
УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Математический анализ. Углубленный курс I»**

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки: Программа двух дипломов НИУ
ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Срок освоения программы: 4 года

Год набора: 2024

**Москва
2024**

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)	3
2. Перечень планируемых результатов обучения	5
3. Тематический план	7
4. Содержание дисциплины (модуля)	8
5. Учебно-методическое обеспечение	9
6. Материально-техническое обеспечение	9
7. Методические и оценочные материалы	11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математический анализ. Углубленный курс I» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Математический анализ. Углубленный курс I» является основой для многих других математических дисциплин. Дисциплина развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в Блок 1, часть, формируемую участниками образовательных отношений как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания алгебраических структур, эрмитовых пространств, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля) направлены на формирование у студентов следующий знаний, умений и навыков:

- знание основных понятий и методов работы с рекуррентными последовательностями, включая линейные соотношения 1-го и 2-го порядка;
- знание формальных определений действительных чисел (через бесконечные десятичные дроби) и их свойств, включая теорему о точных гранях;
- знание критерий сходимости последовательностей и функций (Критерий Коши), а также альтернативные представления числа e ;
- знание теоремы о непрерывности функций (степенных, показательных, на отрезке) и понятие равномерной непрерывности;
- знание основных теорем дифференциального исчисления: правило Лопиталя, неравенство Йенсена, формулу Тейлора с остаточными членами;
- умение находить общий член рекуррентной последовательности для линейных соотношений и вычислять пределы таких последовательностей;
- умение применять свойства действительных чисел для доказательств и работать с рядами;
- умение использовать критерий Коши для анализа сходимости последовательностей и функций;
- умение доказывать непрерывность сложных функций (степенных, параметрических) и исследовать их поведение на отрезках;
- умение строить графики функций (включая параметрические), вычислять производные кусочно-заданных функций и применять формулу Тейлора для аппроксимации;
- способность применять методы анализа рекуррентных соотношений и техникой доказательства пределов, связанных с ними;
- способность применять строгий аппарат теории действительных чисел (аксиоматика, операции, теоремы о гранях) для обоснования математических утверждений;

- способность применять навыки доказательства теорем о сходимости (Коши) и применения их к решению задач;
- способность применять техники доказательства непрерывности и равномерной непрерывности, включая работу с контрпримерами;
- способность применять инструменты дифференциального исчисления (правило Лопиталя, неравенство Йенсена, разложение Тейлора) для исследования функций и построения графиков.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализации математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.

	математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
Лекции	Семинары (практические занятия)					
1	Рекуррентно заданные последовательности		4		4	Домашнее задание
2	Пределы некоторых рекуррентно заданных последовательностей		4		4	Домашнее задание
3	Доказательство критерия Коши существования предела последовательности (достаточность)		4		6	Домашнее задание Контрольная работа
4	Примеры кусочно заданных функций, производную которых необходимо вычислять по определению		4		4	Домашнее задание
5	Доказательство правила Лопиталя для неопределённости ∞/∞		4		6	Домашнее задание Контрольная работа
6	Неравенство Йенсена		4		4	Коллоквиум
7	Доказательство теоремы о разложении функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в форме Пеано		4		6	Домашнее задание
8	Примеры построения графиков функций (параметрически заданные функции)		2		4	Домашнее задание
	<i>Зачет</i>				8	
	<i>Итого:</i>		<i>30</i>		<i>8</i>	<i>38</i>
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)</i>	<i>76</i>				
	<i>Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)</i>	<i>2</i>				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Рекуррентно заданные последовательности	Нахождение общего члена рекуррентно заданной последовательности для линейных рекуррентных соотношений первого и второго порядка. Формальное построение действительных чисел (бесконечные десятичные дроби). Вывод свойств операций с действительными числами (при этом все свойства рациональных чисел предполагаются известными и не доказываются). Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани ограниченных числовых множеств
2	Пределы некоторых рекуррентно заданных последовательностей	Предел $(n!)^{1/n}$. Альтернативное представление числа e (через ряд)
3	Доказательство критерия Коши существования предела последовательности (достаточность)	Критерий Коши существования конечного предела функции в точке. Доказательство непрерывности степенной и показательной функций". Доказательство теорем о непрерывных на отрезке функциях
4	Примеры кусочно заданных функций, производную которых необходимо вычислять по определению	Различные контрпримеры. Определение кусочно заданных функций; вычисление производной в точках разрыва; анализ непрерывности и дифференцируемости
5	Доказательство правила Лопиталя для неопределённости ∞/∞	Формулировка правила Лопиталя; условия применения для неопределённости ∞/∞ ; пошаговое доказательство
6	Неравенство Йенсена	Формулировка неравенства; условия выпуклости функции; примеры применения неравенства
7	Доказательство теоремы о разложении функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в форме Пеано	Форма Лагранжа; форма Пеано; сравнение и интерпретация остаточных членов
8	Примеры построения графиков функций (параметрически заданные функции)	Методы параметрического задания; построение графиков с помощью параметров; анализ свойств параметрических кривых

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562115>.

2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562116>.

Дополнительная литература:

1. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебник для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563592>.

2. Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 456 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19274-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560461>.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;

— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное

Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математический анализ. Углубленный курс I» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как практические занятия, коллоквиум, контрольные работы и домашние задания, контроль теоретических знаний, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Участие в семинаре (аудиторная работа) – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Математический анализ. Углубленный курс I»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме *зачета*, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина «Математический анализ. Углубленный курс I» оценивается следующим образом:

Для получения «Зачёта» по углубленному курсу нужно сдать:

- 8 домашних заданий на продвинутом уровне (задания с черной звездочкой);
- 1 из 2 контрольных на основном уровне или выше (задания с красной и черной звездочкой);
- 1 из 2 контрольных на продвинутом уровне (задания с черной звездочкой по дисциплине).

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю) Примерные домашние задания

Домашнее задание по теме «Последовательности»

Задачи

*** ЗАДАЧА 1	0,5 балла	Какие из чисел $a = 1\,215$, $b = 12\,555$ — члены последовательности $x_n = 5 \cdot 3^{2n-3}$?
*** ЗАДАЧА 2	0,5 балла	а) Дай определение последовательности, ограниченной снизу. б) С помощью кванторов запиши, что последовательность не ограничена снизу.
*** ЗАДАЧА 3	1 балл	Укажи, какие из следующих утверждений эквивалентны тому, что последовательность ограничена сверху: а) $\exists C \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq C$; б) $\exists C \in \mathbb{R}, C > 0: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C$; в) $\exists C \in \mathbb{R}, C < 0: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C$; г) $\forall C \in \mathbb{R}, C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C$; д) $\exists C \in \mathbb{R}: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n < C$; е) $\exists C \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < C$. Какие из утверждений являются достаточными для того, чтобы последовательность была ограничена сверху?
*** ЗАДАЧА 4	1 балл	Какие из следующих последовательностей являются ограниченными сверху? Ограниченными снизу? Ограниченными? Приведи обоснование. а) $a_n = \cos \pi n$; в) $c_n = \frac{3+5n}{6-4n}$; д) $f_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{100}$. б) $b_n = n \sin n$; г) $d_n = \sum_{k=1}^n \frac{3}{k(k+3)}$;
*** ЗАДАЧА 5	1,5 балла	Какие из следующих последовательностей ограничены, а какие — нет: а) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$; г) $d_n = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k$; б) $b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k-n}$; д) $f_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n (k \cdot k!)$? в) $c_n = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k$;

<p>*** ЗАДАЧА 7</p>	<p>1 балл</p> <p>Напиши, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена, используя кванторы. Построй отрицание этого утверждения. Используя записанное отрицание, докажи, что последовательность $b_n = \frac{n^2}{n+3}$ не является ограниченной.</p>
<p>*** ЗАДАЧА 8</p>	<p>0,5 балла</p> <p>Используя кванторы, сформулируй утверждения:</p> <ol style="list-style-type: none"> последовательность $\{x_n\}$ не является строго возрастающей; последовательность $\{y_n\}$ не является убывающей; последовательность $\{z_n\}$ не является монотонной.
<p>*** ЗАДАЧА 9</p>	<p>1 балл</p> <p>Даны последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}, \{u_n\}, \{v_n\}$, причём $u_n = x_n + y_n, v_n = x_n y_n$. Докажи или опровергни утверждения:</p> <ol style="list-style-type: none"> Чтобы последовательность $\{u_n\}$ была строго возрастающей, достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими. Чтобы последовательность $\{u_n\}$ была строго убывающей, необходимо, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были убывающими. Чтобы последовательность $\{v_n\}$ была строго возрастающей, достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими. Чтобы последовательность $\{v_n\}$ была строго возрастающей, необходимо, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были строго возрастающими. Известно, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ убывают. Чтобы $\{u_n\}$ была строго убывающей, необходимо, чтобы хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ была строго убывающей.
<p>*** ЗАДАЧА 10</p>	<p>1,5 балла</p> <p>Исследуй последовательности на монотонность:</p> <ol style="list-style-type: none"> $a_n = 5n^2 - 15n - 3;$ $b_n = 5n^2 + 15n - 3;$ $c_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n};$ $d_n = \operatorname{tg} \frac{5}{n};$ $f_n = (-1)^n;$ $g_n = -5n + 2(-1)^n;$ $h_n = -2n + 3(-1)^n.$
<p>*** ЗАДАЧА 13</p>	<p>1 балл</p> <p>Найди решение линейного рекуррентного уравнения $x_{n+1} = 3x_n - 1$, удовлетворяющее условию $x_1 = -2$.</p>
<p>*** ЗАДАЧА 14</p>	<p>1 балл</p> <p>Найди решение линейного рекуррентного уравнения</p> $x_{n+2} = -4x_{n+1} - 3x_n,$ <p>удовлетворяющее условиям $x_1 = 2, x_2 = 4$.</p>
<p>*** ЗАДАЧА 15</p>	<p>1,5 балла</p> <p>Найди общее решение линейного рекуррентного уравнения $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n - 3^n$.</p>
<p>*** ЗАДАЧА 16</p>	<p>2 балла</p> <p>Найди решение линейного рекуррентного уравнения</p> $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 16x_n = (-4)^n (-64 + 96n + 192n^2),$ <p>удовлетворяющее условиям $x_1 = 36, x_2 = -240$.</p>
<p>*** ЗАДАЧА 17</p>	<p>2 балла</p> <p>Найди решение линейного рекуррентного уравнения</p> $x_{n+2} = -5x_{n+1} - 4x_n + 10n^2 + 14n - 121,$ <p>удовлетворяющее условиям $x_1 = -18, x_2 = 33$.</p>
<p>*** ЗАДАЧА 18</p>	<p>1 балл</p> <p>Найди общее решение линейного рекуррентного уравнения $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 36x_n$.</p>
<p>*** ЗАДАЧА 19</p>	<p>2 балла</p> <p>Найди общее решение линейного рекуррентного уравнения</p> $x_{n+2} = -4x_{n+1} - 16x_n + (61n + 70) \cdot 5^n.$

Примерные вопросы для коллоквиума

1. Что такое рекуррентно заданная последовательность?
2. Как найти общий член линейной рекуррентной последовательности первого порядка?
3. Как решается рекуррентное соотношение второго порядка с постоянными коэффициентами?
4. Как формально строятся действительные числа с помощью бесконечных десятичных дробей?
5. Какие свойства операций с действительными числами вытекают из их построения?
6. Что такое точная верхняя (нижняя) грань ограниченного множества чисел?
7. Сформулируйте и объясните теорему о существовании точной верхней грани.
8. Как вычислить предел последовательности $(n!)^{1/n}$?
9. Каково альтернативное представление числа e через ряд?
10. Что утверждает критерий Коши существования предела последовательности?
11. Как доказать достаточность критерия Коши для существования предела?
12. В чем суть критерия Коши для предела функции в точке?
13. Как доказать непрерывность степенной функции?
14. Как доказать непрерывность показательной функции?
15. Как формулируются и доказываются теоремы о непрерывных функциях на отрезке?
16. Что такое кусочно заданная функция? Приведите пример.
17. Как вычислить производную кусочно заданной функции в точке разрыва?
18. Какие контрпримеры демонстрируют особенности дифференцируемости кусочно заданных функций?
19. Сформулируйте правило Лопиталья для неопределённости вида ∞/∞ .
20. Приведите основные шаги доказательства правила Лопиталья для неопределённости ∞/∞ .

Примерные задания по контрольной работе

Контрольная работа №1

ЗАДАЧА 1

0,3 + 0,4 + 0,4 + 0,4 балла

Дана функция $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$.

- а) Найди область определения,
- б) Найди область значений,
- в) Найди обратную функцию $f(x)^{-1}$.
- г) Найди композицию функций $(f \circ g)(x)$, где $g(x) = \frac{1}{x}$

ЗАДАЧА 2

1 балл

Построй эскиз графика следующей композиции функций на основании анализа интервалов монотонности: $y = \ln(x^2 + 1)$.

ЗАДАЧА 3

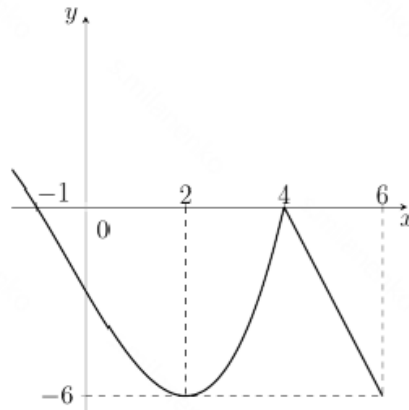
0,7 + 0,8 балла

Нарисуй эскизы графиков функций:

а) $y = \frac{1}{3}f(x) + 2$,

б) $y = f\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$,

где график $y = f(x)$ имеет вид:



ЗАДАЧА 4

0,5 балла

Докажи, что если функция на своей области определения ограничена снизу и отделена от нуля, то есть $\exists A: \forall x f(x) \geq A > 0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена.

ЗАДАЧА 5

0,5 балла

Может ли какая-либо последовательность $\{x_n\}$ удовлетворять условию

$$\forall \varepsilon \exists N: \forall n \geq N \quad x_n > \varepsilon?$$

ЗАДАЧА 6

0,5 балла

Докажи, что последовательность $\{x_n\}$ строго монотонна, начиная с некоторого номера, если $x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1000n$.

ЗАДАЧА 7

0,5 балла

Докажи по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 8

0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 балла

Найди пределы

