**УТВЕРЖДЕНА**

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**
**«Линейная алгебра. Углубленный курс»**

**Направление подготовки:** *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

**Направленность (профиль) подготовки:** *Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»*

**Квалификация (степень) выпускника:** *бакалавр*

**Форма обучения:** *очная*

**Срок освоения программы:** *4 года*

**Год набора:** *2024*

**Москва**
**2024**

Электронный документ

## Содержание

## 1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра. Углубленный курс» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Линейная алгебра. Продвинутый курс» является основой для многих других математических дисциплин. Дисциплина (модуль) развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

**Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в Блок 1, часть, формируемую участниками образовательных отношений как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

**Цель изучения дисциплины (модуля):** в формировании глубокого понимания алгебраических структур, эрмитовых пространств, а также их применения в различных областях науки и техники.

**Задачи изучения дисциплины (модуля)** направлены на формирование у студентов следующий знаний, умений и навыков:

— знание критерий оценки скорости сходимости итерационных методов решения СЛУ (нормы погрешности, число обусловленности);

— знание аксиоматики алгебраических структур: групп, колец и полей, их основные свойства и примеры;

— знание теоретической базы жордановой формы: жордановы клетки, инвариантные подпространства, алгоритм приведения;

— знание свойств эрмитовых пространств: эрмитовы формы, сопряжённые операторы, унитарные преобразования;

— знание теоретических основ низкоранговых приближений: сингулярное разложение, теорема эккарта-янга;

— умение сравнивать скорость сходимости различных методов (Якоби, Гаусса-Зейделя, SOR) для конкретных матриц;

— умение определять алгебраическую структуру множества по заданным операциям (проверять аксиомы групп/колец/полей);

— умение приводить матрицы к жордановой форме для операторов с кратными собственными значениями;

— умение работать в эрмитовых пространствах: вычислять эрмитово скалярное произведение, строить ортонормированные базисы;

— умение строить низкоранговые приближения матриц с заданной точностью с использованием SVD;

— владение оптимизацией итерационных методов с адаптивным выбором параметров для ускорения сходимости;

— владение применением теории групп в криптографии (поля галуа) и теории симметрий;

— владение анализом линейных операторов через их жорданову форму в дифференциальных уравнениях и динамических системах;

— владение методами функционального анализа в эрмитовых пространствах (спектральная теория, операторные неравенства);

— владение реализацией численных алгоритмов: разложение Холецкого для положительно определённых матриц, степенной метод для поиска собственных значений.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

| Компетенция | Содержание компетенции | Индикатор компетенции | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| УК-1. | Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1. | Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности. |
| | | УК-1.2. | Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем |
| | | УК-1.3. | Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации |
| ОПК-1. | Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности | ОПК-1.1. | Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики |
| | | ОПК-1.2. | Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач |
| | | ОПК-1.3. | Имеет практический опыт разработки и реализация математических моделей в профессиональной деятельности |
| ПК-1. | Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области | ПК-1.1. | Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | математики и компьютерных наук | ПК-1.2. | Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты. |
| | | ПК-1.3. | Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач |

## 3. Тематический план

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Трудоемкость, академические часы | | | | ТКУ (текущий контроль успеваемости) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Очная форма* | | | | |
| | | Контактная работа | | Контроль | Самостоятельная работа | |
| | | Лекции | Семинары (практические занятия) | | | |
| 1 | Оценка скорости сходимости методов решения СЛУ | | 4 | | 4 | Домашнее задание |
| 2 | Группы, кольца, поля | | 4 | | 6 | Домашнее задание |
| 3 | Жорданова форма матрицы | | 4 | | 6 | Домашнее задание Контрольная работа |
| 4 | Эрмитовы векторные пространства | | 6 | | 6 | Домашнее задание |
| 5 | Низкоранговые приближения | | 4 | | 6 | Домашнее задание Контрольная работа |
| 6 | Разложение Холецкого | | 4 | | 6 | Контроль теоретического материала |
| 7 | Метод степенных итераций (Power method) | | 4 | | 4 | Домашнее задание |
| | *Зачет* | | | 8 | | |
| ***Итого:*** | | | ***30*** | ***8*** | ***38*** | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)*** | | ***76*** | | | | |
| ***Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)*** | | ***2*** | | | | |

## 4. Содержание дисциплины (модуля)

| №п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Содержание дисциплины (модуля) по темам |
|---|---|---|
| 1 | Оценка скорости сходимости методов решения СЛУ | Классификация методов решения систем линейных уравнений (прямые и итерационные). Понятие скорости сходимости и критерии оценки. Анализ сходимости простейших итерационных методов (метод простой итерации, метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя). Оценка скорости сходимости с помощью спектрального радиуса и нормы матрицы итераций |
| 2 | Группы, кольца, поля | Основные определения и примеры групп, колец и полей. Свойства и типы групп (абелевы, конечные, циклические). Кольца: коммутативные и некоммутативные, единица и делители нуля. Поля и их применение в алгебре и теории чисел. |
| 3 | Жорданова форма матрицы | Понятие жордановой нормальной формы и её существование. Построение жордановых клеток. Алгоритм приведения матрицы к жордановой форме. Применение жордановой формы в решении систем дифференциальных уравнений и вычислениях. |
| 4 | Эрмитовы векторные пространства | Определение эрмитова пространства и эрмитова формы. Свойства эрмитовых форм и скалярного произведения. Ортогональные и ортонормированные базисы в эрмитовых пространствах. Спектральная теорема для эрмитовых операторов. |
| 5 | Низкоранговые приближения | Понятие и мотивация низкоранговых приближений матриц. Сингулярное разложение (SVD) и его роль в низкоранговом приближении. Методы построения низкоранговых приближений (аппроксимация по Фробениусу). Применение низкоранговых приближений в обработке данных и машинном обучении. |
| 6 | Разложение Холецкого | Определение и условия существования разложения Холецкого. Алгоритм вычисления разложения Холецкого для положительно определённых матриц. Применение разложения Холецкого в решении систем линейных уравнений и оптимизации. Связь разложения Холецкого с другими методами факторизации матриц. |
| 7 | Метод степенных итераций (Power method) | Идея и алгоритм метода степенных итераций для вычисления максимального собственного значения. Анализ сходимости метода и условия его применения. Модификации метода (сдвиг, обратный степенной метод). Применение метода в вычислительной линейной алгебре и обработке больших матриц. |

## 5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

***Основная литература:***

1. Константинова, Е. В. Теория графов: алгебраическая теория : учебник для вузов / Е. В. Константинова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 123 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-20172-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/569211.
2. Скорубский, В. И. Математическая логика : учебник и практикум для вузов / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 211 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01114-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561076.
3. Дискретная математика : учебное пособие для вузов / под научной редакцией А. Н. Сесекина. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 85 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-21182-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/559511.

***Дополнительная литература:***

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М. : Вильямс, 2009. — 784 с.

## 6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;
— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

| № | Наименование портала (издания, курса, документа) | Ссылка |
|---|---|---|
| 1. | Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека | https://elibrary.ru/defaultx.asp |
| 2. | База данных для IT-специалистов | https://habr.com |
| 3. | База данных ScienceDirect | https://www.sciencedirect.com |
| 4. | Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации | https://minobrnauki.gov.ru/ |
| 5. | Федеральный портал «Российское образование" | https://www.edu.ru/ |
| 6. | Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" | http://window.edu.ru/ |
| 7. | Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов | http://school-collection.edu.ru/ |
| 8. | Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов | http://fcior.edu.ru/ |

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

| Наименование ПО | Производство | Лицензионное / свободно распространяемое |
|---|---|---|
| **Операционные системы:** | | |
| Microsoft Imagine (Windows Client, Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Браузеры:** | | |
| Яндекс.Браузер | отечественное | свободно распространяемое |
| Google Chrome | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Офисные приложения:** | | |
| Microsoft Imagine (Visio, OneNote) | зарубежное | лицензионное |
| TeXstudio | зарубежное | свободно распространяемое |
| Adobe Acrobat Reader | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Программное обеспечение для планирования и учета времени:** | | |
| Toggle app | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления проектами:** | | |
| Microsoft Imagine (Project) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы управления базами данных:** | | |
| Microsoft Imagine (SQL Server) | зарубежное | лицензионное |
| **Системы резервного копирования (backup):** | | |
| Acronis Backup Advanced for HyperV | зарубежное | лицензионное |
| **Справочно-правовые системы:** | | |
| КонсультантПлюс: справочно-правовая система | отечественное | лицензионное |
| **Средства антивирусной защиты:** | | |
| Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition | отечественное | лицензионное |
| **Среды разработки:** | | |

| | | |
|---|---|---|
| Visual Studio Code | зарубежное | свободно распространяемое |
| Bash (Unix shell) | зарубежное | свободно распространяемое |
| Anaconda | зарубежное | свободно распространяемое |
| Robotic Operating System | зарубежное | свободно распространяемое |
| CopelliaSim | зарубежное | свободно распространяемое |
| Google Colaboratory | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Пакеты программных средств и библиотек:** | | |
| AutoPsy | зарубежное | свободно распространяемое |
| Interactive Disassembler (IDA) | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Системы управления библиографической информацией:** | | |
| Zotero | зарубежное | свободно распространяемое |
| **Сервисы и службы:** | | |
| Bind | зарубежное | свободно распространяемое |
| Docker | зарубежное | свободно распространяемое |

## 7. Методические и оценочные материалы

### Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра. Углубленный курс» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как семинары, контрольные работы и домашние задания, контроль теоретических знаний, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

*Участие в семинаре (аудиторная работа)* – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

*Контроль теоретических знаний* – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки студенту необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

*Домашнее задание* – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

*Контрольная работа* – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

*Самостоятельная работа* – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

## Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра. Углубленный курс»**

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

**Промежуточная аттестация** по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| 10 | Отлично | Зачтено | Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами. |
| 9 | Отлично | Зачтено | |
| 8 | Отлично | Зачтено | |
| 7 | Хорошо | Зачтено | Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме |
| 6 | Хорошо | Зачтено | |

| Десятибалльная оценка | Пятибалльная оценка | Оценка за зачет | Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю) |
|---|---|---|---|
| | | | рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами. |
| 5 | Удовлетворительно | Зачтено | Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования. |
| 4 | Удовлетворительно | Зачтено | |
| 3 | Не сдан | Не зачтено | Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы. |
| 2 | Не сдан | Не зачтено | |
| 1 | Не сдан | Не зачтено | |

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра. Углубленный курс» оценивается следующим образом:

**Для получения «Зачёта» по углубленному курсу нужно сдать:**

— 8 домашних заданий на продвинутом уровне (задания с черной звездочкой);

— 1 из 2 контрольных на основном уровне или выше (задания с красной и черной звездочкой);

— 1 из 2 контрольных на продвинутом уровне (задания с черной звездочкой);

— зачет на продвинутом уровне (все задания контрольной работы включая задания с черной звездочкой).

## Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

### Примерные домашние задания

### Домашнее задание по теме «Векторные пространства»

**ЗАДАЧА 8**

**(2 балла)**

Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше $n$. Покажи, что системы

$$\{1,x,x^2,\ldots,x^n\} \text{ и } \{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}, \text{ где } a \in \mathbb{R},$$

являются базисами в $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$. Найди матрицы перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.

**ЗАДАЧА 9**

**(2 балла)**

Пусть $V$ — векторное пространство, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in V$ — линейно независимая система. Найди все возможные базисы линейной оболочки среди следующих векторов

$$\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n,\ \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_1.$$

**ЗАДАЧА 10**

**(2 балла)**

Пусть $V$ — векторное пространство. Покажи, что

1. Для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \in V$.
2. Если для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{v} \in V$ выполнено $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$, то либо $\lambda = 0$, либо $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
3. Для любого вектор $\mathbf{v} \in V$ выполнено $-\mathbf{v} = (-1) \cdot \mathbf{v}$.

**ЗАДАЧА 11**

**(2 балла)**

Введём на множестве положительных вещественных чисел $V = \mathbb{R}_{>0}$ следующие операции:

- «Сложение» $\mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{vu}$, где $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ (справа обычное умножение чисел);
- «Умножение на скаляр» $\lambda * \mathbf{v} = \mathbf{v}^\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$.

Проверь, что множество $\mathbb{R}_{>0}$ с операциями $\oplus$ и $*$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$. Определи, какая у него размерность.

**ЗАДАЧА 12**

**(2 балла)**

Рассмотрим в качестве векторного пространства $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ с обычными операциями сложения и умножения на число. Роль $0$ в таком пространстве играет функция, которая во всех точках равна $0$. Проверь на линейную независимость следующие функции:

1. $1, \sin(x), \ldots, \sin^n(x)$.
2. $\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots, \sin(nx), \cos(nx)$.

**ЗАДАЧА 13**

**(2 балла)**

Рассмотрим в качестве векторного пространства $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ с обычными операциями сложения и умножения на число. Построй континуальное семейство функций $\{f_\lambda \mid \lambda \in R\}$ такое, что любой конечный набор $f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}$ (все $\lambda_i$ различны) будет линейно независимым.

**ЗАДАЧА 14**

**(2 балла)**

Пусть $V$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $U_1, \ldots, U_k \subseteq V$ — подпространства такие, что $V = \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$. Покажи, что найдётся $j$ такое, что $V = U_j$.

# Домашнее задание по теме «Сумма и пересечение подпространств»

**ЗАДАЧА 11**

**(2 балла)**

Рассмотрим векторное пространство последовательностей

$$V = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{R},\, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-100}\; \forall\, n \geqslant 100\}.$$

Зададим в нём следующие два подпространства:

$$U = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in V \mid a_{100} = a_{101}\}$$

и

$$W = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in V \mid a_{200} = 0\}.$$

Найди размерности $U \cap W$ и $U + W$.

**ЗАДАЧА 12**

**(2 балла)**

В пространстве $\mathbb{R}^4$ задана симметричная билинейная форма $\beta\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ по правилу $(x, y) \mapsto x^T B y$, где

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & -9 & 6 \\ -2 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Для оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ определим форму $\beta_\varphi$ по правилу $\beta_\varphi(x, y) = \beta(\varphi(x), \varphi(y))$. Определи максимальную размерность подпространства $\ker \beta + \ker \beta_\varphi$ для всех возможных обратимых операторов $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

**ЗАДАЧА 13**

**(2 балла)**

Пусть в $\mathbb{R}^4$ задан вектор $v$, а линейные операторы $\varphi$ и $\psi$ заданы матрицами $A$ и $A^T$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -5 & -10 \\ -2 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Выясни, верно ли что

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im} \varphi^{2024} + \ker \psi^{2025} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} \varphi^{2024} \cap \ker \psi^{2025} = 0.$$

Если это верно, то представь вектор $v$ в виде какой-нибудь суммы $v = u + w$, где $u \in \operatorname{Im} \varphi^{2024}$ и $w \in \ker \psi^{2025}$, и покажи, что такие $u$ и $w$ единственные.

## Примерные задания для контроля теоретических знаний

**ЗАДАЧА 1**

**2 балла**

В пространстве $\mathbb{R}^3$ задана билинейная форма по правилу $\beta(x,y) = x^T By$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найди матрицу $A \in \mathrm{M}_{3\,3}(\mathbb{R})$, задающую оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ по правилу $\varphi(x) = Ax$ такую, что у всех билинейных форм

$$\gamma_0(x,y) = \beta(x,y), \qquad \gamma_1(x,y) = \beta(\varphi(x), \varphi(y)),$$
$$\gamma_2(x,y) = \beta(\varphi^2(x), \varphi^2(y)), \qquad \gamma_3(x,y) = \beta(\varphi^3(x), \varphi^3(y))$$

разные сигнатуры или докажи, что этого сделать нельзя.

**ЗАДАЧА 2**

**2 балла**

Найди матрицу оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в стандартном базисе, для которого многочлен $t^{2026} + t^{2024}$ будет зануляющим, при этом сам оператор не диагонализуемый, а векторы стандартного базиса $e_1$, $e_2$ и $e_3$ не являются собственными.

**ЗАДАЧА 3**

**2 балла**

На экзамене студенту надо было найти всевозможные ЖНФ для матрицы $ABC$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det(B) \neq 0.$$

Но так как студент плохо подготовился, он предложил профессору сыграть в игру. Они договорились и составили список из трех чисел: студент выбрал свою любимую оценку $10$, профессор выбрал свою любимую оценку $1$ и, чтобы никого не обидеть, они добавили ноль. Так как они оба джентельмены, то договорились, что будут называть только такие невырожденные матрицы $B \in \mathrm{M}_{2\,2}(\mathbb{R})$, что собственные значения $ABC$ будут только из составленного ими списка из трех чисел $\{0, 1, 10\}$. Теперь они играют по следующим правилам.

Вначале профессор называет невырожденную матрицу $B \in \mathrm{M}_{2\,2}(\mathbb{R})$ и находит ЖНФ матрицы $ABC$. После этого он записывает эту ЖНФ на листочке в список запрещённых ЖНФ. Далее ходит студент, он также выбирает невырожденную матрицу $B \in \mathrm{M}_{2\,2}(\mathbb{R})$ и находит ЖНФ матрицы $ABC$, чтобы такой ЖНФ ещё не было в запрещённом списке (при перестановке клеток местами ЖНФ считаются одинаковыми). После чего студент добавляет свою ЖНФ в список запрещённых и передает ход профессору и так далее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Если студент выигрывает, он получает $10$, если проигрывает, то $1$. Помоги студенту разобраться, какую оценку он получит.

**ЗАДАЧА 4**

**2 балла**

В пространстве $\mathbb{R}^3$ скалярное произведение задано по правилу $\langle x, y\rangle = x^T By$, где

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & -5 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Для некоторого базиса $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^3$ назовём вектор хорошим, если он в базисе $f_1, f_2, f_3$ и в двойственном к нему имеет одинаковые координаты. Покажи, что множество хороших векторов является подпространством. Найди, какой может быть размерность этого подпространства при разном выборе базиса $f_1, f_2, f_3$.

**Примерные задания по контрольной работе**

**Контрольная работа №1**

## Вариант 1

ЗАДАЧА 1

**2 балла**

Волшебница Хельга готовится к бою по линейной алгебре, где разрешены только ортогональные или самосопряжённые операторы. Для этого она изучила свою противницу Эльмиру и узнала, что её предыдущий бой прошёл в пространстве $\mathbb{R}^3$, где задано скалярное произведение $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \mathrm{x}^T B \mathrm{y}$ с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix},$$

а после каждого заклинания возникал оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такой, что для каких-то векторов $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ появлялась матрица Грама

$$G(\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v}), \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 13 & 5 \\ 1 & 11 & 5 & 7 \\ 13 & 5 & 17 & 7 \\ 5 & 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Помоги Хельге подготовиться к соревнованию и выясни, какой оператор возникает у её соперницы: ортогональный, самосопряженный, или же она играет не по правилам.

ЗАДАЧА 2

**2 балла**

Шпион Абель для передачи секретного сообщения использовал только симметричные матрицы $S \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$ с неотрицательным спектром. Но чтобы его сообщение нельзя было расшифровать, он умножал такую матрицу справа на случайную ортогональную матрицу. Контрразведка сумела перехватить зашифрованную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Помоги восстановить матрицу $S$ или докажи, что этого нельзя сделать.

ЗАДАЧА 3

**2 балла**

Юный математик Паша решил получить грант РФФИ на изучение квадратичных форм и операторов, влияющих на их сигнатуру. Он собирается изучать квадратичные формы $Q(\mathrm{x}) = \beta(\mathrm{x}, \mathrm{x})$, где $\beta\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задана по правилу $\beta(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x}^T B \mathrm{y}$ и

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

А цель исследования — установить, какой может быть сигнатура квадратичной формы $Q_\varphi(\mathrm{x}) = \beta(\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x}))$ для все возможных операторов $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Но как опытный ученый, Паша знает, что нельзя подавать грант на исследование, в котором не уверен. Помоги Паше найти ответ заранее.

**Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

| № п/п | Задание | Ответ | Компетенция |
|---|---|---|---|
| 1. | Составь общее уравнение прямой, проходящей через точкиM1 = (1,2) иM$_2$ = (3,6), приведённое к виду<br><br>αx − y + β = 0,<br><br>Запишите искомые α и β через точку с запятой | 2;0 | УК-1 |

Электронный документ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2. | Квадратичная форма $$Q(x_1,x_2)=5x_1^2+2x_2^2$$ является<br>а) положительно определённой;<br>б) отрицательно определённой;<br>в) знакочередующейся. | а | ОПК-1 |
| 3. | Реши матричную систему уравнений: $$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}4&6\\8&10\end{pmatrix}, \\ X-Y=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}. \end{cases}$$ Здесь $X$ и $Y$ — квадратные матрицы размера $2\times 2$. В ответ выпиши через точку с запятой коэффициенты матрицы $X$ в порядке: $$x_{11};x_{12};x_{21};x_{22}.$$ | 3;3;4;6 | ПК-1 |
| 4. | Найди сигнатуру квадратичной формы $$Q(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2.$$ Ответ выпиши в виде $p^0;p^+;p^-$, без пробелов. | 1;1;0 | ПК-1 |
| 5. | Вычисли $C=BA-2AB$, если $$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}.$$ В ответ выпиши через точку с запятой коэффициенты матрицы $C$ в порядке: $$c_{11};c_{12};c_{21};c_{22}.$$ | −2;−5;0;−3 | ПК-1 |
| 6. | Билинейная форма $B(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в стандартном базисе имеет матрицу $$B=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}.$$ Найди $B(\mathbf{u},\mathbf{v})$, если $$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}.$$ | 10 | ОПК-1 |