

**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета  
АНО ВО «Центральный университет»  
«07» марта 2024 г.  
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
«Математический анализ II. Основной курс»**

**Направление подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**Направленность (профиль) подготовки:** Программа двух дипломов НИУ  
ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»

**Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Срок освоения программы:** 4 года

**Год набора:** 2024

**Москва  
2024**

## Содержание

<b>1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Перечень планируемых результатов обучения</b> .....	<b>4</b>
<b>3. Тематический план</b> .....	<b>6</b>
<b>4. Содержание дисциплины (модуля)</b> .....	<b>6</b>
<b>5. Учебно-методическое обеспечение</b> .....	<b>7</b>
<b>6. Материально-техническое обеспечение</b> .....	<b>7</b>
<b>7. Методические и оценочные материалы</b> .....	<b>9</b>

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математический анализ II. Основной курс» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Математический анализ II. Основной курс» является основой для многих других математических дисциплин и научных направлений, включая физику, экономику и инженерные науки. Дисциплина (модуль) развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

### **Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе во 2 семестре.

**Цель изучения дисциплины (модуля):** в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

### **Задачи изучения дисциплины (модуля):**

- освоение пределов и непрерывности в пространстве  $(\mathbb{R}^n)$  и их обобщений;
- знание частных производных, градиентов;
- понимание структуры кратных интегралов;
- знание ряда Тейлора;
- применение понятий непрерывности для анализа функций;
- вычисление частных производных и градиентов, использование матрицы Якоби;
- вычисление кратных интегралов и применение формул для упрощения расчётов;
- дифференцирование сложных функций и интерпретация их свойств;
- применение множителей Лагранжа для нахождения экстремумов;
- использование координатных преобразований для вычисления интегралов.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач
ПК-3.	Способен применять методы математического и алгоритмического моделирования для решения как теоретических, так и практических задач в рамках профессиональной деятельности	ПК-3.1.	Знает основные методы математического и алгоритмического моделирования, а также их применение для решения теоретических и прикладных задач
		ПК-3.2.	Умеет применять методы математического и алгоритмического моделирования для анализа и

			решения различных задач в области математики и компьютерных наук
		ПК-3.3.	Имеет опыт использования методов математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач в профессиональной деятельности

### 3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		<i>Очная форма</i>				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
Лекции	Семинарские (практические занятия)					
1	Пространство $R^n$ . Функции в пространстве $R^n$	20	20		22	Домашнее задание Коллоквиум
2	Условная и безусловная оптимизация	20	20		22	Домашнее задание Контрольная работа
3	Интегралы	20	20		20	Домашнее задание Контрольная работа
	<i>Экзамен</i>			6		
	<b>Итого:</b>	<b>60</b>	<b>60</b>	<b>6</b>	<b>64</b>	
	<b>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</b>	<b>190</b>				
	<b>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</b>	<b>5</b>				

### 4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Пространство $R^n$ . Функции в пространстве $R^n$	Непрерывность функций. Предел функций и замечательные пределы. Сравнение функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке Числовые последовательности и их свойства. Пределы последовательностей
2	Условная и безусловная оптимизация	Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя. Выпуклость и задачи оптимизации. Формула Тейлора. Применение производной к исследованию функций
3	Интегралы	Определение и свойства производной. Геометрический и практический смысл производной. Параметрические и неявные функции. Нахождение их производных

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

### *Основная литература:*

1. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562115>.

2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562116>.

### *Дополнительная литература:*

1. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

2. Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560461>.

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;

— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	<a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp">https://elibrary.ru/defaultx.asp</a>
2.	База данных для IT-специалистов	<a href="https://habr.com">https://habr.com</a>
3.	База данных ScienceDirect	<a href="https://www.sciencedirect.com">https://www.sciencedirect.com</a>
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	<a href="https://minobrnauki.gov.ru/">https://minobrnauki.gov.ru/</a>
5.	Федеральный портал «Российское образование»	<a href="https://www.edu.ru/">https://www.edu.ru/</a>
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	<a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	<a href="http://school-collection.edu.ru/">http://school-collection.edu.ru/</a>
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	<a href="http://fcior.edu.ru/">http://fcior.edu.ru/</a>

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
<b>Операционные системы:</b>		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Браузеры:</b>		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Офисные приложения:</b>		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Программное обеспечение для планирования и учета времени:</b>		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления проектами:</b>		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы управления базами данных:</b>		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
<b>Системы резервного копирования (backup):</b>		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
<b>Справочно-правовые системы:</b>		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное

<b>Средства антивирусной защиты:</b>		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
<b>Среды разработки:</b>		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Пакеты программных средств и библиотек:</b>		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Системы управления библиографической информацией:</b>		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
<b>Сервисы и службы:</b>		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математический анализ II. Основной курс» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, коллоквиум, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Лекция* – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удастся, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

*Коллоквиум* – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким

темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

### **Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

#### **Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Математический анализ II. Основной курс»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме *экзамена*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

<b>Десятибалльная оценка</b>	<b>Пятибалльная оценка</b>	<b>Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)</b>
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	
8	Отлично	
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для
6	Хорошо	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Математический анализ II. Основной курс» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	14	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	50%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	30%	1	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее

**Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Математический анализ II. Основной курс»:**  $\langle 0,2 \times \text{среднее за домашние задания} + 0,5 \times \text{среднее за контрольные работы} + 0,3 \times \text{коллоквиум} \rangle$ .

### Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

#### Примерные темы для коллоквиума

- Тема «Вектор-функции»
- Определения
  - Предел вектор-функции — определение 2.
  - Непрерывность вектор-функции — определение 3.
  - Формулировки
  - Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями — теорема 1.
  - Необходимое и достаточное условие существования предела вектор-функции — теорема 2.
  - Свойства непрерывных вектор-функций, связанные с арифметическими операциями — теорема 3.
  - Доказательства
  - Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями — теорема 1.
  - Необходимое и достаточное условие существования предела вектор-функции — теорема 2.
- Тема «Множества в  $R^n$ »
- Определения

- $\varepsilon$ -окрестность точки  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  — определение 1.
  - Предел последовательности точек в  $\mathbb{R}^n$  — определение 3.
  - Ограниченное множество — определение 4.
  - Внутренняя точка — определение 5.
  - Открытое множество — определение 5.
  - Точка прикосновения — определение 6.
  - Замыкание множества — определение 7.
  - Замкнутое множество — определение 8.
  - Предельная точка — определение 9.
  - Граничные точки, граница — определение 10.
  - Изолированная точка — определение 11.
  - Линейно связное множество — определение 12.
  - Область — определение 13.
  - Компакт — определение 14.
  - Формулировки
  - Теорема Больцано — Вейерштрасса в  $\mathbb{R}^n$  — теорема 2.
  - Критерий точки прикосновения — теорема 3.
  - Замыкание всякого множества является замкнутым множеством — теорема 4.
  - Внутренность всякого множества является открытым множеством — теорема 4.
  - Доказательства
  - Критерий точки прикосновения — теорема 3.
  - Замыкание всякого множества является замкнутым множеством — теорема 4.
  - Внутренность всякого множества является открытым множеством — теорема 4
- (можно сослаться на леммы, нужные для доказательства, не доказывая их).

#### Тема «Предел функции многих переменных»

- Определения
- Предел функции (по совокупности) — определения 5, 5'.
- Предел функции по множеству — определение 6.
- Предел функции по направлению — определение 7.
- Повторный предел — определение 8.
- Формулировки
- Связь существования предела по совокупности и пределов по направлениям — теорема 1.

#### Тема «Непрерывность функции многих переменных»

- Определения
- Непрерывность функции многих переменных в точке по множеству — определение 1.
- Формулировки
- Теорема о непрерывности сложной функции — теорема 2.
- Теорема Вейерштрасса — теорема 3.

#### Тема «Дифференцирование функции нескольких переменных»

- Определения
- Частная производная — определение 1.
- Дифференцируемость функции нескольких переменных — определение 2.
- Дифференциал функции нескольких переменных — определение 3.
- Непрерывно дифференцируемая функция — определение 4.
- Градиент — определение 6.
- Производная по направлению — определение 7.

- Формулировки
- Связь дифференцируемости и непрерывности функции нескольких переменных — теорема 1.
- Связь дифференцируемости функции нескольких переменных и существования частных производных — теорема 2.
- Достаточное условие дифференцируемости — теорема 3.
- Теорема о дифференцируемости сложной функции — теорема 4, теорема 5.
- Геометрический смысл частных производных.
- Связь градиента и производной по направлению, геометрический смысл градиента — теоремы 6, 7.

- Доказательства
- Связь дифференцируемости и непрерывности функции нескольких переменных — теорема 1.
- Связь дифференцируемости функции нескольких переменных и существования частных производных — теорема 2.
- Достаточное условие дифференцируемости — теорема 3.
- Теорема о дифференцируемости сложной функции — лемма 2, лемма 3, теорема 4.
- Связь градиента и производной по направлению, геометрический смысл градиента — теоремы 6, 7.

#### Тема «Частные производные и дифференциалы высших порядков»

- Определения
- Частная производная второго порядка, частная производная порядка  $k$  — определение 1.
- Дифференциал  $k$ -го порядка — определение 2.
- Формулировки
- Теорема о равенстве смешанных производных — теорема 1.
- Дифференциал  $k$ -го порядка — лемма 1.
- Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано — определение 3, теорема 2.

#### Тема «Вектор-функция. Производная»

- Определения
- Производная вектор-функции — определение 1.
- Дифференцируемая вектор-функция, дифференциал вектор-функции
- Длина кривой — определение 4.
- Формулировки
- Правила дифференцирования — лемма 3.
- Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для вектор-функций — теорема 1.
- Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции — теорема 2.
- Достаточное условие спрямляемости кривой — теорема 3.
- Производная переменной дуги кривой — теорема 4.
- Доказательства
- Правила дифференцирования — лемма 3.
- Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции — теорема 2.
- Достаточное условие спрямляемости кривой — теорема 3.

#### Тема «Дифференцирование отображений»

- Определения
- Якобиан — первый параграф.
- Дифференцируемое отображение — определение 1.

- Матрица Гессе — определение 3.
- Формулировки
- Теорема о дифференцируемом отображении — теорема 1.
- Дифференциал композиции отображений — теорема 2.

#### Тема «Теорема о неявной функции»

- Определения
- Неявная функция — определение 1.
- Формулировки
- Теорема о неявной функции — теорема 1.
- Теорема о неявной функции, зависящей от нескольких переменных — теорема 2.
- Теорема о системе неявных функций — теорема 3.

#### Тема «Безусловная оптимизация»

- Определения
- Точка локального экстремума, минимума, максимума — определение 1.
- Стационарная точка — определение 2.
- Формулировки
- Необходимое условие безусловного экстремума — теорема 1.
- Достаточные условия безусловного экстремума — теорема 3.
- Доказательства
- Необходимое условие безусловного экстремума — теорема 1.
- Достаточные условия безусловного экстремума — теорема 3.

#### Тема «Условная оптимизация»

- Формулировки
- Необходимые условия условного экстремума — теорема 3.
- Достаточные условия условного экстремума — теорема 4.

#### Тема «Неопределённый интеграл. Часть 1»

- Определения
- Первообразная — определение 1.
- Неопределённый интеграл — определение 2.
- Формулировки
- Теорема о структуре множества первообразных — теорема 1.
- Линейность неопределённого интеграла — лемма 3.
- Теорема о замене переменной — теорема 4.
- Интегрирование по частям — теорема 5.
- Доказательства
- Теорема о структуре множества первообразных — лемма 1, теорема 1.
- Линейность неопределённого интеграла — лемма 3.
- Теорема о замене переменной — теорема 4.
- Интегрирование по частям — теорема 5.

#### Тема «Определённый интеграл»

- Формулировки
- Необходимое условие интегрируемости — теорема 1.
- Критерий интегрируемости — определение 6, теорема 3.
- Линейность определённого интеграла — теорема 4.
- Интегрирование неравенств — теорема 5.
- Интегрируемость модуля — теорема 6.
- Теорема о том, что изменение функции в конечном числе точек не влияет на значение интеграла — теорема 7.
- Аддитивность интеграла относительно отрезка интегрирования — теорема 8.

- Интегрируемость произведения интегрируемых функций — теорема 9.
- Необходимые условия интегрируемости — теорема 11, теорема 12, теорема 13.
- Свойства интеграла с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость — лемма 2, лемма 3.
- Формула Ньютона — Лейбница — теорема 14.
- Замена переменной в определённом интеграле — теорема 15.
- Интегрирование по частям — теорема 16.
- Доказательства
- Необходимое условие интегрируемости — теорема 1.
- Линейность определённого интеграла — теорема 4.
- Интегрирование неравенств — теорема 5.
- Интегрируемость модуля — теорема 6.
- Теорема о том, что изменение функции в конечном числе точек не влияет на значение интеграла — теорема 7.
- Аддитивность интеграла относительно отрезка интегрирования — теорема 8.
- Интегрируемость произведения интегрируемых функций — теорема 9.
- Необходимые условия интегрируемости — теорема 11, теорема 12, теорема 13.
- Свойства интеграла с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость — лемма 2, лемма 3.
- Формула Ньютона — Лейбница — теорема 14.
- Замена переменной в определённом интеграле — теорема 15.
- Интегрирование по частям — теорема 16.

## Примерные задания по контрольной работе

### Контрольная работа №1

\*\*\*  
ЗАДАЧА 1

**0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 балла**

Укажи:

- |                                   |                         |
|-----------------------------------|-------------------------|
| а) внутренние точки,              | г) изолированные точки, |
| б) граничные точки,               | д) точки прикосновения  |
| в) предельные точки,<br>множества |                         |

$$X \equiv \underline{2} + 1/n^3 : n \in \mathbb{N} \} \cup (3; 4] \cup \{5\}.$$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 2

**1 + 1 балл**

Исследуй функцию

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{|x^2 y^2|^{1/2}}{(x^2 - xy + y^2)^\alpha}, & \text{если } (x; y) \neq (0; 0), \\ 0, & \text{если } (x; y) = (0; 0). \end{cases}$$

на дифференцируемость в точке (0; 0)

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| а) при $\alpha = \frac{1}{2}$ ; | б) при $\alpha = \frac{1}{4}$ . |
|---------------------------------|---------------------------------|

\*\*\*  
ЗАДАЧА 3

**2 балла**

Исследуй на экстремум функцию  $u(x; y)$ , заданную неявно уравнением

$$2x^2 + y^2 - u^2 + 4x - 6y - 4u + 8 = 0.$$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 4

**0,5 + 0,5 балла**

Вычисли интегралы:

а)  $\int (\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x})^2 dx;$                       б)  $\int x^2 \cos(x^3) dx.$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 5

**1,5 балла**

Вычисли интеграл  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x+3} dx.$

\*\*\*  
ЗАДАЧА 6

**1,5 балла**

Реши уравнение

$$y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x > 0, y > 0,$$

преобразовав его к полярным координатам.

\*\*\*  
ЗАДАЧА 7

**2 балла**

Исследуй на экстремум функцию

$$u = -2x + 8y + 3$$

при условии

$$x^2 - 4xy + 2y^2 + 1 = 0.$$

**Примерные домашние задания**  
**Домашнее задание по теме «Дифференцирование**  
**функции нескольких переменных»**

## Задачи

### Частные производные

*** ЗАДАЧА 1	1 балл
Найди частные производные функций:	
а) $f(x; y) = \operatorname{arctg}^3 x + \arcsin^3 2y - 3x \operatorname{ctg} y$ ;	
б) $f(x; y) = \frac{x(x-y)}{y^2}$ ;	
в) $f(x; y) = \sin(6x \operatorname{tg} y) - x^2 \log_5 (\sqrt[6]{11y})$ ;	
г) $f(x; y) = e^{-x^2} (\cos 3y - x \sin^4 y)$ .	

*** ЗАДАЧА 2	1 балл
Вычисли частные производные функций:	
а) $f(x; y) = e^{\operatorname{arctg}(xy^3)}$ в точке $(1; 1)$ ;	
б) $g(x; y) = (3x + y)^{3x+y}$ в точке $(1; -2)$ .	

### Дифференцируемость функции нескольких переменных

*** ЗАДАЧА 3	1 балл
Исследуй на непрерывность, дифференцируемость и существование частных производных в точке $(0; 0)$ функцию	
$f(x; y) = \sqrt{ xy }$ .	

*** ЗАДАЧА 4	1 балл
Исследуй на дифференцируемость в точке $(2; 0)$ функцию	
$f(x; y) = (x^2 + xy - 4) \sqrt{x^2 + y^2 + xy - 4x - 2y + 4}$ .	

### Дифференцирование сложной функции

*** ЗАДАЧА 8	0,5 балла
Вычисли дифференциал функции	
$f(x; y) = e^{x^2 y + \pi \cos x}$	
в точке $(1; -\frac{\pi}{2})$ .	

*** ЗАДАЧА 9	0,5 балла
Упрости выражение $d \left( \operatorname{arctg} \frac{u^2}{v} \right)$ , где $u, v$ — дифференцируемые функции произвольного числа переменных, причём знаменатель не обращается в ноль.	

*** ЗАДАЧА 10	1 балл
Преобразуй уравнение	
$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$	
переходя к новым независимым переменным $\xi = x, \eta = x^2 + y^2$ . Найди общее решение уравнения.	

*** ЗАДАЧА 11	1 балл
Пусть $f(u; v)$ — дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция, где $u = xy, v = x^2 - y^2$ . Вырази $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ через $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$ .	

## Домашнее задание по теме «Несобственный интеграл»

### Определение и некоторые свойства несобственного интеграла

*** ЗАДАЧА 1	0,5 балла	Сходится ли интеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$ ?
*** ЗАДАЧА 2	0,5 балла	Вычисли несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ или установи его расходимость.
*** ЗАДАЧА 3	2 балл	Вычисли несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx$ , где $\alpha > 0$ , или установи его расходимость.
*** ЗАДАЧА 4	1 балл	Вычисли площадь множества точек $M = \left\{ (x; y) : x \in [0; 1), y \leq x \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right\}$ .
*** ЗАДАЧА 5	1 балл	Вычисли несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ или установи его расходимость.
*** ЗАДАЧА 8	1 балл	Докажи неравенство $\left  \int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+4} dx \right  < \frac{\pi}{4}$ .
*** ЗАДАЧА 9	1 балл	Исследуй на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} dx$ при всех значениях параметра $\alpha$ .
*** ЗАДАЧА 10	1 балл	Исследуй на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \ln^\alpha \operatorname{ch} x \cdot \arcsin \frac{2x}{3+x^2} dx$ при всех значениях параметра $\alpha$ .
*** ЗАДАЧА 11	1 балл	Исследуй на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(2+x^2) - \ln(1+x^2)}{(\sqrt{x+\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x)^\alpha} dx$ при всех значениях параметра $\alpha$ .

**Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Найди общий вид первообразной для функции $f(x) = 2x + 1$ . 1. $x^2 + x + C$ ; 2. $2x + 1 + C$ ; 3. $2x^2 + C$ ; 4. $2 + C$ .	1	ПК-1
2.	Вычисли $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ для функции $f(x; y) = 2xy$ .  1. 2; 2. $2xy$ ; 3. $2x$ ; 4. $2y$ .	1	ПК-3
3.	Посчитай определённый интеграл:  $\int_0^{\pi} \sin x \, dx.$  1. 0; 2. 2; 3. 10; 4. 4.	2	ОПК-1
4.	Вычисли $\int e^x \, dx$ .  1. $e^x + C$ ; 2. $e^x$ ; 3. 0; 4. 1.	1	ПК-1
5.	Вычисли $v + u$ , где $v = (1; 0)$ и $u = (0; 1)$ . 1. (0; 0); 2. (2; 2); 3. (1; 2); 4. (1; 1).	4	ПК-3
6.	Если функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и достигает локального минимума/максимума в точке $c$ , то чему равно $f'(c)$ ? 1. 0; 2. $\infty$ ; 3. 2; 4. 1.	1	ОПК-1