ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Математический анализ»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2024*

Москва
2024

Электронный документ

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 4
3. **Тематический план** 5
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 5
5. **Учебно-методическое обеспечение** 6
6. **Материально-техническое обеспечение** 6
7. **Методические и оценочные материалы** 8

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математический анализ» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Математический анализ» является основой для многих других математических дисциплин и научных направлений, включая физику, экономику и инженерные науки. Дисциплина развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в обязательную часть Блока 1.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— формирование понимание терминов: последовательность, предел последовательности, частичный предел, предел, непрерывность функции, критерий Коши существования предела функции, производная и дифференцируемость, их геометрический и практический смысл;

— формирование знаний теорем о среднем, понятие формулы Тейлора, правило Лопиталя, основных теорем, связанных с исследованием функции на экстремум и выпуклость, построение графиков функции и их анализ с помощью производной;

— обучение навыкам вычисления предела последовательности и функции;

— формирование навыков исследования функции на непрерывность и дифференцируемость;

— формирование умения выводить производные элементарных функций;

— применение производных к исследованию функций и построение график функций;

— применение формулы Тейлора к нахождению пределов.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализация математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары (практические занятия)			
1	Числовые последовательности	7	15		24	Домашнее задание
2	Предел функции одной переменной	8	15		24	Домашнее задание Контрольная работа
3	Производная функции и её свойства	7	15		24	Домашнее задание Контрольная работа
4	Производные высших порядков	8	15		22	Домашнее задание Коллоквиум
	Экзамен			6		
	Итого:	***30***	***60***	***6***	***94***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Числовые последовательности	Числовые последовательности и их свойства. Пределы последовательностей. Точная верхняя и точная нижняя грани множеств. Число е. Критерий Коши сходимости последовательностей
2	Предел функции одной переменной	Непрерывность функций. Предел функций и замечательные пределы. Сравнение функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке
3	Производная функции и её свойства	Определение и свойства производной. Геометрический и практический смысл производной. Параметрические и неявные функции. Нахождение их производных
4	Производные высших порядков	Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя. Выпуклость и задачи оптимизации. Формула Тейлора. Применение производной к исследованию функций.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/562115.

2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/562116.

Дополнительная литература:

1. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/563592.

2. Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560461.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;

— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное

Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математический анализ» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, коллоквиум, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким

темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Математический анализ»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***экзамена***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	
8	Отлично	
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также
6	Хорошо	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Математический анализ» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	14	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	30%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	15%	1	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Экзамен	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время. На продвинутом уровне возможен дополнительный устный экзамен

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Математический анализ»: «0,2× среднее за домашние задания + 0,3 × среднее за контрольные работы + 0,15 × коллоквиум + 0,35 × экзамен».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные темы для коллоквиума

Тема «Функция»

Определения

Обратная функция

Тема «Свойства функций»

Определения

Строго (нестрого) возрастающая (убывающая) функция

Точка глобального экстремума (минимума / максимума) функции

Функция, ограниченная сверху (ограниченная снизу, ограниченная, неограниченная)

Функция: чётная (нечётная, периодическая с периодом T)

Теорема о сумме ограниченных функций, сумме ограниченной

неограниченной функций

Доказательства

Теорема о сумме ограниченных функций, сумме, ограниченной и неограниченной функций

Тема «Последовательности»

Определения

Последовательность

Последовательность, ограниченная сверху (ограниченная снизу, ограниченная, неограниченная)

Монотонная последовательность: (строго) возрастающая (убывающая) последовательность

Тема «Предел последовательности»

Определения

Предел последовательности равен $a \in \mathrm{R}, +\infty, -\infty, \infty$

ε-окрестность точки

Бесконечно большая последовательность

Тема «Сходящиеся последовательности»

Определения

Сходящаяся (расходящаяся) последовательность

Бесконечно малая последовательность

Формулировки

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Теорема о единственности предела последовательности

Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой последовательности

Теорема о связи последовательности, её предела и бесконечно малой последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема об арифметических операциях со сходящимися последовательностями

Теорема о зажатой последовательности

Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей

Теорема Вейерштрасса о пределе ограниченной монотонной последовательности

Доказательства

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Теорема о единственности предела последовательности

Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой последовательности

Теорема о связи последовательности, её предела и бесконечно малой последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема об арифметических операциях со сходящимися последовательностями

Теорема о зажатой последовательности

Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей

Тема «Число e»

Определения

Число e (через предел последовательности)

Тема «Непрерывность функции»

Определения

Предел функции в точке слева (справа)

Функция, непрерывная в точке (непрерывная справа или слева в точке)

Типы точек разрыва: устранимый, первого рода, второго рода

Функция, непрерывная на отрезке (на интервале)

Формулировки

Теорема о непрерывности сложной функции (композиции функций)

Теорема о непрерывности обратной функции

Теорема (теоремы) Вейерштрасса о функции: непрерывной на отрезке

Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема о непрерывности значений функции

Теорема о нуле непрерывной функции

Тема «Предел функции (начало)»

Определения

Предел функции (при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$)

Бесконечно большая (малая) функция

Асимптоты: вертикальные, горизонтальные, наклонные

Формулировки

Чему равны коэффициенты k и b асимптоты $y = kx + b$ функции f

Доказательства

Чему равны коэффициенты k и b асимптоты $y = kx + b$ функции f

Тема «Предел функции (продолжение)»

Определения

Проколотая ε-окрестность точки

Предел функции при $x \to x_0$

Бесконечно большая (малая) функция

Асимптоты: вертикальные, горизонтальные, наклонные

Тема «Сравнение функций: o-малое»

Определения

o-малое

Формулировки

Свойства o-малого

Доказательства

Свойства o-малого

Тема «Сравнение функций: O-большое»

Определения

O-большое

Тема «Сравнение функций: асимптотическая эквивалентность»

Определения

Эквивалентность (асимптотическая) функций ($f \sim g$ при $x \to x_0$) —

Формулировки

Свойства (асимптотически) эквивалентных функций f и g

Доказательства

Свойства (асимптотически) эквивалентных функций f и g

Демоверсия билета:

Формулировка в кванторах

1) Сформулируй в кванторах и неравенствах, что $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = +\infty$.

2) Обратная функция
3) Непрерывная функция в точке
4) Равномерно непрерывная функция на множестве
5) Свойства o-малого
6) Теорема о зажатой последовательности
7) Критерий Коши существования конечного предела функции в точке
8) Теорема Штольца

Доказательства

9) Свойства бесконечно малых последовательностей
10) Теорема о промежуточном значении непрерывной функции
11) Теорема об обратной функции
12) Всякая ли сходящаяся последовательность ограничена? Всякая ли ограниченная последовательность сходится?
13) Существует ли последовательность x_n такая, что

а) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, и при этом $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < a$;

б) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, и при этом $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k > n\ \exists l > n\colon x_k < a, x_l > a$?

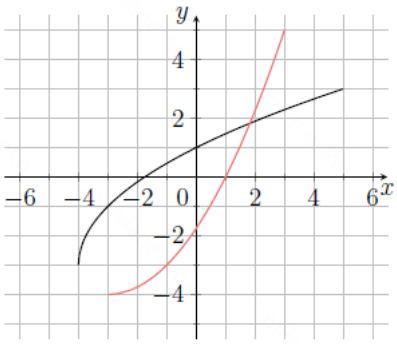
14) Для некоторой последовательности $\{x_n\}$ существуют числа $\alpha \in (0;1)$ и $C > 0$ такие, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x_n| < C\alpha^n$. Можно ли утверждать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится?

Примерные задания по контрольной работе

Контрольная работа №1

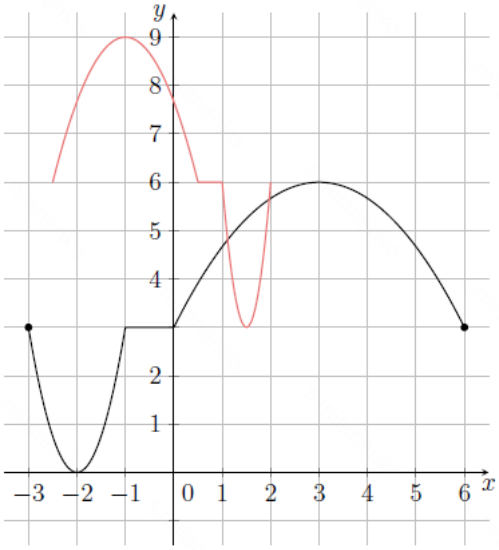
1. Пусть $f(x) = (x - 5)^3$, $x \in R$.
   а) Найди f^{-1}.
   б) Пусть функция g такова, что $(f \circ g)(x) = 8x^6$. Найди g.

2. Дан график функции $y = f(x)$. Функция определена при $-4 \leqslant x \leqslant 5$.



а) Запиши область определения и множество значений обратной функции f^{-1}.
б) Нарисуй эскиз графика f^{-1}.

3. Дан график функции y = f(x). Рассмотрим функцию h(x) = f(1 − 2x) + 3.



а) Словами опиши последовательность преобразований для построения y = h(x).
б) Нарисуй эскиз графика функции h(x).

4. Нарисуй эскиз графика функции y(x) = arccos $\left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right)$ на основе анализа интервалов монотонности.

5. Следующее утверждение верно для функции f:

$\exists C\colon \forall x \in D(f)\ \exists a \in D(f)\colon \left|f(a)\cdot f(x)\right| < C$

Следует ли отсюда, что функция f(x) ограничена? Обоснуй свой ответ.

6. Следующее утверждение верно для последовательности $\{a_n\}$:

$\forall C > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\colon \exists n > k\colon\ |a_n| < C$

Следует ли отсюда, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

7. Докажи, что последовательность $a_n = \frac{4n^2+6n+13}{2n+3}$

является возрастающей, начиная с некоторого номера N.

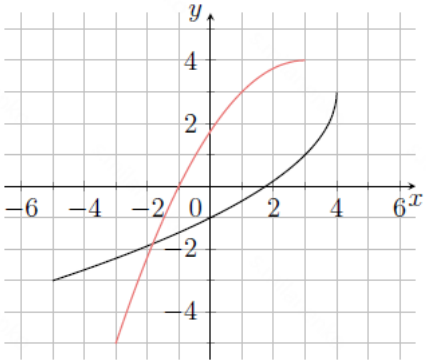
Контрольная работа №2

1. Пусть $f(x) = (\frac{x}{2})^3 + 7, x \in \mathbb{R}$.

   а) Найди f^{-1}.

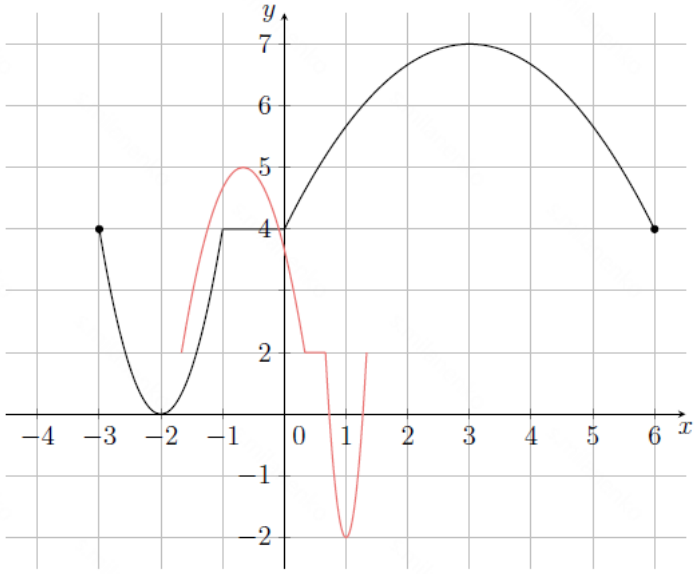
   б) Пусть функция g такова, что $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 15$. Найди g.

2. Дан график функции y = f(x). Функция определена при $-5 \leqslant x \leqslant 4$.



   а) Запиши область определения и множество значений обратной функции f^{-1}.
   б) Нарисуй эскиз графика f^{-1}.

3. Дан график функции y = f(x). Рассмотрим функцию h(x) = f(1 − 3x) − 2.



   а) Словами опиши последовательность преобразований для построения y = h(x).
   б) Нарисуй эскиз графика функции h(x).

4. Нарисуй эскиз графика функции y(x) = arcsin $\left(\dfrac{1}{x^2+2x+2}\right)$

на основе анализа интервалов монотонности.

5. Следующее утверждение верно для функции f(x):

   $\forall C > 0\ \exists a \in \mathbb{R}\colon \exists x > a\colon\ |f(x)| < C$

   Следует ли отсюда, что функция f(x) ограничена? Обоснуй свой ответ.

6. Следующее утверждение верно для последовательности $\{a_n\}$:

$$\exists C > 0\colon \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon\ |a_n \cdot a_k| < C$$

Следует ли отсюда, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена? Обоснуй свой ответ.

Электронный документ

Примерные домашние задания

Домашнее задание по теме: «Функции. Преобразование графиков функций»

Область определения и область значений

ЗАДАЧА 1 **1 балл**

Найди естественную область определения и область значений функций:

а) (0,3 балла) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$,

б) (0,5 балла) $f(x) = \sqrt{-\arcsin(x+3)}$,

в) (0,2 балла) $f(x) = \ln(x+3)$.

Обратные функции, композиции функций

ЗАДАЧА 2 **2 балла**

Найди обратную функцию $f^{-1}(x)$, если:

а) (0,3 балла) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$,

б) (0,3 балла) $f(x) = \sqrt{4-2x}$,

в) (0,3 балла) $f(x) = \ln(5x+7)$,

г) (0,3 балла) $f(x) = 3e^{\frac{x}{5}}$,

д) (0,8 балла) $f(x) = x^2 - 8x - 3, \quad x < 4$.

ЗАДАЧА 3 **(1 балл)**

Докажи, что функция $y = \frac{a-x}{1+bx}$ является обратной самой себе, если $ab \neq -1$.

Преобразования графиков функций

ЗАДАЧА 4 **1 балл**

Найди выражение для функции $f(x) = e^x + x^2$

а) после сдвига графика на 3 единицы вправо,

б) после сдвига графика на 5 единиц влево,

в) после сдвига графика на 2 единицы вверх,

г) после сдвига графика на 4 единицы вниз,

д) после растяжения графика от оси Ox в 2 раза,

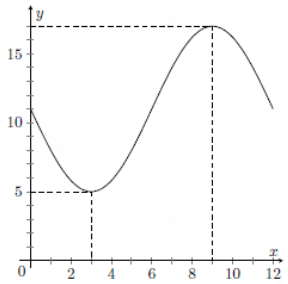
е) после сжатия графика к оси Ox в 2 раза,

ж) после растяжения графика от оси Oy в 2 раза,

з) после сжатия графика к оси Oy в 2 раза.

ЗАДАЧА 5 **1 балл**

Дан график функции $f(x) = a\sin(bx) + c$, где $x \in [0; 12]$. Функция достигает минимального значения в точке $(3; 5)$, а максимального в точке $(9; 17)$.



Найди значения a, b и c.

ЗАДАЧА 6 **2 балла**

Нарисуй графики функций:

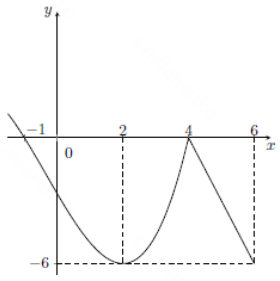
а) $y = \frac{1}{3}f(x) + 2$,

б) $y = 3 - \frac{1}{2}f(x)$,

в) $y = f\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$,

г) $y = f\left(3 - \frac{1}{2}x\right)$,

где график $y = f(x)$ имеет вид:



Домашнее задание по теме: «Свойства функций»

Свойства функций

ЗАДАЧА 1 **1 балл**

Докажи, что если f — монотонная функция, то композиция $g = f \circ f$ — возрастающая функция на каждом интервале, где она определена.

ЗАДАЧА 2 **0,5 балла**

Приведи пример двух строго возрастающих на $\mathbb{R}$ функций, произведение которых является строго убывающей функцией.

ЗАДАЧА 3 **0,5 балла**

Приведи пример двух неограниченных функций f и g таких, что композиция функций $f \circ g$ является ограниченной.

ЗАДАЧА 4 **1 балл**

Даны две ограниченные функции f и g, причём $g(x) \neq 0$.

а) (0,4 балла) Докажи, что произведение функций fg — ограниченная функция.

б) (0,6 балла) При каком дополнительном условии функция $\frac{f}{g}$ будет также ограниченной функцией? Приведи доказательство и контрпример. (В данном случае контрпример состоит из функций f и g таких, что твоё дополнительное условие не выполняется и функция $\frac{f}{g}$ является неограниченной.)

ЗАДАЧА 5 **1 балл**

Покажи, что следующие функции являются нечётными:

а) (0,4 балла) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ $(-1 < x < 1)$;

б) (0,6 балла) $y = \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$.

ЗАДАЧА 6 **0,5 балла**

Известно, что функция f не является ни чётной, ни нечётной, а функция g — нечётная. Может ли функция $f + g$ быть:

а) (0,2 балла) чётной;

б) (0,3 балла) нечётной?

Если может, то приведи пример. Если не может, то докажи.

Эскизы композиций функций

ЗАДАЧА 7 **1 балл**

Построй эскиз графика композиции функций на основании анализа интервалов монотонности: $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

ЗАДАЧА 8 **1 балл**

Построй эскиз графика композиции функций на основании анализа интервалов монотонности: $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 4x)$.

ЗАДАЧА 9 **2 балла**

Построй эскиз графика композиции функций на основании анализа интервалов монотонности: $y = e^{\frac{1}{x^2+4x-5}}$.

Домашнее задание по теме: «Последовательности»

Определение последовательности и способы ее задания

ЗАДАЧА 1 **0,5 балла**

Какие из чисел $a = 79$, $b = 144$, $c = 510$, $d = 2584$ являются членами последовательности $\{a_n\}$ такой, что $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$?

Свойства последовательностей

ЗАДАЧА 2 **1 балл**

Докажи, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ является строго убывающей.

ЗАДАЧА 3 **2,5 балла**

Даны последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, причём $u_n = x_n + y_n$, $v_n = x_n y_n$. Докажи или опровергни утверждения:

а) Для того чтобы последовательность $\{u_n\}$ была строго возрастающей достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими.

б) Для того чтобы последовательность $\{u_n\}$ была строго убывающей необходимо, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были убывающими.

в) Для того чтобы последовательность $\{v_n\}$ была строго возрастающей достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими.

г) Для того чтобы последовательность $\{v_n\}$ была строго возрастающей необходимо, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими.

д) Известно, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ убывают. Для того чтобы $\{u_n\}$ была строго убывающей необходимо, чтобы хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ была строго убывающей.

ЗАДАЧА 4 **2 балла**

Укажи, какие из следующих утверждений эквивалентны тому, что последовательность ограничена сверху:

а) $\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant C$;

б) $\exists C \in \mathbb{R}, C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C$;

в) $\exists C \in \mathbb{R}, C < 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C;$
г) $\forall C \in \mathbb{R}, C > 0 \, \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C;$
д) $\exists C \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n < C;$
е) $\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| < C.$

Какие из утверждений являются достаточными для того, чтобы последовательность была ограничена сверху?

ЗАДАЧА 5 **1 балл**

Верны ли следующие утверждения? Если верно, то докажи; если неверно, то приведи контрпример.

а) Если x_n и y_n — неограниченные последовательности, то последовательность $z_n = x_n + y_n$ также является неограниченной.
б) Если последовательность x_n ограничена, а последовательность y_n — не ограничена, то последовательность $z_n = x_n + y_n$ не ограничена.
в) Если последовательность x_n ограничена, а последовательность y_n — не ограничена, то последовательность $z_n = x_n y_n$ не ограничена.

ЗАДАЧА 6 **1 балл**

Докажи, что последовательность $b_n = \frac{n^2}{n+3}$ не является ограниченной.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Найди предел $$\lim_{x \to 2}(2x+1).$$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	5,00/5.00	ОПК-1
2.	Найди вертикальную асимптоту функции $$f(x) = \frac{x^3}{x-2}.$$ Ответ запиши в виде *x* = *a*, где *a* – число. А. x=0 Б. x=1 В. x=2 Г. x=3	В	ПК-1
3.	Найди предел $$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n+1}.$$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	2,00/2.00	ОПК-1

4.	Найди предел $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3(x-1)}.$$ Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	0,33/0.33	ПК-1
5.	Последовательность задана уравнением: $a_n = n^2 + 2025$. Является ли она: А. Возрастающей; Б. Убывающей; В. Не монотонной.	А	ПК-1
6.	Найди точку экстремума функции $y(x) = x^2 - 4x + 3$	2	ПК-1
7.	Определи промежутки убывания функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. А. $(-\infty; 0)$ Б. $(2;+\infty)$ В. $(-\infty; 0) \cup (2;+\infty)$ Г. $(0; 2)$	Г	ОПК-1
8.	Найди максимальное значение функции $f(x) = 5xe^{1-x}$ на отрезке [0; 3]. А. 3 Б. 5 В. 7 Г. 9	Б	ПК-1
9.	Найди вторую производную функции $f(x) = x^4 + \ln(x)$ в точке $x_0 = 2$. Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.	47,75/47.75	ОПК-1
10.	Найди точку разрыва функции	А	ПК-1

	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{\lvert x - 2 \rvert}$. Выбери правильный вариант ответа: А. x = 2 Б. x = -2 В. x = 2 и x = -2 Г. Функция непрерывна		
11.	Дана функция $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leqslant 0; \\ ax + b, & \text{если } 0 < x < 2; \\ 2x + 3, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$ Выбери все пары значений *a* и *b*, при которых функция *f* непрерывна на R. А. *a* = 2, *b* = 0; Б. *a* = 3, *b* = 1; В. *a* = 1, *b* = 1; Г. *a* = 3, *b* = 0.	Б	ОПК-1