую топологию в нормированном пространстве.
3. Сформулируйте теорему Банаха-Алаоглу и объясните ее значение.
4. Что такое слабая* топология? Приведите пример ее применения.
5. Объясните понятие рефлексивности пространства и приведите пример рефлексивного пространства.
6. Покажите, что L^p рефлексивно для $1 < p < \infty$.
7. Приведите пример нерефлексивного пространства, такого как L^1.
8. Как теорема Банаха-Алаоглу связана с компактностью в слабой* топологии?
9. Объясните приложения слабой сходимости в функциональном анализе.
10. Сравните свойства двойственных пространств для l^2 и C[0,1].

Гильбертовы пространства

1. Сформулируйте тождество параллелограмма и объясните его роль в определении гильбертовых пространств.
2. Что такое проекционная теорема? Приведите пример проекции на подпространство.
3. Объясните понятие ортогональных систем и неравенство Бесселя.
4. Сформулируйте теорему Рисса о представлении функционалов в гильбертовых пространствах.
5. Как строятся ряды Фурье в L^2? Приведите пример разложения функции.
6. Покажите, что ортонормированная система полна в гильбертовом пространстве.
7. Приведите пример ортогональной системы в R^3.
8. Объясните приложения проекционной теоремы к решению уравнений.
9. Как неравенство Бесселя используется в анализе рядов Фурье?
10. Сравните гильбертовы пространства с банаховыми по свойствам.

Линейные операторы

1. Что такое ограниченный линейный оператор? Приведите пример и контрпример.
2. Объясните понятие ядра оператора и его свойства.
3. Сформулируйте теорему Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности).
4. Приведите пример применения принципа равномерной ограниченности к последовательности операторов.
5. Что такое обратный оператор? Когда он существует для ограниченного оператора?
6. Объясните, почему обратный оператор к компактному оператору не всегда существует.
7. Приведите пример компактного оператора и его спектральные свойства.
8. Как теорема Банаха-Штейнгауза применяется в анализе сходимости рядов операторов?
9. Покажите на примере, что непрерывность оператора следует из ограниченности.
10. Объясните связь между ядром оператора и его инъективностью.

Основные теоремы

1. Сформулируйте теорему Банаха об обратном операторе и объясните ее условия.
2. Что такое теорема о замкнутом графике? Приведите пример ее применения.
3. Объясните теорему об открытом отображении и ее роль в изоморфизмах.
4. Приведите пример, где теорема об обратном операторе гарантирует существование обратного.
5. Как теорема о замкнутом графике используется для доказательства непрерывности операторов?
6. Покажите на примере применение теоремы об открытом отображении к линейным операторам.
7. Объясните, почему эти теоремы важны для теории банаховых пространств.
8. Приведите контрпример, где теорема об обратном операторе не применима.
9. Как теорема о замкнутом графике связана с полнотой пространств?
10. Объясните приложения этих теорем в решении операторных уравнений.

Спектральная теория

1. Что такое спектр оператора и его компоненты (точечный, непрерывный, остаточный)?
2. Объясните понятие резольвенты и ее свойства.
3. Сформулируйте формулу Гельфанда для спектрального радиуса.
4. Приведите пример спектра оператора умножения на функцию в L^2.
5. Как вычисляется спектральный радиус для нормального оператора?
6. Объясните разницу между точечным и непрерывным спектром на примере.
7. Приведите пример оператора с остаточным спектром.
8. Как резольвента используется для решения операторных уравнений?
9. Покажите на примере, что спектр компактного оператора дискретен.
10. Объясните приложения спектральной теории в квантовой механике.

Электронный документ

Компактные операторы

1. Перечислите критерии компактности оператора и приведите пример.
2. Сформулируйте теорему Шаудера о неподвижных точках компактных отображений.
3. Что такое альтернатива Фредгольма для компактных операторов?
4. Объясните спектр компактного оператора и его свойства.
5. Приведите пример интегрального оператора в L^2 и проверьте его компактность.
6. Как альтернатива Фредгольма применяется к решению уравнений вида $Ax = y$.
7. Покажите, что спектр компактного оператора состоит из нуля и собственных значений.
8. Объясните роль компактных операторов в аппроксимации.
9. Приведите пример некомпактного оператора и объясните почему.
10. Как теорема Шаудера используется в нелинейном анализе?

Самосопряжённые операторы

1. Что такое симметричный оператор? Приведите пример.
2. Объясните понятие самосопряжённого оператора и его свойства.
3. Сформулируйте теорему Гильберта-Шмидта о спектре самосопряжённых операторов.
4. Что такое спектральная теорема для компактных самосопряжённых операторов?
5. Приведите пример спектрального разложения оператора в L^2.
6. Как доказывается, что самосопряжённый оператор имеет вещественный спектр?
7. Объясните приложения спектральной теоремы к диагонализации операторов.
8. Приведите пример несамосопряжённого оператора и его свойства.
9. Покажите, как спектральная теорема применяется к интегральным операторам.
10. Объясните связь между симметричностью и ортогональностью собственных функций.

Теоремы аппроксимации

1. Сформулируйте теорему Стоуна-Вейерштрасса для алгебр функций.
2. Приведите пример применения теоремы Стоуна-Вейерштрасса к полиномам на отрезке.
3. Что такое теорема Фейера и ядра Дирихле?
4. Объясните, как ядра Фейера аппроксимируют непрерывные функции.
5. Приведите пример полиномов Бернштейна и их свойства.
6. Как теорема Стоуна-Вейерштрасса используется для плотности подалгебр.
7. Покажите на примере аппроксимацию функции полиномами Бернштейна.
8. Объясните роль ядер Дирихле в суммировании рядов Фурье.
9. Приведите контрпример, где алгебра не плотна в $C[a,b]$.
10. Как эти теоремы применяются в численном анализе?

Обобщённые функции. Дополнительные темы

1. Что такое пространство D основных функций и как оно определяется?
2. Объясните понятие регуляризации обобщённых функций.
3. Опишите пространства Соболева H^p и теоремы вложения.
4. Что такое обобщённые производные? Приведите пример.
5. Сформулируйте формулу интегрирования по частям для обобщённых функций.
6. Объясните теорему Крейна-Мильмана о крайних точках выпуклых множеств.
7. Что такое теорема Маркова-Какутани о неподвижной точке?
8. Приведите пример применения теоремы Гротендика к ядерным пространствам.
9. Как обобщённые функции используются в решении дифференциальных уравнений?
10. Объясните приложения пространств Соболева в вариационном исчислении.

Примерные задания по контрольной работе

Контрольная работа №1

1. Докажите, что пространство C[0,1] с метрикой ||f - g|| = sup |f(t) - g(t)| является полным. Приведите контрпример неполного пространства.
2. Покажите, что в пространстве l^p ($p \geq 1$) нормы ||x||_p и ||x||_∞ эквивалентны на конечномерных подпространствах. Используйте неравенство Гёльдера.
3. Примените теорему Бэра о категориях к доказательству того, что множество рациональных чисел является первой категории в R.
4. Проверьте компактность множества {f_n(t) = t^n} в пространстве C[0,1] с помощью теоремы Арцела-Асколи. Объясните понятие равностепенной непрерывности.
5. Сформулируйте теорему Хана-Банаха в комплексном случае и приведите пример разделения выпуклых множеств.
6. Покажите, что пространство L^p ($1 < p < \infty$) рефлексивно. Объясните теорему Банаха-Алаоглу для слабой* топологии.
7. В $L^2[0,1]$ найдите проекцию функции f(t) = t на подпространство, натянутое на {1, t}. Используйте тождество параллелограмма.
8. Для оператора сдвига в l^∞ определите, является ли он ограниченным. Примените принцип равномерной ограниченности к семейству операторов.
9. Сформулируйте теорему об открытом отображении и приведите пример её применения к линейным операторам.
10. Для оператора умножения на f(t) = t в $L^2[0,1]$ найдите спектр. Вычислите спектральный радиус и резольвенту для $\lambda = 1.5$.

Примерные задания для коллоквиума

1. Докажите, что функция $\rho(x, y) = |x - y| / (1 + |x - y|)$ является метрикой на множестве вещественных чисел. Проверьте аксиомы метрики и приведите пример вычисления расстояния между двумя числами.
2. Примените принцип сжимающих отображений для решения уравнения $x = (1/3) \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$. Покажите, что отображение является сжимающим и найдите неподвижную точку.
3. Используя теорему Хана-Банаха в вещественном случае, продолжите линейный функционал f(x) = x(0) с подпространства многочленов на пространство C[0,1]. Укажите норму продолжения.

4. В пространстве $L^2[0,1]$ рассмотрите ортонормированную систему $\{e_n(t) = \sqrt{2}\sin(n\pi t), n=1,2,...\}$. Проверьте ортогональность и нормированность. Приведите неравенство Бесселя для произвольного элемента.

5. Докажите теорему о замкнутом графике для банаховых пространств. Приведите пример оператора с замкнутым графиком, для которого обратный оператор непрерывен.

6. Покажите эквивалентность норм $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ и $\|x\|_2 = \max |x_i|$ на конечномерном пространстве R^n. Используйте неравенство Минковского для сравнения.

7. Примените теорему Арцела-Асколи к семейству функций $\{f_n(t) = t^n\}$ на [0,1]. Проверьте равностепенную непрерывность и компактность в C[0,1].

8. Покажите, что двойственное пространство к l^1 совпадает с l^∞. Приведите пример функционала из l^∞ и вычислите его норму.

9. Рассмотрите оператор сдвига в l^2: $(Tx)n = x\{n+1\}$. Определите, является ли он ограниченным, найдите ядро и образ. Примените принцип равномерной ограниченности к последовательности таких операторов.

10. Для оператора умножения на функцию $f(t) = t$ в $L^2[0,1]$ найдите спектр. Вычислите резольвенту для $\lambda = 2$ и спектральный радиус.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Укажите аксиомы метрики в метрических пространствах (перечислите через запятую).	Положительность, симметричность, неравенство треугольника	УК-1
2	Назовите пример полного метрического пространства из темы "Метрические пространства".	R^n / l^2	УК-1
3	Найдите пополнение пространства Q с обычной метрикой.	R	УК-1
4	Примените теорему о вложенных шарах к существованию решений уравнения в полном пространстве (укажите теорему).	Теорема о вложенных шарах	УК-1
5	Определите связь между нормой и метрикой в нормированных пространствах (одно слово).	Естественная	УК-2
6	Укажите неравенство, связанное с пространствами L^p (Гёльдера или Минковского).	Гёльдера / Минковского	УК-2
7	Найдите двойственное пространство к l^1.	l^∞	УК-2
8	Примените теорему Рисса к конечномерным подпространствам (укажите теорему).	Теорема Рисса	УК-2
9	Укажите критерий компактности в метрических пространствах (имя).	Хаусдорфа	ОПК-1
10	Найдите спектральный радиус оператора умножения на функцию t в $L^2[0,1]$.	1	ОПК-1
11	Сформулируйте теорему Банаха об обратном операторе (кратко).	Теорема Банаха об обратном операторе	ОПК-1
12	Укажите альтернатива Фредгольма для компактных операторов (число альтернатив).	3	ОПК-1
13	Найдите проекцию вектора (1,0) на подпространство в R^2 с внутренней нормой.	(1,0)	ПК-1
14	Укажите теорему, связанную с рядами Фурье в L^2 (имя).	Рисса / Парсеваля	ПК-1
15	Примените спектральную теорему для компактных операторов (укажите теорему).	Спектральная теорема для компактных операторов	ПК-1

16	Укажите теорему Стоуна-Вейерштрасса (применение).	Аппроксимация функций	ПК-1
17	Найдите обобщённую производную функции x в пространстве D (одно слово).	1	ПК-2
18	Укажите теорему о крайних точках (имя).	Крейна-Мильмана	ПК-2
19	Примените теорему Маркова-Какутани к неподвижной точке (укажите теорему).	Теорема Маркова-Какутани	ПК-2
20	Укажите ядерное пространство по Гротендику (пример).	L^1 / Соболева	ПК-2