

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Методы выпуклой оптимизации»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Программа двух дипломов НИУ
ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2024

**Москва
2024**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	6
4. Содержание дисциплины (модуля)	7
5. Учебно-методическое обеспечение	9
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Методы выпуклой оптимизации» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Методы выпуклой оптимизации» позволяет студентам широко применять полученные знания в различных областях, таких как экономика, инженерия и информатика, что позволяет эффективно решать практические задачи. Кроме того, знание этих методов способствует развитию аналитического мышления и навыков решения комплексных проблем.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 2 курсе в 3 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): заключается в освоении студентами основных техник и алгоритмов, позволяющими находить оптимальные решения в различных задачах, связанных с максимизацией или минимизацией функций.

Задачи изучения дисциплины (модуля) направлены на формирование у студентов следующих знаний, умений и навыков:

— формирование умения вычислять обратное распространение ошибки, определять задана ли задача на выпуклом множестве, определять свойства функционала, обобщать градиент выпуклых функций на негладкие функции, строить двойственные задачи, а также строить двойственные задачи через сопряженные функции, аналитически искать минимум функционала с ограничениями;

— формирование знаний о численных методах оптимизации, изучение различных методов численной оптимизации и изучение их сходимости, изучение влияния гиперпараметров на методы;

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

- матрично-векторное дифференцирование;
- выпуклые множества;
- выпуклые функции;
- субградиент;
- сопряженные функции;
- двойственность;
- условия Каруша-Куна-Таккера;

уметь:

- вычислять обратное распространение ошибки;
- определять задана ли задача на выпуклом множестве;
- определять свойства функционала;
- обобщать градиент выпуклых функций на негладкие функции;
- строить двойственные задачи, а также строить двойственные задачи через сопряженные функции;
- аналитически искать минимум функционала с ограничениями;

владеть:

- навыком применения различных методов численной оптимизации и изучение их сходимости;
- навыком проведения экспериментов;
- навыком подбора гиперпараметров в методах;
- навыком поиска минимум функционала на непрерывном множестве.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/ п	Основной уровень Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостояте льная работа	
Лекции	Семинары (практичес кие занятия)					
1	Основные понятия	1	1		8	Домашние задания Квиз
2	Выпуклость и гладкость. Условия оптимальности	1	1		8	Домашние задания, контрольная работа
3	Градиентный спуск	1	1		8	Домашние задания Квиз
4	Стохастическая оптимизация. SGD	1	1		8	Домашние задания, контрольная работа
5	Ускорение и оптимальные методы	1	1		8	Домашние задания Квиз
6	Метод сопряженных градиентов	1	1		8	Домашние задания Квиз
7	Метод Ньютона и квазиньютоновские методы	1	1		8	Домашние задания Квиз
8	Субградиентный метод, адаптивные методы	1	1		8	Домашние задания Квиз
9	Проекция и алгоритм Франк-Вульфа	1	1		8	Домашние задания Квиз
10	Метод зеркального спуска	1	1		8	Домашние задания Квиз
11	Метод штрафных функций. ADMM	1	1		8	Домашние задания Квиз
12	Метод внутренней точки	1	1		8	Домашние задания Квиз
13	Седловые задачи	1	1		8	Домашние задания Квиз
14	Стохастическая оптимизация. Редукция дисперсии	1	1		10	Домашние задания Квиз
15	Распределенная оптимизация	1	1		10	Домашние задания Квиз
	Экзамен			6		
	Итого:	30	30	6	124	
№п/ п	Продвинутый уровень Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостояте льная работа	
Лекции	Семинары (практичес кие занятия)					
1	Вспоминаем линейную алгебру. Скорость сходимости последовательностей	1	1		8	Домашние задания Квиз

2	Матричное дифференцирование и одномерная оптимизация	1	1		8	Домашние задания, контрольная работа
3	Автоматическое дифференцирование	1	1		8	Домашние задания Квиз
4	Выпуклость и сильная выпуклость	1	1		8	Домашние задания, контрольная работа
5	Условия оптимальности и ККТ	1	1		8	Домашние задания Квиз
6	Линейное программирование и симплекс-алгоритм	1	1		8	Домашние задания Квиз
7	Градиентный спуск и анализ сходимости	1	1		8	Домашние задания Квиз
8	Ускорение градиентного спуска	1	1		8	Домашние задания Квиз
9	Метод сопряженных градиентов	1	1		8	Домашние задания Квиз
10	Метод Ньютона и квази-Ньютоновские методы	1	1		8	Домашние задания Квиз
11	Проекционные методы и Frank-Wolfe	1	1		8	Домашние задания Квиз
12	Субградиенты и проксимальные методы	1	1		8	Домашние задания Квиз
13	Стохастический градиентный спуск	1	1		8	Домашние задания Квиз
14	Методы уменьшения дисперсии	1	1		10	Домашние задания Квиз
15	Современные методы и практики оптимизации	1	1		10	Домашние задания Квиз
	<i>Экзамен</i>			6		
	Итого:	30	30	6	124	
	Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)	190				
	Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)	5				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
Основной уровень		
1	Основные понятия	Введение в линал
2	Выпуклость и гладкость. Условия оптимальности	Матрично-векторное дифференцирование
3	Градиентный спуск	Стохастическая оптимизация. SGD. Стохастическая оптимизация. Редукция дисперсии
4	Стохастическая оптимизация. SGD	Ускорение и оптимальные методы. Метод Ньютона и квазиньютоновские методы
5	Ускорение и оптимальные методы	Выпуклые множества

6	Метод сопряженных градиентов	Выпуклые функции
7	Метод Ньютона и квазиньютоновские методы	Субдифференциал и субградиент
8	Субградиентный метод, адаптивные методы	Сопряженные функции
9	Проекция и алгоритм Франк-Вульфа	Двойственность по Лагранжу
10	Метод зеркального спуска	
11	Метод штрафных функций. ADMM	ККТ
12	Метод внутренней точки	
13	Седловые задачи	Сопряженные конусы
14	Стохастическая оптимизация. Редукция дисперсии	От LP до SDP
15	Распределенная оптимизация	Cvxpy и Scipy
Продвинутый уровень		
1	Вспоминаем линейную алгебру. Скорость сходимости последовательностей	Матричные вычисления, нормы, LoRA, анализ сходимости
2	Матричное дифференцирование и одномерная оптимизация	Градиенты матричных функций, line search методы, Brent method
3	Автоматическое дифференцирование	Forward/reverse mode AD, gradient checkpointing, упражнения на AD
4	Выпуклость и сильная выпуклость	Доказательства выпуклости практических задач ML(линейная/логистическая регрессия, SVM), Условие Поляка - Лоясиевича. Доказательства невыпуклости практических задач ML.
5	Условия оптимальности и ККТ	Множители Лагранжа, ККТ условия, adversarial attacks
6	Линейное программирование и симплекс-алгоритм	Планирование производства, транспортная задача, max-flow min-cut, применения ЛП
7	Градиентный спуск и анализ сходимости	Теоретический анализ, выбор размера шага, PL-условие
8	Ускорение градиентного спуска	Метод тяжелого шарика, Ускорение Нестерова. Ускоренный метод из полиномов Чебышёва
9	Метод сопряженных градиентов	CG для квадратичных задач, нелинейный CG, патологические примеры
10	Метод Ньютона и квази-Ньютоновские методы	Newton method, BFGS, L-BFGS, cubic-regularized Newton
11	Проекционные методы и Frank-Wolfe	Проекция на симплекс, другие виды множеств, PGD, Frank-Wolfe algorithm
12	Субградиенты и проксимальные методы	Субдифференциалы, ISTA/FISTA, image denoising, L1-регуляризация
13	Стохастический градиентный спуск	SGD vs GD, адаптивные методы (Adam, AdaGrad, RMSProp, AdamW)
14	Методы уменьшения дисперсии	SVRG, SAG/SAGA, эксперименты с нейросетями
15	Современные методы и практики оптимизации	SAM, mode connectivity, grokking, Muon optimizer, distributed training

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Выпуклая оптимизация : учебник для вузов / М. А. Горский, И. Ю. Выгодчикова, Д. А. Максимов, М. А. Халиков. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 82 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-17782-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/568662>.

2. Сухарев, А. Г. Методы оптимизации : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 367 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3859-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/507818>.

3. Токарев, В. В. Методы выпуклой оптимизации : учебник для вузов / В. В. Токарев. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 440 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04712-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563479>.

4. Методы оптимизации : учебник и практикум для вузов / Ф. П. Васильев, М. М. Потапов, Б. А. Будак, Л. А. Артемьева ; под редакцией Ф. П. Васильева. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 375 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-6157-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560070>.

Дополнительная литература:

1. Сухарев, А. Г. Методы оптимизации : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 367 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3859-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/507818>.

2. Терсенов, А. С. Лекции по прикладному функциональному анализу : учебник для вузов / А. С. Терсенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 83 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18812-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/568927>.

3. Максимова, О. Д. Основы математического анализа: неравенства и оценки : учебное пособие для вузов / О. Д. Максимова. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 185 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08224-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/541118>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех

видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		

Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Методы выпуклой оптимизации» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания и контрольные работы, квизы, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия

Семинарское занятие – активное взаимодействие студентов с преподавателем и друг

с другом, направленное на применение теоретических знаний на практике.

Занятие включает выполнение конкретных заданий, лабораторных работ или проектов, что способствует глубокому пониманию материала. Студенты должны заранее ознакомиться с темой занятия и подготовить необходимые материалы. В процессе работы важно активно участвовать в обсуждениях, задавать вопросы и делиться мнениями. Преподаватель предоставляет обратную связь и направляет студентов, что позволяет улучшить их навыки и углубить знания.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Методы выпуклой оптимизации»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме **экзамена**, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Методы выпуклой оптимизации» для обоих уровней оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
Домашние задания	25%	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	40%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Бонусные баллы	10%	Активная работа студента во время семинарских занятий
Экзамен	25%	Письменная или устная работа над заданием, направленным на проверку полученных знаний и навыков по дисциплине (модулю)

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Методы выпуклой оптимизации»: « $0,25 \times$ среднее за домашние задания + $0,4 \times$ среднее за контрольные работы + $0,1 \times$ среднее за бонусные баллы + $0,25 \times$ экзамен».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

Домашнее задание: Выпуклость и гладкость. Условия оптимальности

1. Определите, что такое выпуклая функция и приведите пример.
2. Объясните, что такое гладкость функции и как она связана с производными.
3. Сформулируйте условия оптимальности первого и второго порядка для выпуклых функций.
4. Приведите пример функции, которая является выпуклой, но не гладкой.
5. Каковы геометрические интерпретации условий оптимальности?

Домашнее задание

Классы множеств

ЗАДАЧА 1	2 балла Проверь, выпукло ли множество $S = \{ x \in \mathbb{R}^d : x_1 \leq 2x_2 \leq \dots \leq dx_d \}.$
ЗАДАЧА 2	2 балла Проверь, выпукло ли множество $S = \{ x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1 \}.$
ЗАДАЧА 3	2 балла Проверь, выпукло ли множество $S = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 \leq x_2 \leq x_1 + 4 \}.$
ЗАДАЧА 4	2 балла Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^d$ и $\ \cdot\ $ — произвольная норма на \mathbb{R}^d . Для $a \geq 0$ зададим множество $S_a = \{ x : \text{dist}(x, S) \leq a \},$ где $\text{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} \ x - y\ $. Множество S_a называется расширенным на a относительно S . Докажи, что если S выпукло, то S_a также выпукло.
ЗАДАЧА 5	2 балла Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^d$ и $\ \cdot\ $ — произвольная норма на \mathbb{R}^d . Для $a \geq 0$ зададим множество $S_{-a} = \{ x : B(x, a) \subset S \},$ где $B(x, a)$ — открытый шар. Множество S_{-a} называется суженным на a относительно S . Докажи, что если S выпукло, то S_{-a} также выпукло.
ЗАДАЧА 6	2 балла Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^d$ и $x^0 \in X$. Докажи, что множество $K(X, x^0) = \{ y \in \mathbb{R}^d : y^\top x^0 \geq y^\top x \forall x \in X \}$ является выпуклым конусом.

Домашнее задание

Субдифференциал и субградиент

ЗАДАЧА 1	2,5 балла Найди субдифференциал функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = \max\{-x, x, x^2\}.$
ЗАДАЧА 2	2,5 балла Найди субдифференциал функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = x - 2 + x + 2 + x - 1 + x^2.$
ЗАДАЧА 3	2,5 балла Найди субдифференциал функции $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = \log(1 + e^{\ x\ _1}).$
ЗАДАЧА 4	2,5 балла Найди субдифференциал функции $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = (\max(0, \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c))^3.$ Здесь $A \in \mathbb{S}_{++}^d$, $b \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$.
ЗАДАЧА 5	2,5 балла Найди субдифференциал функции $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = \left(\sum_{i=1}^d \max(0, x_i) \right)^2.$

Домашнее задание

Оптимизация для всех! Задачи на дом. Неделя 4

ЗАДАЧА 1	<p>2 балла</p> <p>Докажите, что эта функция выпукла:</p> $f(x, y, z) = z \log(e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}}) + (z - 2)^2 + e^{\frac{1}{z}}$ <p>где функция $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет область определения, определённую как:</p> $\text{dom } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y > 0, z > 0\}.$																																													
ЗАДАЧА 2	<p>1 балл</p> <p>Центр масс тела является важным понятием в физике (механике). Для системы материальных точек с массами m_i и координатами x_i, центр масс определяется как:</p> $x_c = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{\sum_{i=1}^k m_i}$ <p>Центр масс тела не всегда лежит внутри тела. Например, центр масс бублика находится в его отверстии. Докажи, что центр масс системы материальных точек лежит в выпуклой оболочке множества этих точек.</p>																																													
ЗАДАЧА 3	<p>1 балл</p> <p>Докажи, что $\text{conv}\{xx^T : x \in \mathbb{R}^n, \ x\ = 1\} = \{A \in S_+^n : \text{tr}(A) = 1\}$.</p>																																													
ЗАДАЧА 4	<p>1 балл</p> <p>Докажи, что множество $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x_1} \leq x_2\}$ является выпуклым.</p>																																													
ЗАДАЧА 5	<p>1 балл</p> <p>Рассмотрим функцию $f(x) = x^d$, где $x \in \mathbb{R}_+$. Заполни следующую таблицу + или -. Объясни свои ответы (с доказательствами).</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">d</th> <th style="text-align: center;">Выпуклая</th> <th style="text-align: center;">Вогнутая</th> <th style="text-align: center;">Строго выпуклая</th> <th style="text-align: center;">μ-сильно выпуклая</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">$-2, x \in \mathbb{R}_{++}$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$-1, x \in \mathbb{R}_{++}$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">0</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">0.5</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\in (1; 2)$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\sim \infty$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Докажи, что функция энтропии, определённая как</p> $f(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log(x_i),$ <p>с $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}_{++}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, является строго вогнутой.</p>	d	Выпуклая	Вогнутая	Строго выпуклая	μ -сильно выпуклая	$-2, x \in \mathbb{R}_{++}$					$-1, x \in \mathbb{R}_{++}$					0					0.5					1					$\in (1; 2)$					2					$\sim \infty$				
d	Выпуклая	Вогнутая	Строго выпуклая	μ -сильно выпуклая																																										
$-2, x \in \mathbb{R}_{++}$																																														
$-1, x \in \mathbb{R}_{++}$																																														
0																																														
0.5																																														
1																																														
$\in (1; 2)$																																														
2																																														
$\sim \infty$																																														
ЗАДАЧА 7	<p>2 балла</p> <p>Докажи, что максимум выпуклой функции f над многогранником $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$ достигается в одной из его вершин, т. е.</p> $\sup_{x \in P} f(x) = \max_{i=1, \dots, k} f(v_i).$ <p>Более сильное утверждение: максимум выпуклой функции над замкнутым ограниченным выпуклым множеством достигается в крайней точке, т. е. точке в множестве, которая не является выпуклой комбинацией любой другой точки в множестве (тебе не нужно его доказывать). Подсказка: Предположи, что утверждение неверно, и используй неравенство Йенсена.</p>																																													
ЗАДАЧА 8	<p>1 балл</p> <p>Докажи, что два определения μ-сильно выпуклых функций эквивалентны:</p> <ol style="list-style-type: none"> $f(x)$ является μ-сильно выпуклой \iff для любых $x_1, x_2 \in S$ и $0 \leq \lambda \leq 1$ для некоторого $\mu > 0$: $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \ x_1 - x_2\ ^2$ $f(x)$ является μ-сильно выпуклой \iff существует $\mu > 0$ такое, что функция $f(x) - \frac{\mu}{2} \ x\ ^2$ является выпуклой. 																																													

Примерные задания по контрольной работе

Контрольная работа

Задание 1: Метод сопряженных градиентов

- Опишите алгоритм метода сопряженных градиентов. В чем его преимущества по сравнению с методом градиентного спуска?
- Каковы условия сходимости метода сопряженных градиентов?

3. Приведите пример задачи, где метод сопряженных градиентов будет эффективен.
4. Рассчитайте несколько шагов метода сопряженных градиентов для функции $f(x)=x^2+2y^2$ с начальной точкой $(x_0, y_0)=(1,1)$.
5. В чем разница между полным и неполным методом сопряженных градиентов?

Задание 2: Метод Ньютона и квазиньютоновские методы

6. Объясните, как работает метод Ньютона. Какова его сходимость?
7. Какие проблемы могут возникнуть при использовании метода Ньютона?
8. Опишите, как работают квазиньютоновские методы, и приведите пример одного из них.
9. Рассчитайте шаги метода Ньютона для функции $f(x)=x^2-4x+4$.
10. Как можно улучшить производительность метода Ньютона?

Задание 3: Субградиентный метод и адаптивные методы

1. Определите, что такое субградиентный метод и в каких случаях он применяется.
2. Объясните, как работает адаптивный метод градиентного спуска.
3. Приведите пример функции, для которой субградиентный метод будет полезен.
4. Каковы основные преимущества и недостатки субградиентного метода?
5. Рассчитайте обновление параметров с использованием субградиентного метода для функции $f(x)=|x|$.

Задание 4: Проекция и алгоритм Франк-Вульфа

6. Опишите, что такое проекция на выпуклую оболочку и как она используется в оптимизации.
7. Как работает алгоритм Франк-Вульфа? Приведите его шаги.
8. В каких случаях алгоритм Франк-Вульфа может быть предпочтительнее других методов?
9. Приведите пример задачи, где алгоритм Франк-Вульфа может быть успешно применен.
10. Какова сложность алгоритма Франк-Вульфа в зависимости от размерности задачи?

Задание 5: Метод зеркального спуска

1. Объясните, как работает метод зеркального спуска и в каких случаях он применяется.
2. Какие преимущества дает метод зеркального спуска по сравнению с обычными методами градиентного спуска?
3. Приведите пример задачи, где метод зеркального спуска будет эффективен.
4. Какова сложность метода зеркального спуска?
5. Рассчитайте шаги метода зеркального спуска для функции $f(x)=0.5(x-3)^2$ с начальной точкой $x_0=0$.

Задание 6: Метод штрафных функций и ADMM

6. Что такое метод штрафных функций и как он работает?
7. Объясните, как работает метод ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers).
8. В каких случаях метод ADMM может быть предпочтительнее других методов?
9. Приведите пример задачи, где применение метода штрафных функций будет уместным.
10. Каковы основные преимущества и недостатки методов штрафных функций и ADMM?

Задание 7: Метод внутренней точки

1. Опишите, как работает метод внутренней точки и в каких случаях он применяется.
2. Какова сложность метода внутренней точки для линейных программ?
3. Приведите пример задачи, где метод внутренней точки будет эффективен.
4. Какие проблемы могут возникнуть при использовании метода внутренней точки?
5. Рассчитайте шаги метода внутренней точки для простой задачи оптимизации.

Задание 8: Седловые задачи

6. Определите, что такое седловая задача и приведите пример.

7. Каковы условия оптимальности для седловых задач?
8. Объясните, как можно решить седловую задачу с помощью метода градиентного спуска.
9. Приведите пример применения седловых задач в экономике или теории игр.
10. Каковы основные трудности, возникающие при решении седловых задач?

Примерные задания для аудиторной работы

Стохастическая оптимизация

Вопрос 1

Что такое стохастическая оптимизация?

- a) Оптимизация с использованием детерминированных алгоритмов
- b) Оптимизация, учитывающая случайные элементы в модели
- c) Оптимизация, основанная на линейных уравнениях
- d) Оптимизация с фиксированными параметрами

Вопрос 2

Какой из следующих методов является стохастическим?

- a) Метод градиентного спуска
- b) Метод Ньютона
- c) Генетические алгоритмы
- d) Метод Лагранжа

Вопрос 3

В чем заключается основное преимущество стохастических методов оптимизации?

- a) Высокая точность
- b) Быстрая сходимость
- c) Способность находить глобальный минимум в сложных ландшафтах
- d) Простота реализации

Вопрос 4

Что такое стохастический градиентный спуск (SGD)?

- a) Метод, использующий весь набор данных для вычисления градиента
- b) Метод, использующий случайный поднабор данных для вычисления градиента
- c) Метод, основанный на втором производном
- d) Метод, не требующий градиента

Вопрос 5

Какое из следующих утверждений верно для стохастического градиентного спуска?

- a) Он всегда находит глобальный минимум
- b) Он может быть менее устойчивым, чем обычный градиентный спуск
- c) Он требует больше вычислительных ресурсов
- d) Он не может применяться к большим данным

Вопрос 6

Какой метод часто используется в стохастической оптимизации для решения задач с большим количеством переменных?

- a) Метод градиентного спуска
- b) Эволюционные алгоритмы
- c) Метод внутренней точки
- d) Метод Лагранжа

Вопрос 7

В чем заключается принцип работы генетических алгоритмов?

- a) Использование градиентов для поиска оптимума
- b) Моделирование естественного отбора и эволюции
- c) Линейная аппроксимация функции
- d) Оптимизация с использованием матричных операций

Вопрос 8

Какой из следующих методов является примером стохастической оптимизации?

- a) Метод Ньютона
- b) Алгоритм муравьиной колонии
- c) Метод градиентного спуска
- d) Метод сходимости

Вопрос 9

Что такое "шум" в контексте стохастической оптимизации?

- a) Погрешности в измерениях
- b) Случайные колебания в данных
- c) Аномалии в алгоритме
- d) Все вышеперечисленное

Вопрос 10

Как стохастическая оптимизация может быть использована в машинном обучении?

- a) Для уменьшения размеров данных
- b) Для улучшения точности модели
- c) Для нахождения оптимальных гиперпараметров
- d) Все вышеперечисленное

Градиентный спуск

Вопрос 1

Что такое градиентный спуск?

- a) Метод нахождения максимума функции
- b) Метод минимизации функции, основанный на градиенте
- c) Метод, использующий только значения функции
- d) Метод, основанный на случайных значениях

Вопрос 2

Какова основная идея градиентного спуска?

- a) Перемещение в сторону наибольшего градиента
- b) Перемещение в сторону наименьшего градиента
- c) Перемещение по фиксированной траектории
- d) Перемещение случайным образом

Вопрос 3

Какой из следующих параметров является критически важным для градиентного спуска?

- a) Размер шага (learning rate)
- b) Количество итераций
- c) Размер выборки
- d) Количество переменных

Вопрос 4

Что происходит, если размер шага слишком велик в градиентном спуске?

- a) Алгоритм сойдется быстрее
- b) Алгоритм может не сойтись и "перепрыгнуть" минимум
- c) Алгоритм всегда найдет оптимум
- d) Алгоритм будет работать медленно

Вопрос 5

Какой вариант градиентного спуска использует весь набор данных для вычисления градиента?

- a) Стохастический градиентный спуск
- b) Пакетный градиентный спуск
- c) Мини-батч градиентный спуск
- d) Адаптивный градиентный спуск

Вопрос 6

Какой из следующих методов является вариантом градиентного спуска?

- a) Метод Нестерова
- b) Метод Бroyдена
- c) Метод Лагранжа
- d) Метод Ньютона

Вопрос 7

Что такое "падение" в контексте градиентного спуска?

- a) Процесс увеличения функции
- b) Процесс уменьшения функции
- c) Процесс вычисления градиента
- d) Процесс генерации случайных значений

Вопрос 8

Какой из следующих методов может помочь избежать проблемы застревания в локальных минимумах?

- a) Увеличение размера шага
- b) Использование импульса
- c) Уменьшение количества итераций
- d) Использование фиксированного шага

Вопрос 9

Какой из следующих алгоритмов является адаптивным методом градиентного спуска?

- a) Adam
- b) SGD
- c) RMSprop
- d) Все вышеперечисленное

Вопрос 10

Как можно улучшить сходимость градиентного спуска?

- a) Уменьшение размера выборки
- b) Использование различных стратегий изменения размера шага
- c) Увеличение количества переменных
- d) Увеличение сложности функции

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Какова основная идея метода Ньютона для нахождения экстремумов функции? а) Использование только первого производного б) Использование первого и второго производных в) Использование только второго производного г) Использование численных методов	b	ОПК-1
2.	Какой из следующих методов является квазиньютоновским? а) Метод градиентного спуска б) Метод Бroyдена-Флетчера-Голдфарба-Шанно (BFGS) в) Метод Ньютона г) Метод субградиентов	b	ОПК-1
3.	В каких случаях целесообразно использовать субградиентный метод? а) Для гладких функций б) Для невыпуклых функций в) Для выпуклых, но не гладких функций г) Для всех типов функций	c	ОПК-1
4.	Какова основная цель метода зеркального спуска? а) Минимизация функции без ограничений б) Поиск оптимального решения в выпуклой оболочке в) Преобразование задачи оптимизации в задачу с ограничениями г) Устранение необходимости вычисления градиента	b	ОПК-1
5.	Какой из следующих подходов является основным в методе внутренней точки? а) Поиск экстремума на границе области допустимых решений б) Постепенное приближение к границе области допустимых решений в) Использование штрафных функций для обработки ограничений г) Применение метода Лагранжа для нахождения оптимума	b	ПК-1
6.	Какой метод оптимизации основан на использовании производных для нахождения локальных минимумов и максимумов?	Метод Ньютона	ОПК-1
7.	Как называется метод, который используется для уменьшения дисперсии в стохастических методах оптимизации?	Редукция дисперсии	ОПК-1
8.	Какой алгоритм оптимизации использует случайные градиенты для обновления параметров модели?	SGD/ Стохастический градиентный спуск	ОПК-1
9.	Какой метод используется для нахождения локального минимума в ограниченных областях с использованием проекций?	Алгоритм Франк-Вульфа	ПК-1

10.	Как называется подход, который сочетает в себе стохастическую оптимизацию и методы ускорения для повышения эффективности?	Ускорение	ПК-1
11.	Какой класс методов оптимизации использует вторые производные для улучшения сходимости?	Квазиньютоновские методы	ПК-1
12.	Какой термин используется для описания уменьшения вариации оценок в процессе оптимизации?	Дисперсия	ПК-1
13.	Какой метод используется для нахождения оптимального решения в задачах с ограничениями, основанный на градиентных методах?	Проекция	ПК-1